А. Н. РЕМИЗОВ
Н. Х. ИСАКОВА
А. Г. МАКСИНА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

А. Н. Ремизов, Н. Х. Исакова,
А. Г. Максина

Сборник задач по медицинской и биологической физике

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов медицинских специальностей вузов

Москва «Высшая школа» 1987

ББК 22.3
Р 38
УДК 53

Рецензенты:
кафедра медицинской и биологической физики Московского стоматологического института (зав. кафедрой проф. Е. В. Кортуков), кафедра медицинской и биологической физики Витебского медицинского института (зав. кафедрой доц. Н. М. Сакевич)

Ремизов А. Н. и др.
Р38 Сборник задач по медицинской и биологической физике: Учеб. пособие для мед. вузов. — М.: Высш. шк. 1987. 159 с.: ил.

Сборник содержит задачи и примеры по медицинской и биологической физике применительно к учебнику по данному курсу. К каждому разделу даны краткие теоретические сведения. Ответы на сложные задачи сопровождаются методическими указаниями и пояснениями.

$Р\frac{1704000000(4309000000)-382}{001(01)-87}$ 134—87 ББК 22.3
53

Предисловие

Из трех основных видов аудиторной деятельности студентов-медиков в курсе медицинской и биологической физики наименьшая доля приходится на практические занятия по решению задач и примеров. В связи с этим основная роль практических занятий сводится не столько к умению научить решать задачи, сколько к пояснению «как это делается» и к иллюстрации и закреплению теоретического материала.

Сборник содержит задачи разной степени сложности. Поэтому он может быть использован не только для проведения плановых практических занятий, но и для дополнительных заданий к лабораторным работам, УИРС, проведения олимпиад по медицинской и биологической физике и т. п.

В начале каждого раздела приводятся основные формулы курса, которые применяются для решения задач. Более подробно ознакомиться с теоретическим материалом можно из учебника. В конце «Сборника» приведены необходимые справочные данные, часть этих сведений может быть использована при изучении лекционного курса и выполнении лабораторных работ. Настоящий сборник — часть комплекса, в который входит еще учебник «Медицинская и биологическая физика» и «Руководство к лабораторным работам по физике».

Книга подготовлена А. Г. Максиной и А. Н. Ремизовым с использованием материала «Сборника задач по физике (для медицинских институтов)», М., Высш. шк., 1978, авт. — А. Н. Ремизов и Н. Х. Исакова. Задачи по алгоритмизации и программированию написаны Н. А. Ремизовым.

Авторы благодарны рецензентам за полезные советы и замечания.

Авторы

Математика. Элементы программирования

Глава первая

§ 1.1. Предел

Функция $y=f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $|y-A|<\varepsilon$, при $|x-a|<\delta$:

$$\lim_{x\to a} y = A.$$

Основные теоремы о пределах
Предел постоянной величины

$$\lim A = A. \tag{1.1}$$

Предел суммы (разности) конечного числа функций

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)+\psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}\varphi(x) + \lim_{x\to a}\psi(x). \tag{1.2}$$

Предел произведений конечного числа функций

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x). \tag{1.3}$$

Предел частного двух функций:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0. \tag{1.4}$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2{,}71828\ldots \text{(число e)}. \tag{1.5}$$

1.1. Вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x+3)$;

2) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{x}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 10}(x^2\lg x)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x^2+1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-1}{x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3}$.

1.2. Используя разложение функций на множители, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

10) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$.

1.3. Используя деление на аргумент, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3}{x^3+x^2+x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}$;

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^4+x^5}$;

13) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+x^5}{x^2+x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^2+3x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+3x}{7x^3+6x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+x}{7x^2-x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}$.

1.4. Производя деление и умножение функции на сопряженное выражение, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

8) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$,

13) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x})$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

16) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

17) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5})$;

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

20) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

22) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8-x}}$;

23) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

25) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$

1.5. Используя замечательные пределы, вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{10x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin {}^x/_2}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 3x$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$.

§ 1.2. Производная. Применение производных для исследования функций

Производной функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx в точке x при стремлении Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производные некоторых функций

постоянной величины $y = C$:

$$y' = 0; \tag{1.6}$$

степенной функции $y = x^\mu$:

$$y' = \mu x^{\mu - 1}; \tag{1.7}$$

показательной функции $y = a^x$:

$$y' = a^x \ln a; \tag{1.8}$$

в частности, если $y = e^x$, то

$$y' = e^x; \tag{1.9}$$

логарифмической функции $y = \log_a x$:

$$y' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}; \tag{1.10}$$

в частности, натурального логарифма $y = \ln x$:

$$y' = \frac{1}{x}; \tag{1.11}$$

тригонометрических функций:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x; \tag{1.12}$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x; \tag{1.13}$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{1.14}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{1.15}$$

обратных тригонометрических функций:

$$y = \arcsin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{1.16}$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\tag{1.17}$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2};\tag{1.18}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.\tag{1.19}$$

Производная суммы (разности) функций $y = u \pm v$:

$$y' = u' \pm v'.\tag{1.20}$$

Производная произведения двух функций $y = uv$:

$$y' = u'v + v'u.\tag{1.21}$$

Производная частного двух функций $y = u/v$:

$$y = \frac{u'v - v'u}{v^2}.\tag{1.22}$$

Производная сложной функции $y = f_1(u)$, если $u = f_2(x)$

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.\tag{1.23}$$

Условие возрастания функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$f'(x) > 0.\tag{1.24}$$

Условие убывания функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$f'(x) < 0.\tag{1.25}$$

Условие максимума функции $y = f(x)$ при $x = a$

$$f'(a) = 0 \text{ и } f''(a) < 0.\tag{1.26}$$

Если при $x = a$ производные $f'(a) = 0$ и $f''(a) = 0$, то необходимо исследовать $f'(x)$ в окрестностях точки $x = a$. Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, если при переходе через точку $x = a$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «—», в случае минимума — с «—» на «+». Если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку $x = a$, то в этой точке у функции экстремума нет.

1.6. Найдите производные следующих функций:

1) $y = \frac{3}{4} ax^4$;

2) $y = x^3 + 2x^2 + 8$;

3) $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

4) $y = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$;

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$;

6) $y = x^4 - \frac{1}{x}$;

7) $y = x^{a+b}$;

8) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{8}$;

9) $y = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2$;

10) $y=(1-3x^2)(1-x)^3$;

11) $y=(2x-1)(x^2-1)$;

12) $y=(1-4x^3)(1+2x^2)$;

13) $y=4\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\cos x$;

14) $y=x^4-2x^3-\ln x+a^x$;

15) $y=\dfrac{3}{4}x^3-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+5^x$;

16) $y=2^x-\sqrt[5]{x}$;

17) $y=\operatorname{tg} x+\ln x+\dfrac{x^4}{4}$;

18) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$;

19) $y=x-\sin x$;

20) $y=\log_a x+a^x$;

21) $y=\ln x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

22) $y=e^x \cos x$;

23) $y=\sin x \ln x$;

24) $y=\sin x \cos x$;

25) $y=x \ln x$;

26) $y=a^x\sqrt{x}$;

27) $y=\sqrt{x}\ \ln x$;

28) $y=3\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

29) $y=5a^x\sqrt[9]{x}$;

30) $y=4a^x\sqrt{x^3}$;

31) $y=\dfrac{4}{x^2+1}$;

32) $y=\dfrac{x^2}{2-x}$;

33) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;

34) $y=\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

35) $y=\dfrac{2x^2+3}{4+x^3}$;

36) $y=\dfrac{x^3}{1-4x}$;

37) $y=\dfrac{1-x}{x-1}$;

38) $y=\dfrac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$;

39) $y=\dfrac{x^2}{2-x^2}$;

40) $y=\dfrac{\sqrt{x^3}}{1-4x}$;

41) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}$;

42) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$;

43) $y=\dfrac{5x^4-2x^3+3x^2}{\sqrt[3]{x}}$;

44) $y=\dfrac{e^x}{2x}$;

45) $y=\dfrac{12\cos x}{1-\sin x}$;

46) $y=\dfrac{e^x}{x^2}$;

47) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\sin x}$;

48) $y=\dfrac{x^3}{\ln x}$;

49) $y=\dfrac{2x^2+\ln x}{2}$;

50) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

51) $y=e^{3x}$;

52) $y=\cos 2x$;

53) $y=\sin^2 x$;

54) $y=\sin x^2$;

55) $y=e^{x^2}$;

56) $y=\ln(x^2+1)$;

57) $y=a^{\sqrt{x}+x}$;

58) $y=e^{\sin x}$;

59) $y=\sqrt{\ln x}$;

60) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$;

61) $y=\ln(\ln x)$;

62) $y=e^{-1/x^2}$;

63) $y=\sin(\ln x)$;

64) $y=\ln(\cos x)$;

65) $y=(x^2-3)^5$;

66) $y=\sqrt[5]{(4x^2-3x+1)^3}$;

67) $y=6e^{-x^2}$;

68) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$;

69) $y=\ln(\sin x+\cos x)$;

70) $y=\operatorname{tg}^2 x+e^{x^2+4}$;

71) $y=a^{2x}-\sqrt{\sin x}$;

72) $y=\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$;

73) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$;

74) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln(\cos x)$;

75) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

76) $y=\sin^2(3x^2+2x+4)$;

77) $y=2\sqrt{\sin x}\cos\dfrac{x}{2}$;

78) $y=\sqrt{x^3+1}\operatorname{tg} x^2$;

79) $y=e^{x^2}\sqrt{x^2+1}$;

80) $y=x^2\cdot 3^{x+1}$;

81) $y=\ln^2 x\sin^2 x$;

82) $y=\sin^3 x\cos\dfrac{x}{3}$;

83) $y=\cos\sqrt{x}\,\ln^2 x$;

84) $y=\sqrt[3]{x}\,\sin\sqrt[3]{x}$;

85) $y=(x^2-3)^5\ln x$;

86) $y=\operatorname{tg} 3x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$;

87) $y=2\sqrt{\sin x}\cos x$;

88) $y=3\sqrt{\ln x}x^3$;

89) $y=\ln x\operatorname{tg} x^2$;

90) $y=\sqrt{x}\,\sqrt{\sin x}$;

91) $y=\ln x^2\sin^2 x$;

92) $y=e^{2x}\sqrt{x^5+1}$;

93) $y=e^{\sqrt{x}}\sin x^2$;

94) $y=(1-x^2)^3\cos x+2x\sin^2 x$;

95) $y=x\sqrt{x^2-1}$;

96) $y=\operatorname{tg} x\sqrt{x^3+2}$;

97) $y=\sqrt{x}\,\operatorname{tg} x$;

98) $y=\sqrt{x+1}\,e^{\sqrt{x}}$;

99) $y=\sqrt{2x^3-3}\lg x$;

100) $y=\sqrt{x^3+x}\sin\sqrt{x}$

101) $y=x^2\sqrt{\sin x}$;

102) $y=\sqrt[3]{x}\,\operatorname{ctg}^2 x$;

103) $y=e^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$;

104) $y=\cos x^2\ln\sqrt{x}$;

105) $y=\sqrt{x^2+1\cdot e^{3x}}$;

106) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}\,\ln x^3$;

107) $y=\sin^3 x\cos x$;

108) $y=2\sin^2 x\cos^2 x$;

109) $y=e^{\cos x}\sin x$;

110) $y=e^{2x}\cos 2x$;

111) $y=\sin^3 x\cos 3x$;

112) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x^2}$;

113) $y=\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin 2x}$;

114) $y=\dfrac{x^3}{\cos^2 x}$;

115) $y=\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{x}}$;

116) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos x}$;

117) $y=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\ln^2 x}$;

118) $y=\dfrac{\sin^2 x}{a^x}$;

119) $y=\dfrac{e^{x^2}}{\sin x}$;

120) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln x^2}$;

121) $y=\dfrac{3x^2+4x}{\cos 2x}$;

122) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos x}$;

123) $y=\dfrac{x^4e^{2x}}{\ln x}$;

124) $y=\dfrac{\sin\sqrt{x}\,\ln^2 x}{x}$;

125) $y=\dfrac{e^x\sin(1/x)}{\cos x}$;

126) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

127) $y=\dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{e^{x^2}}$;

128) $y=\dfrac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}$;

129) $y=\ln^3(e^x+x^2)$;

130) $y=\lg^3(x^2)$;

131) $y=\ln(e^{\cos x})$;

132) $y=\cos e^{\sqrt{x}}$;

133) $y=e^{\ln^2 x}$;

134) $y=\sqrt{\ln(\operatorname{tg} x)}$;

135) $y=\ln^2\sqrt{x}$;

136) $y=\sqrt[3]{\sin 2x}$;

137) $y=\sqrt{\ln^3(2x+1)}$;

138) $y=x^4 e^{\sin\sqrt{x}}$;

139) $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$;

140) $y=\dfrac{4\sin 2x}{5\sin^2 x^3}$;

141) $y=\dfrac{\sin\sqrt[3]{x^2}+\cos^2 x^3}{\operatorname{tg}(x/3)}$;

142) $y=\dfrac{\cos\sqrt{x}\ \ln x}{\sin x}$.

1.7. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y=x^2$;

2) $y=x^3$;

3) $y=\dfrac{1}{x}$;

4) $y=x-\sin x$;

5) $y=2+x-x^2$;

6) $y=x^2-3x+1$;

7) $y=-2x^2+8x+1$;

8) $y=x^3-12x-4$;

9) $y=-x^3+x^2+5x-6$;

10) $y=x^3-3x^2+5$;

11) $y=x^2+6x-4$;

12) $y=x^4+4x-6$;

13) $y=2x^3-15x^2+36x-2$;

14) $y=8x^2-\ln x$;

15) $y=e^{-x^2}$;

16) $y=4x-x^2$;

17) $y=x+\sin x$;

18) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

19) $y=3x-x^3$;

20) $y=x^2e^{-x}$;

21) $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2-3x$;

22) $y=2x^2-x^4$.

1.8. Исследуйте на экстремум функции:

1) $y=2+x-x^2$;

2) $y=2x^2-x^4$;

3) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

4) $y=\sqrt{x}\ \ln x$;

5) $y=e^{-x^2}$;

6) $y=x^3-6x^2+9x-4$;

7) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

8) $y=2x^2+5x+7$;

9) $y=4-3x-5x^2$;

10) $y=6+12x-x^3$;

11) $y=x^3+4x$;

12) $y=2x^3+3x^2+6x+10$;

13) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

14) $y=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$;

15) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$;

16) $y=xe^{-x}$;

17) $y=\cos x+\dfrac{\cos 2x}{2}$;

18) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

19) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

20) $y=x+\cos x$;

21) $y=\dfrac{x}{\ln x}$;

22) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

23) $y=x^2\sqrt{x^2+2}$;

24) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

25) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3$;

26) $y=x-\ln x$.

§ 1.3. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Дифференциал независимой переменной равен ее приращению

$$dx=\Delta x. \tag{1.27}$$

Дифференциал функции $y=f(x)$

$$dy=y'dx. \tag{1.28}$$

Дифференциал суммы (разности) двух функций $y=u\pm v$

$$dy=du\pm dv. \tag{1.29}$$

Дифференциал произведения двух функций $y=uv$

$$dy=vdu+udv. \tag{1.30}$$

Дифференциал частного двух функций $y=u/v$

$$dy=\frac{vdu-udv}{v^2}. \tag{1.31}$$

Приращение функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy\approx f'(x)\cdot\Delta x, \tag{1.32}$$

где Δx — приращение аргумента.

Приближенное вычисление значения функции:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x. \tag{1.33}$$

Дифференциал применяется для вычисления абсолютной и относительной погрешностей при косвенных измерениях $u=f(x, y, z, \ldots)$. Абсолютная погрешность результата измерения

$$du\approx\Delta u\approx\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\Delta z+\ldots. \tag{1.34}$$

Относительная погрешность результата измерения

$$\frac{du}{u}\approx\frac{\Delta u}{u}\approx\frac{1}{u}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\Delta z+\ldots\right). \tag{1.35}$$

1.9. Найдите дифференциалы следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\cos 2x$;

3) $y=(2x+x^2)^3$;

4) $y=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}$;

5) $y=\ln\sin x+x^3$;

6) $y=2^x\sqrt{x}$;

7) $y=\sin^2 3x+\ln x^2$;

8) $y=3^{x^2+1}$;

9) $y=\operatorname{tg} x^2+\sin^2 3x$;

10) $y=(e^x+e^{-x})^2$;

11) $y=\dfrac{x^3}{\sin^2 3x}$;

12) $y=x\cos x+1$;

13) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$;

14) $y=xe^x-e^{x-2}$;

15) $y=\ln^2\cos x$;

16) $y=e^{x/2}\cos\dfrac{x}{2}$;

17) $y=\sqrt{\cos 3x}$;

18) $y=e^{\sin x}\sin x$;

19) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{1-\cos 2x}$;

20) $y=\dfrac{1+\sin^2 x}{\ln x^2}$.

1.10. Вычислите приращение функции, соответствующее изменению аргумента от x_1 до x_2:

1) $y=3x^2+x-1$, $x_1=2$, $x_2=2{,}01$;

2) $y=2x^3-4x$, $x_1=1$, $x_2=1{,}02$;

3) $y=3x^2-2x$, $x_1=2$, $x_2=2{,}001$;

4) $y=4x^2-2x+2$, $x_1=2$, $x_2=2{,}003$;

5) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$, $x_1=3$, $x_2=3{,}002$.

1.11. На сколько уменьшится площадь квадрата со стороной $a=10$ см, если сторону уменьшить на 0,01 см?

1.12. Определите площадь кольца, если его внешний радиус равен 17,02 см, а внутренний — 17 см.

1.13. Тело двигалось в течение $t=26$ с с постоянным ускорением $a=0{,}2$ м/с^2. Какой путь s оно пройдет за следующие 0,5 с, если будет продолжать двигаться с тем же ускорением?

1.14. Количество электричества, протекающего через сечение проводника, определяется по формуле $q=0{,}01t^2+t+4$ [q в Кл]. Определите количество электричества, протекшее через проводник за 101-ю секунду.

1.15. У тела массой 1 кг изменилась скорость движения с 23 см/с до 23,2 см/с. Найдите изменение кинетической энергии.

1.16. Найдите приближенно числовые значения функций при заданном аргументе x:

1) $y=x\sqrt{3+x}$, $x=1{,}004$;

2) $y=2x^2+3x^3$, $x=2{,}01$;

3) $y=\frac{\sqrt{x^2-7}}{x}$, $x=4{,}02$;

4) $y=5x^4+3x^3-\frac{1}{x}$, $x=1{,}04$;

5) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x=2{,}95$;

6) $y=\frac{x^2}{x^3+x+1}$, $x=0{,}97$;

7) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $x=9{,}24$;

8) $y=x^4+x^3+2x$, $x=0{,}96$.

1.17. Дано уравнение движения тела: $s=t^3/2+2t^2$, где s выражено в метрах, t — в секундах. Найдите путь s, пройденный телом за $t=1{,}92$ с от начала движения.

1.18. Тело массой 10 кг движется со скоростью 9,98 м/с. Вычислите кинетическую энергию этого тела.

1.19. Два точечных разноименных заряда притягиваются с силой $F=kr^{-2}$, где $k=1$ мН·м^2. Вычислите силу притяжения зарядов, если $r=2{,}04$ м.

1.20. Вычислите центростремительное ускорение тела, движущегося равномерно по окружности радиуса 0,5 м, если скорость тела $v=4{,}05$ м/с.

1.21. Докажите приближенные формулы:

1) $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$

2) $\ln(x\pm\Delta x)\approx\ln x\pm\frac{\Delta x}{x}$;

3) $\sin(x\pm\Delta x)\approx\sin x\pm\Delta x\cos x$;

4) $\lg(x\pm\Delta x)\approx\lg x\pm\frac{1}{x}\lg e\cdot\Delta x$.

1.22. Вычислите без помощи таблиц:

1) $\sqrt{10}$;
2) $\sqrt{1{,}012}$;
3) $\sqrt[4]{19}$;
4) $\sqrt{37}$;
5) $\sqrt[3]{8{,}02}$;
6) $(1{,}02)^3$;
7) $\lg 101$;
8) $\sin 31°$;
9) $\cos 28°$;
10) $\operatorname{tg} 46°$;
11) $\lg 11$;
12) $\sin 30°12'$.

1.23. Найдите выражение для относительной погрешности при вычислении кинетической энергии тела, если масса тела определяется прямым взвешиванием, скорость рассчитывается по формуле $v=l/t$, где l и t измеряются непосредственно.

1.24. Найдите выражение для относительной погрешности в измерении при помощи мостовой схемы сопротивления проводника $R_x = R(l_1/l_2)$, где R, l_1 и l_2 — измеряемые величины.

1.25. Найдите относительную погрешность в определении силы света лампочки накаливания при помощи люксметра ($I = ER^2$), если на расстоянии 50 см от нее стрелка люксметра отклоняется на 25 делений шкалы. Расстояние R измеряется с абсолютной погрешностью $\Delta R = 0{,}005$ м.

1.26. Найдите абсолютную и относительную погрешности в определении объема цилиндра, если при измерениях были получены значения радиуса $R = (6 \pm 0{,}1)$ см и высоты $h = (10 \pm 0{,}2)$ см.

§ 1.4. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной или $f(x)\mathrm{d}x$ своим дифференциалом, называется первообразной данной функции $f(x)$. Совокупность всех первообразных функций для дифференциала $f(x)\mathrm{d}x$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)\mathrm{d}x$. Основные интегралы

$$\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1); \qquad (1.36)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C; \qquad (1.37)$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C; \qquad (1.38)$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C; \qquad (1.39)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C; \qquad (1.40)$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C; \qquad (1.41)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C; \qquad (1.42)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C. \qquad (1.43)$$

Интегрирование по частям

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u. \qquad (1.44)$$

Пример

Найти $y = \int \ln x \mathrm{d}x$.

Полагаем $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; тогда $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = x$.

Используя (1.44), получаем

$$y=\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Пример

Найти $y=\int (1+2x)^2 dx$.

Заменим $1+2x=z$; $dx=\frac{dz}{2}$. Тогда

$$y=\frac{1}{2}\int z^2 dz.$$

Таким образом, интеграл сведен к табличному виду. Воспользовавшись формулой (1.36), найдем

$$\frac{1}{2}\int z^2 dz = \frac{1}{6} z^3 + C.$$

Возвращаясь к прежней переменной x, окончательно имеем

$$y=\frac{(1+2x)^3}{6}+C$$

1.27. Найдите интегралы:

1) $\int 4x^2 dx$;
2) $\int (3x^2+2x-1)dx$;
3) $\int (4x^3+4x-3)dx$;
4) $\int x^2(1+2x)dx$;
5) $\int (x+1)(x+2)dx$;
6) $\int \frac{dx}{2x^3}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
8) $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;
9) $\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}dx$;
10) $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}dx$;
11) $\int \frac{2\sqrt{x}-3x^2}{x^2}dx$;
12) $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$;
13) $\int (3x^2-2\cos x)dx$;
14) $\int \frac{e^{2x+1}-e^{2x-1}}{e^x}dx$;
15) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$;
16) $\int \frac{2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}dx$;
17) $\int \frac{\sin^2 x-3}{\sin^2 x}dx$;
18) $\int \frac{e^{2x}+e^x \sin x}{e^x}dx$;
19) $\int \left(\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{2}}-\sin x\right)dx$;
20) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$.

1.28. Найдите интегралы методом замены переменной:

1) $\int \sqrt{2x-3}\,dx$;
2) $\int \cos 3x\,dx$;
3) $\int e^{2x+1}dx$;
4) $\int (e^x+e^{-x})dx$;
5) $\int (x+1)^{3/2}dx$;
6) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

8) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+2}}$;

9) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4-2)^3}$;

10) $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$;

11) $\int \frac{2dx}{3-4x}$;

12) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

13) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

14) $\int x^2(x^3+9)^3 dx$;

15) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$;

16) $\int \frac{x^6 dx}{(x^7-2)^2}$;

17) $\int \frac{a\,dx}{a-x}$;

18) $\int e^{x^2} x\,dx$;

19) $\int \frac{e^x+1}{e^x} dx$;

20) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$;

21) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$;

22) $\int \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} dx$;

23) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[x]{e}}$;

24) $\int e^{2x+3} dx$;

25) $\int \cos 3x\,dx$;

26) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

27) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

28) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right) dx$;

29) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$;

30) $\int x^2 \sin 3x^3 dx$;

31) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$;

32) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

33) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$;

34) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$;

35) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$;

36) $\int \sin^5 x \cos x\,dx$;

37) $\int \frac{5\sin x}{\cos^3 x} dx$;

38) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx$;

39) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

40) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

41) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$;

42) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$;

43) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

44) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

45) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$;

46) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

1.29. Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int x\cos x\,dx$;

2) $\int x\cos 3x\,dx$;

3) $\int x\ln x\,dx$;

4) $\int xe^x dx$;

5) $\int x^2 \sin 2x\,dx$;

6) $\int x^3 \ln x\,dx$;

7) $\int xe^{-x} dx$;

8) $\int x^2 e^{-2x} dx$;

9) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;

10) $\int x\sin x\,dx$;

0,25 **1.30.** Найдите интегралы:

1) $\int (2+5x)^4 dx$;
2) $\int \cos^2 x\, dx$;
3) $\int 4(2x-1)^2 dx$;
4) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^x}} dx$;
5) $\int \sin^2 x\, dx$;
6) $\int x^2 e^{x^3+1} dx$;
7) $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^7+1}}$;
8) $\int \sqrt[4]{(5-x^3)}\, dx$;
9) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;
10) $\int \frac{\ln^6 x}{x} dx$;
11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+a^2}}$;
12) $\int \frac{(x-a)^2}{x} dx$;
13) $\int \frac{6x\,dx}{(x^2+1)^2}$;
14) $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}$;
15) $\int \mathrm{tg}\, 2x\, dx$;
16) $\int \frac{(2+\ln x)^2}{x} dx$;
17) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$;
18) $\int \mathrm{arctg}\, x\, dx$;
19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;
20) $\int 3^{2-x} dx$;
21) $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$;
22) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$;
23) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$;
24) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$;
25) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$;
26) $\int x(1-x)^2 dx$;
27) $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$;
28) $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx$;
29) $\int x e^{x^2} dx$;
30) $\int \sin^3 x\, dx$.

§ 1.5. Определенный интеграл

Интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i, \tag{1.45}$$

где k_i — произвольная точка соответствующего отрезка. Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i. \tag{1.46}$$

Формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1.47}$$

где F — первообразная функцию $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Некоторые свойства определенного интеграла:

$$\int_a^a f(x)\,dx=0; \tag{1.48}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx; \tag{1.49}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.50}$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$,

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.51}$$

Площадь фигуры, ограниченной двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)\,[f_2(x)\geqslant f_1(x)]$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$,

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \tag{1.52}$$

1.31. Вычислите интегралы:

1) $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$;

2) $\int_0^\pi \sin x\,dx$;

3) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$;

4) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$;

5) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$;

6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin(2x-\pi/6)\,dx$;

7) $\int_1^0 \frac{3x\,dx}{4-x^2}$;

8) $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{3+x^4}$;

9) $\int_0^{\pi/6} \sin 6x\,dx$;

10) $\int_{-1}^0 x^5(1-x^6)^7\,dx$;

11) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$;

12) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\,dx$;

13) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+5}$;

14) $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x^2}}$;

15) $\int_1^2 \frac{x^2-4x^3+x^4}{x^2}\,dx$;

16) $\int_0^1 \frac{x^2-2x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

17) $\int\limits_{0}^{\pi/2} 2\sin x\cos x\,dx;$

18) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx;$

19) $\int\limits_{1}^{2} (x^2-2x+3)\,dx;$

20) $\int\limits_{0}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}};$

21) $\int\limits_{0}^{1} \frac{6x^2dx}{1+2x^3};$

22) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3};$

23) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x\,dx;$

24) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x};$

25) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2};$

26) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2};$

27) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 4\sin^3 x\cos x\,dx;$

28) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+5}\,dx;$

29) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x};$

30) $\int\limits_{1}^{e} \frac{2x^2+1}{x}\,dx;$

31) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx;$

32) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx;$

33) $\int\limits_{1}^{10} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx;$

34) $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx;$

35) $\int\limits_{1}^{2} x(2x^2+1)\,dx;$

36) $\int\limits_{1}^{4} \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)dx;$

37) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3};$

38) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx.$

1.32. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y=4-x^2,\ y=0;$
2) $y=3-2x-x^2,\ y=0;$
3) $y=\ln x,\ y=0,\ x=e;$
4) $y=x^2-2,\ y=6-x^2;$
5) $y=\frac{2}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4;$
6) $y=x^2,\ y=2-x^2;$
7) $y=x^2+4x,\ y=x+4;$
8) $y=6x-x^2,\ y=0;$
9) $y=x^3,\ y=8,\ x=0;$
10) $y=2^x,\ y=2,\ x=0;$
11) $y=5x,\ y=0,\ x=2;$
12) $y=3x-1,\ y=0,\ x=2,\ x=4;$
13) $y=x^3,\ y=2x;$
14) $y=4(1-x^3),\ y=0,\ x=0;$
15) $y=x^2-x,\ y=0,\ x=0,\ x=2;$
16) $y=2x^2,\ y=0,\ x=2,\ x=4;$
17) $y=x^2-x,\ y=0;$
18) $y=2x-x^2,\ y=x;$
19) $y=\frac{x^2}{2},\ y=4-x;$
20) $y=x^2,\ y=1-x^2;$
21) $y=4x-5,\ y=0,\ x=-3,\ x=-$
22) $y=2x^2+2x,\ y=0,\ x=0,\ x=3;$
23) $y=x^3,\ x=2,\ x=3;$
24) $y=x^2,\ y=x;$
25) $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi;$
26) $y=e^{-x},\ y=0,\ x=1,\ x=2.$

§ 1.6. Дифференциальные уравнения

Общий вид дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0. \tag{1.53}$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{1.54}$$

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.55}$$

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y = f(x, C). \tag{1.56}$$

Примеры

1. Дифференциальное уравнение типа $y' = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad dx = f(x)dx.$$

Общее решение:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

2. Дифференциальное уравнение типа $y' = f(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad \frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Общее решение:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = F(y) = x + C.$$

3. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0.$$

Общее решение:

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C; \; F(x) + \Phi(y) = C.$$

4. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$f(x)\varphi(y)dx + \psi(x)\Phi(y)dy = 0.$$

Приведем это уравнение к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}dx + \frac{\Phi(y)}{\varphi(y)}dy = 0.$$

Общее решение:

$$\int \frac{f(x)}{\psi(x)}dx + \int \frac{\Phi(y)}{\varphi(y)}dy = C; \; F_1(x) + F_2(y) = C.$$

1.33. Выясните, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

1) $y' = 3x^2 + 2, \; y = x^3 + 2y;$

2) $y' = 4y + 3, \; y = \frac{e^{4x} - 3}{4};$

3) $y' = x + y',\ y = \frac{1}{x}$;

4) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0,\ y = 5\cos(2t+3)$;

5) $y' - y = e^x,\ y = (x+2)e^x$;

6) $y'' + y = 2,\ y = xe^x$;

7) $(x+2)dx - 2dy = 0,\ y = \frac{x^2}{4} + x$;

8) $3y - xy' = 0,\ y = 4x^2 + 1$;

9) $y' - 2x = 1,\ y = x^2 + x$;

10) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = xe^x$.

1.34. Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = 2y^2$;

2) $y' = 2x^2 + 1$;

3) $y' = 5y$;

4) $y' = \sin x + \cos x$;

5) $xyy' = 0{,}5$;

6) $3x dy = 2y dx$;

7) $(x+1)dx - 2xy dy = 0$;

8) $4x - 3y^2 y' = 0$;

9) $y'(x+1) = 1$;

10) $x dx = y dy$;

11) $y' = y\cos x$;

12) $y' = 2xy$;

13) $dy + 3y dx = 0$;

14) $e^y y' = 1$;

15) $e^x y' = 1$;

16) $y' = \frac{1}{x} + e^x$.

1.35. Найдите частные решения дифференциальных уравнений

1) $y dy - x dx = dx$, если $y=0$ при $x=2$;

2) $y' = \frac{1}{x} + x^2$, если $y = 1 + \frac{e^3}{3}$ при $x = e$;

3) $2xy' = y$, если $y=6$ при $x=9$;

4) $\sin x dx = -dy$, если $y=1$ при $x=\pi/3$;

5) $3y^2 y' = y^3 + 1$, если $y=2$ при $x=0$;

6) $y' = e^x + 2e^{-x}$, если $y=3$ при $x=0$;

7) $(x+1)dy = y dx$, если $y=8$ при $x=1$.

Составив дифференциальные уравнения, решите задач **1.36—1.41.**

1.36. Тело движется прямолинейно с ускорением $a = 5$ см/с Начальная скорость тела $v_0 = 2$ м/с. Выведите закон дви жения этого тела и вычислите путь, пройденный им з первые 10 мин движения.

1.37. Найдите зависимость потенциальной энергии сжатой пру жины от деформации. Потенциальная энергия сжатой пружины равна работе силы $F = kx$ на пути от 0 до x.

1.38. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. До какой температуры охладится тело за 30 мин, если за 10 мин оно охладилось от 100 до 60°C? Температура окружающей среды 20°C.

1.39. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найдите закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя $l = 0{,}5$ м интенсивность света убывает в два раза.

1.40. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 ч после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 ч?

1.41. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника, считая, что углы отклонения маятника малы.

§ 1.7. Теория вероятностей. Математическая статистика

Относительная частота события

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.57}$$

где n — число независимых испытаний, в которых случайное событие A происходит m раз.

Вероятность случайного события

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}. \tag{1.58}$$

Вероятность появления одного (безразлично какого) из нескольких несовместных событий (теорема сложения вероятностей). Для двух событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) + P(B). \tag{1.59}$$

Вероятность совместного появления независимых событий (теорема умножения вероятностей). Для двух событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.60}$$

Вероятность того, что событие A произойдет l раз при n испытаниях (биномиальное распределение)

$$P_{ln} = \frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{l!} P^l (1-P)^{n-l}, \tag{1.61}$$

где P — вероятность наступления события A.
Распределением дискретной случайной величины называют совокупность ее значений: $x_1, x_2, \ldots$ и соответствующих вероятностей: $p(x_1)=p_1,\ p(x_2)=p_2\ldots$
Условие нормировки для дискретной случайной величины, имеющей n значений,

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=1. \tag{1.62}$$

Среднее значение дискретной случайной величины

$$\langle X\rangle=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{n}=x_1\frac{m_1}{n}+\ldots+x_n\frac{m_n}{n}=\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{m_i}{n}, \tag{1.63}$$

где m_i — число дискретных случайных величин, имеющих значение x_i.
Математическое ожидание дискретной случайной величины

$$M(X)=x_1p_1+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \tag{1.64}$$

Дисперсия дискретной случайной величины

$$D(X)=M\{[X-M(X)]^2\}, \tag{1.65}$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \tag{1.66}$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\ . \tag{1.67}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает какое-либо значение в интервале (a, b)

$$P_{ab}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.68}$$

где $f(x)$ — плотность вероятности (функция распределения вероятностей).
Условие нормировки для непрерывной случайной величины

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1. \tag{1.69}$$

Функция распределения случайной величины

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.70}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x. \qquad (1.71)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) \mathrm{d}x. \qquad (1.72)$$

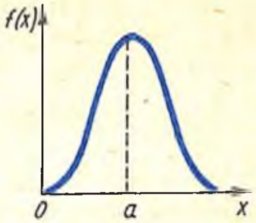


Рис. 1.1

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \qquad (1.73)$$

где a — математическое ожидание случайной величины, σ — среднее квадратическое отклонение. График закона распределения представлен на рис. 1.1.

Функция распределения по нормальному закону

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\right). \qquad (1.74)$$

Значения функции Ф даны в табл. 6.

Плотность вероятности для проекции скорости молекул газа на ось Ox

$$f(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-m_0 v_x^2/(2kT)}, \qquad (1.75)$$

где m_0 — масса молекулы, T — термодинамическая температура газа, k — постоянная Больцмана.

Плотность вероятности для модуля скорости молекул газа (распределение Максвелла по скоростям)

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-m_0 v^2/(2kT)} \qquad (1.76)$$

Средняя, средняя квадратичная и наивероятнейшая скорости молекул:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad (1.77)$$

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad (1.78)$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \qquad (1.79)$$

где R — молярная газовая постоянная, M — молярная масса.
Плотность вероятности нахождения молекулы газа в однородном гравитационном поле (пример распределения Больцмана)

$$f(h) = \frac{m_0 g}{kT} e^{-m_0 gh/(kT)}. \quad (1.80)$$

Давление газа (воздуха), находящегося в однородном гравитационном поле, на высоте h (барометрическая формула)

$$p_h = p_0 e^{-m_0 gh/(kT)} = p_0 e^{-Mgh/(RT)}, \quad (1.81)$$

где p_0 — давление на высоте $h = 0$.

Концентрация молекул газа (воздуха), находящегося в однородном гравитационном поле, на высоте h

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} = n_0 e^{-Mgh/(RT)}, \quad (1.82)$$

где n_0 — концентрация молекул газа на высоте $h = 0$.
Интервальная оценка генеральной средней (среднее значение генеральной совокупности)

$$\langle x_в \rangle - \varepsilon < \mu < \langle x_в \rangle + \varepsilon, \quad (1.83)$$

где $\langle x_в \rangle$ — выборочная средняя. Эти неравенства выполняются с доверительной вероятностью P. Положительное число ε характеризует точность оценки и называется доверительным интервалом.
При большой выборке ($n > 30$)

$$\tau = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \text{ или } \varepsilon = \frac{\tau\sigma}{\sqrt{n}},$$

где σ — генеральное среднее квадратическое отклонение. Обычно в расчетах берется выборочное среднее квадратическое отклонение.
Связь между τ и P

$$\Phi(\tau) = \frac{1+P}{2}. \quad (1.84)$$

Значения функции Φ даны в табл. 6.
Интервальная оценка генеральной средней при малой выборке ($n \leqslant 30$)

$$\varepsilon = t\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Здесь $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_в^2$ — исправленная выборочная дисперсия, где $\sigma_в^2$ — выборочная дисперсия. Параметр t (коэффициент Стьюдента) для заданных n и P находят по табл. 7.

1.42. Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

1.43. В институт было подано 1 275 заявлений о приеме от девушек и 1 084 заявлений от юношей. Каковы относительные частоты подачи заявления для этих абитуриентов?

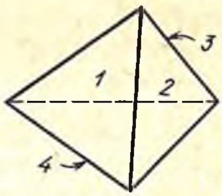


Рис. 1.2

1.44. Грани правильного тетраэдра (рис. 1.2) пронумерованы: 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что при бросании тетраэдр встанет на грань с цифрой 1? с цифрой 2? Предполагается, что тетраэдр сделан из однородного материала. Почему необходимо последнее условие?

1.45. Используя условие предыдущей задачи, найдите вероятность того, что на видимых (боковых) гранях тетраэдра будут цифры 1, 2 и 3?

1.46. В картотеке имеются истории болезней восьми пациентов. Если наугад взять первую, затем вторую, третью и т. д. историю болезней, то какова в каждом случае будет вероятность изъятия нужной истории болезней? Предполагается, что искомая история болезней имеется в картотеке. Рассмотрите два варианта: а) взятые истории болезней не возвращаются в картотеку; б) взятые истории болезней каждый раз возвращаются в картотеку и хаотически располагаются в ней.

1.47. По гладкому столу катится однородный шар. Вследствие сил трения шар останавливается. Какова вероятность того, что шар остановится, касаясь поверхности стола заранее заданной точкой?

1.48. Найдите вероятность выпадания нечетного числа при бросании игральной кости (однородный куб).

1.49. В урне находится 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из нее наугад извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белый? черный?

1.50. В условии задачи **1.49** извлекается черный шар и не возвращается в урну. Какова вероятность извлечь после этого черный шар? белый?

1.51. В условии задачи **1.49** извлекается белый шар и не возвращается в урну. Какова вероятность извлечь после этого черный шар? белый?

1.52. В урне находится 10 шаров: 2 белых, 4 черных, 1 красный и 3 синих. Найдите вероятность появления белого, или черного, или красного шара при однократной операции изъятия шара из урны. Укажите разные способы решения. Используйте понятие «противоположные события».

1.53. В некоторую больницу поступают пациенты с четырьмя видами болезней. Многолетние наблюдения показывают, что этим группам заболеваний соответствуют вероятности: 0,1; 0,4; 0,3 и 0,2. Для лечения заболеваний с вероятностью 0,1 и 0,2 необходимо переливание крови. Какое количество больных следует обеспечить кровью, если в течение месяца поступило 1 000 больных?

1.54. На странице книги имеется 2 500 букв. Буква «а» встречается 190 раз. Какова вероятность того, что случайно выбранная буква идет буквой «а»? Какова вероятность того, что случайно выбранная буква не есть «а»?

1.55. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вынимания черного шара равна $^1/_6$? Сколько белых шаров в урне?

1.56. Какова вероятность того, что при случайном сочетании цифр 1, 2 и 3 получится число 123? не получится числа 123?

1.57. В урне имеется 1 черный и 4 белых шара. Шары по одному вынимаются из урны и обратно не возвращаются. Укажите, чему равны вероятности вынуть черный шар при первом, втором и т. д. изъятии. Рассмотрите два варианта: а) черный шар оказывается последним; б) черный шар вынимается третьим.

1.58. В каждой из двух урн имеется по 2 черных и 3 белых шара. Какова вероятность одновременного вынимания из каждой урны по черному шару? по белому?

1.59. Какова вероятность того, что в результате бросания игральной кости 6 раз подряд выпадут единицы?

1.60. Какова вероятность того, что в результате бросания игральной кости шесть раз подряд выпадут следующие последовательности цифр: 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

1.61. Какова вероятность того, что в результате бросания игральной кости 6 раз подряд выпадут только четные числа?

1.62. Найдите вероятность того, что в семьях из двух детей оба ребенка: а) мальчики, б) девочки, в) один ребенок — мальчик, другой — девочка. Считать, что вероятность рождения мальчика равна 0,515 и пол каждого последующего ребенка не зависит от пола предыдущих детей.

1.63. Какова вероятность того, что в коллективе из 200 человек у двух лиц дни рождения совпадают?

1.64. В урне 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Найдите вероятность того, что последовательно один за другим будут вынуты шары: а) черный и белый; б) белый и черный.

1.65. В урне 8 шаров: 3 белых и 5 черных. Найдите вероятность того, что последовательно один за другим будут вынуты два черных шара? два белых шара?

1.66. Исходя из многолетних наблюдений, вызов врача в некоторый дом оценивается вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что из пяти вызовов врача два вызова будут в данный дом.

1.67. Из десяти облигаций в тираже в среднем выигрывает одна. Какова вероятность того, что из двадцати облигаций выиграет только одна?

1.68. Используя условие задачи **1.67**, найдите вероятность того, что из десяти облигаций выиграет только одна? Поясните, почему в этом случае вероятность больше, чем в задаче **1.67**?

1.69. Найдите вероятность того, что из четырех облигаций выиграет: а) только одна; б) по крайней мере одна. Вероятность выигрыша отдельной облигации равна 0,1.

1.70. Установлено, что лица из определенной группы людей заболевают в среднем два раза в году. Считая, что каждое заболевание имеет продолжительность 10 дней, получаем $365 - 2 \cdot 10 = 345$ дней, когда человек здоров. Таким образом, можно оценить вероятность заболевания одного человека как $P = 2/345 = 0{,}0058$. Какова вероятность того, что из 10 человек сегодня заболеют трое? Заболевания в этой задаче рассматриваются как независимые события (без учета заражения).

1.71. Найдите распределение случайной величины, образующейся при бросании правильного однородного тетраэдра (см. рис. 1.2 к задаче **1.44**) с пронумерованными гранями 1, 2, 3 и 4. Проверить, выполняется ли условие нормировки.

1.72. Укажите распределение случайной величины, соответствующей выпаданию одной из двух сторон подброшенной монеты. Проверить, выполняется ли условие нормировки.

1.73. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, распределенной по условию задачи **1.71**.

1.74. Случайная величина представлена следующим законом распределения:

X	1	4	6	7
P	0,1	0,2	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

1.75. Случайная величина задана законом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2

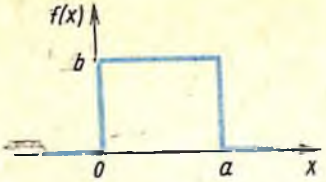


Рис. 1.3

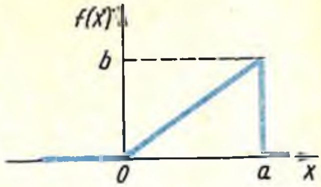


Рис. 1.4

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Дисперсию вычислить двумя способами: по формулам (1.65) и (1.66):

1.76. График функции распределения веростностей изображен на рис. 1.3: $f(x)=b\,(0<x<a)$, $f(x)=0\ (x\leqslant 0,\ x\geqslant a)$. Найдите связь между a и b.

1.77. График функции распределения вероятностей изображен на рис. 1.4. Найдите связь между a и b.

1.78. Плотность вероятности задана законом

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x\,(0<x<\pi), \\ 0\,(x\leqslant 0,\ x\geqslant \pi). \end{cases}$$

Найдите a.

1.79. График функции распределения соответствует полуокружности радиуса R (рис. 1.5). Чему равен этот радиус?

1.80. Найдите функцию распределения непрерывной случайной величины, соответствующей задачам **1.76—1.78.**

1.81. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, представленной графиком на рис. 1.3.

1.82. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, представленной графиком на рис. 1.4.

1.83. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, график функции распределения вероятностей которой изображен на рис. 1.6.

1.84. Нормальный закон распределения задан в форме уравнения (1.73), причем математическое ожидание равно нулю ($a=0$). Какова вероятность того, что случайная величина имеет значения $x\leqslant 0$? $x\geqslant 0$?

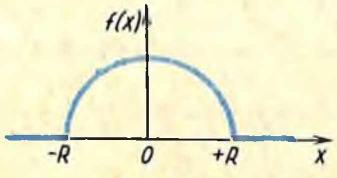


Рис. 1.5

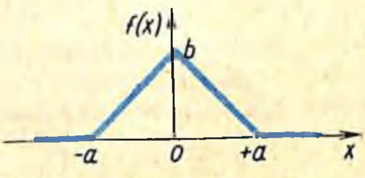


Рис. 1.6

1.85. Нормальный закон распределения задан в форме уравнения (1.73). Какова вероятность того, что случайная величина принимает значения $x<a$? $x>a$?

1.86. В нормальном законе распределения $a=2$; $\sigma=4$. Чему равно x, если вероятность того, что случайная величина принимает значения меньше x, равна $^3/_4$?

1.87. Нормальный закон распределения представлен графически симметрично относительно $x=0$ (см. рис. 1.6). Найдите вероятность того, что случайная величина принимает значения: а) $-\sigma<x<\sigma$; б) $-2\sigma<x<2\sigma$; в) $-3\sigma<x<3\sigma$.

1.88. Покажите, что для функции (1.75) выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ для } a>0.$$

1.89. Принимая для воздуха $M=0{,}029$ кг/моль, определите среднюю квадратичную скорость его молекул при $t=0°C$.

1.90. Определите среднюю и наивероятнейшую скорости молекул кислорода при $t=132°C$.

1.91. Какая температура соответствует средней квадратичной скорости молекул углекислого газа, равной $v_{кв}=1720$ км/ч?

1.92. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна средней квадратичной скорости молекул азота при $t=27°C$?

1.93. Определите среднюю квадратичную, среднюю и наивероятнейшую скорости молекул водорода при $t=27°C$?

1.94. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наивероятнейшей скорости на 100 м/с?

1.95. Найдите число молекул азота, находящихся при нормальных условиях в 1 м^3 и обладающих скоростью между: а) 99 и 101 м/с; б) 499 и 501 м/с.

1.96. Какая доля молекул кислорода обладает скоростью, лежащей между 790 и 800 м/с при температуре $t=27°C$?

1.97. Во сколько раз изменится давление воздуха при подъеме на высоту $h=20$ км, если средняя температура $t=0°C$?

1.98. На сколько различаются высоты двух уровней в поле Земли, если концентрация кислорода O_2 на верхнем уровне на 1% меньше, чем на нижнем. Температура кислорода $t=27°C$?

1.99. На какой высоте концентрация молекул кислорода и азота вдвое меньше их концентрации на уровне моря? Считать температуру всюду одинаковой и равной $t=27°C$?

1.100. Закрытый сосуд высотою $h=10$ м с газообразным кислородом движется ускоренно в вертикальном направлении в гравитационном поле Земли. Концентрации молекул кислорода в нижней и верхней частях сосуда отличаются на 1%. Температура газа $t = -73°C$. Найдите ускорение сосуда в двух случаях движения: а) вверх; б) вниз.

1.101. Рост 30 мальчиков в возрасте 2 лет (в см) равен: 92, 91, 96, 93, 97, 93, 91, 92, 90, 97, 95, 94, 92, 98, 96, 90, 95, 93, 94, 89, 91, 89, 96, 94, 94, 92, 93, 95, 87, 94. Ранжируйте этот ряд в возрастающем порядке значений и укажите их повторяемость, т. е. частоту или относительную частоту. Как называют такое статистическое распределение в медицинской литературе? Укажите моду, медиану и среднее арифметическое значение полученного статистического ряда.

1.102. Представьте данные задачи **1.101** в виде непрерывного (интервального) статистического распределения.

1.103. Постройте полигон частот для данных задачи **1.101** и гистограмму частот по данным задачи **1.102.**

1.104. В строках этой и предыдущей страницы подсчитайте число букв «а». Составьте простой статистический ряд, ранжируйте его, получите вариационный ряд. Укажите моду, медиану и среднее число букв «а» в одной строке. Постройте полигон частот. Выполните это задание и для других букв.

1.105. При измерениях получены следующие значения некоторых величин: а) 19, 20, 21; б) 37, 38, 37, 39, 40; в) 3, 2, 3; г) 4, 5, 6, 4. Дайте интервальную оценку истинного значения измеряемой величины, рассматривая полученные значения как малую выборку. Доверительную вероятность принять равной 0,95 и 0,99.

1.106. При измерениях в однородных группах обследуемых получены следующие выборки: а) 36,7; 36,9; 36,8 (температура тела в градусах Цельсия); б) 71, 70, 74 (частота пульса); в) 12, 14, 12 (частота дыхания). Дайте интервальную оценку среднего значения соответствующей величины. Доверительную вероятность принять равной 0,95 и 0,98.

1.107. Считая вашу студенческую группу малой выборкой, найдите интервальную оценку роста студентов (отдельно по девушкам и юношам) с доверительной вероятностью 0,95 и 0,99.

1.108. Используя условие задачи **1.107** определите интервальную оценку частоты пульса.

1.109. Для определения показателя некоторого физиологического параметра обрабатывают выборочную совокупность, при этом получают $\sigma_в = 0{,}3$, $\varepsilon \leqslant 0{,}01$. Каким должен быть объем выборки при доверительной вероятности 0,95 и 0,99?

1.110. Какой следует взять объем малой выборки, чтобы при доверительной вероятности 0,95 получить интервальную оценку 70 ± 1, если среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = 0{,}54$?

§ 1.8. Алгоритмизация и программирование

Алгоритм — точное предписание (перечень команд), которое задает вычислительный процесс, направленный на получение из некоторых конкретных исходных данных полностью определяемого этими данными результата. Алгоритм должен иметь смысл для достаточно широкого набора исходных данных, выполняться однозначным образом и за конечное число шагов приводить к конечному результату. При изображении алгоритмов в виде схем используют условные обозначения, приведенные на рис. 1.7.

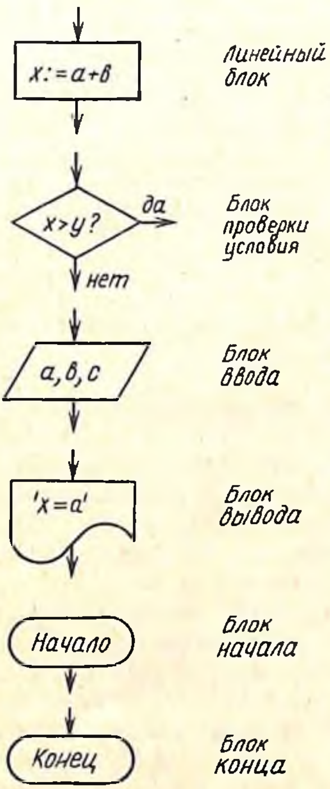


Рис. 1.7

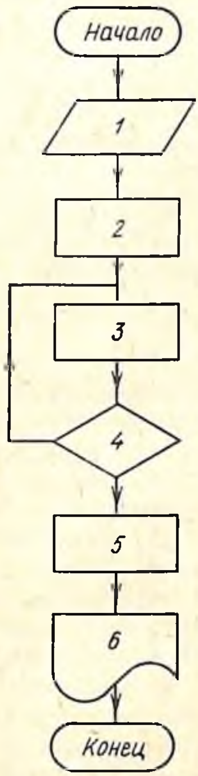


Рис. 1.8

2—1680

Пример

Составить алгоритм вычисления значения функции

$$y = ax^n + b, \tag{1.85}$$

где a и b — заданные параметры, n — целая величина ($n \geqslant 1$), x — аргумент. Нарисовать схему в стандартных обозначениях.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.8. Функции блоков алгоритма следующие:

1. Ввести значения x и n (значения a и b уже предусмотрены в программе).
2. Положить y равным a, а вспомогательную переменную $k = 1$.
3. Принять y равным прежнему значению y, умноженному на x, а k равным прежнему значению k, увеличенному на единицу.
4. Сравнить k с n, если $k < n$, перейти к п. 3.
5. Положить y равным сумме y и b.
6. Вывести на печать результаты вычислений.

1.111. Значение переменной y определяется по формулам

$$y = \begin{cases} F_1(x), & \text{если } b \leqslant x, \\ F_2(x), & \text{»} \quad a \leqslant x < b, \\ F_3(x), & \text{»} \quad x < a. \end{cases} \tag{1.86}$$

Составьте блок-схему алгоритма, предусматривающую ввод аргумента x, расчеты (вид функций F_i и параметров a и b считать заданными) и вывод результатов на печать.

1.112. Значение факториала $y = n!$ равно произведению всех целых чисел от единицы до данного:

$$y = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \tag{1.87}$$

Для отрицательных чисел $n!$ неопределен, а

$$0! = 1! = 1. \tag{1.88}$$

Составьте блок-схему алгоритма для вычисления факториала целого числа.

1.113. Составьте структурную схему алгоритма, описывающего поведение человека при входе в метро. В линейных блоках предусмотрите действия типа: «опустить жетон (монету 5 коп.)», «приобрести проездной», а в блоках ветвления: «наличие денег», «наличие жетона» и т. п.

1.114. Составьте упрощенную структурную схему алгоритма диагностики и лечения острого респираторного заболевания. В качестве переменных используйте значение температуры больного и сведения о симптомах: головная боль, кашель, насморк (любые другие по усмотрению студента), закодированные по системе: да — 1, нет — 0. Предусмотрите вывод на печать сообщений типа: «пациент здоров», «поставьте горчичники», «примите аспирин».

Задачи на применение языка Бейсик

Пример

Тело брошено из некоторой точки с координатами $x_0 = 3{,}0$ м и $y_0 = 1{,}5$ м со скоростью $v_0 = 2{,}4$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Составить программу для нахождения его координат x_t и y_t по истечении времени t после броска. Для расчетов воспользоваться формулами:

$$x_t = x_0 + v_0 \cos \alpha t,$$
$$y_t = y_0 + v_0 \sin \alpha t - gt^2/2. \qquad (1.89)$$

Решение

```
1Ø READ G,XØ,YØ,V,A
2Ø DATA 9.81,3.Ø,1.5,2.4,3Ø.Ø
3Ø A=A*PI/18Ø
4Ø PRINT 'ВВЕДИТЕ ВРЕМЯ В СЕК'
45 INPUT T
5Ø S=SIN (A)
6Ø C=COS(A)
7Ø X1=XØ+V*C*T
8Ø Y1=YØ+V*S*T-Ø.5*G*T*T
9Ø PRINT' КООРДИНАТЫ ТОЧКИ'
1ØØ PRINT'XT= 'X1' YT='Y1
11Ø END
```

В программе предусмотрено присвоение начальных значений g, x_0, y_0, v и α соответствующим именам переменных, записанным прописными буквами в соответствии с требованиями языка. Угол переводится в радианную меру, так как этого требуют встроенные функции SIN (X) и COS (X). Оператор INPUT обеспечит выдачу запроса «введите время в секундах», после чего счет будет приостановлен и программист сможет ввести необходимое число в ЭВМ. После расчетов по формуле (1.89) на печать будут выведены значения x_t и y_t с необходимыми текстовыми комментариями.

1.115. Укажите, какие из приведенных ниже имен переменных записаны с соблюдением, а какие с нарушением правил Бейсика, и почему?

1) X	6) 5T	11) Ж7
2) Z	7) W+	12) 24
3) ALFA	8) MA	13) N
4) Q3	9) K6	14) Ø
5) AB 8	10) UGOL	15) R1

1.116. Укажите какие из приведенных ниже чисел соответствуют правилам языка:

1) 3,14159	4) 45'3Ø"	7) —Ø.ØØ346
2) 1.414	5) —Ø.5E+6	8) $3 \cdot 10^6$
3) 3Ø : 15,8	6) 284.595	9) 1,256*E8

1.117. Запишите в соответствии с правилами Бейсика числовые значения фундаментальных констант с точностью до трех значащих цифр в СИ: 1) скорость света в вакууме; 2) постоянную Больцмана; 3) основание натуральных логарифмов; 4) магнитную постоянную.

1.118. Некоторая масса газа при температуре 0°C и давлении 10^5 Па имеет объем 1 м^3. Составьте программу, которая вычисляла бы объем газа при любых других значениях давления и температуры. Воспользоваться уравнением состояния идеального газа

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}. \qquad (1.90)$$

1.119. Составьте программу, которая обеспечивала бы ввод трех произвольных чисел a, b и c и выводила бы их на печать в порядке возрастания.

1.120. Составьте программу, которая вычисляла бы значения многочлена

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (1.91)$$

и его первой и второй производных:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2, \qquad (1.92)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x \qquad (1.93)$$

для аргумента x, изменяющегося от 0 до 1 с шагом 0,1. Предусмотрите вывод результатов расчетов в виде таблицы.

Задачи на применение языка Фортран

Пример

Составить программу для нахождения среднего арифметического и дисперсии набора из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Воспользоваться формулами

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (1.94)$$

Какие ошибки сделал оператор микроЭВМ?

$$d_x=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\langle x\rangle - x_i)^2}{n-1}} \qquad (1.95)$$

Решение

```
      DIMENSION X(1ØØ)
      REAL X,SRX,DISP,S,R
      INTEGER N,I,J,K
      WRITE(5,1)
    1 FORMAT('ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ДАННЫХ')
      READ(5,2) N
    2 FORMAT(I3)
      WRITE(5,3)
    3 FORMAT('ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ')
      DO 4 I=1,N
      READ(5,5) X(I)
    4 CONTINUE
    5 FORMAT(E1Ø.3)
      IF (N-2) 6,7,8
    6 WRITE(5,9)
    9 FORMAT('МАЛО ДАННЫХ')
      GOTO 1Ø
    7 SRX=Ø.5*(X(1)+X(2))
      DISP=Ø.Ø
      GOTO 11
    8 S=Ø.Ø
      DO 12 J=1,N
   12 S=S+X(J)
      SRX=S/FLOAT(N)
      R=Ø.Ø
      DO 13 K=1,N
   13 R=R(X(K)-SRX)* *2
      DISP=SQRT(R/FLOAT(N-1))
   11 WRITE(6,14) N,SRX,DISP
   14 FORMAT('N=',I3,'X=',E12.3,'D=',E12.3)
   1Ø STOP
      END
```

В операторах READ и WRITE первая цифра 5 означает ввод и вывод информации через терминал, а цифра 6 — вывод результатов на алфавитно-цифровое печатающее устройство (АЦПУ). Такая символика соответствует принятой на ЕС ЭВМ, а на других ЭВМ может отличаться. Операторы описания, применяемые в Фортране (в отличие от Паскаля), не являются обязательными, но здесь приведены.

Согласно программе ЭВМ запрашивает программиста об общем количестве данных и просит его последовательно вводить x_i с терминала при помощи цикла DO 4. Условный оператор IF передает управление на метку 6, если $n=0,1$ или отрицательно, на метку 7, если $n=2$, и на метку 8, если $n \geqslant 3$. В первом случае ЭВМ выдает сообщение «мало данных» и прекращает выполнение программы, во втором — считает среднее арифметическое из двух чисел, а дисперсию полагает равной нулю. В третьем — производит расчет по формулам (1.94) и (1.95). Для суммирования используются циклы DO 12, DO 13 и вспомогательные переменные S и R. Программу завершает вывод данных с необходимыми текстовыми комментариями.

1.121. Укажите, какие из приведенных ниже записей можно рассматривать как идентификаторы, а какие нельзя:

1) XO25Y	6) 25763A	11) PETROV∅2
2) 4ABO6A	7) LAM+OL	12) Z
3) AO.4B	8) AB2∅3C	13) .ZET
4) KOLA1	9) A/BC	14) ROT—F
5) Ia23	10) IBM36∅	15) DEMIS

1.122. Какие из приведенных ниже идентификаторов указывают (по умолчанию), что описываемая ими переменная имеет вещественный тип, а какие — целый?

1) RUSS	4) QATR	7) BOBIK
2) IVA	5) NATA25	8) MASHA
3) FORT3	6) A9	9) LITTLE

1.123. Запишите в соответствии с правилами языка числовые значения фундаментальных констант с точностью до трех значащих чисел в СИ: 1) постоянную Авогадро; 2) молярную газовую постоянную; 3) гравитационную постоянную; 4) число π.

1.124. Расшифруйте следующие обозначения, встречающиеся в операторе FORMAT при вводе:

1) I3	6) 3(F6.2)
2) F8.4	7) F1∅.5
3) E12.4	8) I5
4) 6X	9) 2(E12.3,2X)
5) /	

1.125. Расшифруйте следующие обозначения, встречающиеся в операторе FORMAT при выводе:

1) I3	6) 3(F6.2,2X)
2) F8.3	7) 7HТАБЛИЦА
3) E1∅.2	8) 'РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ'
4) 1∅X	9) 'X=',E12.3
5) /	

1.126. Напряженность поля точечного заряда в среде

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (1.96)$$

Составьте программу, предусматривающую ввод значений Q, ε и r и нахождение E (в единицах СИ).

1.127. Имеется совокупность из n экспериментальных точек, значения абсцисс x_i и ординат y_i которых заданы. Составьте программу для нахождения параметров a_0 и a_1 линии регрессии, т. е. прямой, подчиняющейся уравнению

$$y = a_0 + a_1 x \tag{1.97}$$

и оптимальным образом описывающей экспериментальные точки. По методу наименьших квадратов параметры a_0 и a_1 — суть решения системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 n + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{1.98}$$

Для решения системы линейных уравнений по правилу Крамера оформите отдельный программный модуль (подпрограмму-процедуру).

Задачи на применение языка Паскаль

Пример

Найти значение интеграла

$$S = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \tag{1.99}$$

в числовом виде с помощью формулы Симпсона:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{f_0}{2} + 2f_1 + f_2 + 2f_3 + \ldots + f_{n-2} + 2f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right). \tag{1.100}$$

где $f_k = f(x_k)$; $x_k = a + kh$; $h = \dfrac{b-a}{n}$; $f_0 = f(a)$; $f_n = f(b)$ и n — четное. Интеграл приближенно равен конечной сумме при некотором достаточно большом числе n разбиений.

Решение

```
PROGRAM INTEGR;
CONST
        N=5Ø;
        NACH=1.ØE-Ø4;
        KON=1Ø.Ø;
VAR
        K : REAL;
FUNCTION Q(T : REAL) : REAL;
        BEGIN
                Q : =T*SQR(T)/(EXP(T)-1)
        END;
FUNCTION SIMP(FUNCTION F:REAL;A,B:REAL;N:INTEGER):REAL;
VAR
```

```
SUM,H:REAL;
K:INTEGER;
     BEGIN
          H:=(B—A)/N;
          SUM:=Ø.5*(F(A)—F(B));
          FOR K:=1 TO N—1 DO
               SUM:=SUM+(KMOD2+1)*F(A+K*H);
          SIMP:=2*H*SUM/3.
     END;
S=SIMP(Q,NACH,KON,N);
WRITELN('ИНТЕГРАЛ РАВЕН',S)
END.
```

Программа состоит из главного модуля и двух вспомогательных (функций). В отличие от Фортрана главная часть может замыкать программу. Пределы интегрирования NACH и KON выбраны конечными, поскольку при $x=0$ имеем неопределенность вида 0/0, а при $x>10$ подынтегральное выражение меньше 0,05, т. е. практически равно нулю.

Описание типов всех переменных здесь строго обязательно. В функцию SIMP с помощью механизма формальных и фактических параметров пересылаются не только простые переменные или массивы, но и некоторые другие функции. Благодаря этому программа имеет универсальный характер: можно интегрировать различные функции.

В формуле (1.100) четные и нечетные слагаемые f_k отличаются коэффициентом (1 или 2). В программной реализации метода это осуществляется с помощью фрагмента K MOD 2, который равен нулю при четных k и единице — при нечетных.

1.128. Укажите, какие из приведенных ниже записей можно рассматривать как идентификаторы переменных и какие нельзя:

1) HOCKEY
2) 4RED
3) A+B
4) Y
5) X2YZ
6) HE IS
7) SIN
8) IBM36Ø
9) A1256

1.129. Найдите ошибки в записи чисел на Паскале:

1) 5
2) Ø.65
3) —E12
4) Ø5
5) 124.162.772
6) —5E—Ø2
7) .65
8) —5.EØ2
9) +73
10) —72683
11) 15Ø.Ø
12) 5.
13) E—Ø5
14) 1.7E2
15) 3,14159

1.130. Расшифруйте следующие обозначения, встречающиеся в операторах ввода и вывода:

1) READ(X,Y);
2) READLN;
3) READLN(Z);
4) WRITE(X,Y,Z);
5) WRITELN;
6) WRITELN(Q);

```
7) WRITELN(A:8);
8) WRITELN(D:1Ø:3);
9) WRITELN('ИСКОМОЕ ЧИСЛО',Y:M:N);
```

1.131. Амплитуда a вынужденных колебаний зависит от частоты ω вынуждающей силы:

$$a=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}, \qquad (1.101)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний системы; β — коэффициент затухания; f — амплитудный множитель. Составьте программу для расчета значений a при частотах, изменяющихся от ω_{min} до ω_{max} с шагом $\Delta\omega$. Предусмотрите вывод результатов вычислений на печать в виде таблицы.

1.132. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта можно получить скорость вылета электрона (заряд e, масса m) с поверхности металла (работа выхода A) под действием света с длиной волны λ:

$$v=\sqrt{\frac{2(hc/\lambda-A)}{m}}, \qquad (1.102)$$

где h — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме. Составьте программу для нахождения скорости электрона в зависимости от названия металла и длины волны света [λ в нм]. Предусмотрите ввод материала фотоэлемента в виде символьной переменной из семи букв из числа следующих: рубидий (работа выхода 1,53 эВ), литий (2,40), цинк (3,74). Значения всех остальных констант взять из таблиц.

Задачи на применение языка Искра-1256

Пример

Составить программу для нахождения действительных корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1.103)$$

Воспользоваться формулами:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases} \qquad (1.104)$$

Решение

```
1  СЕЛЕКТ (3,5,64)
2  ПЕЧАТЬ ("ВВЕДИТЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ A, B, C",)
3  Н=>AØ1
4  Н=>AØ2
```

```
H=>A∅3
A∅2∧2−4 *A∅1 *A∅3=>A∅4
СЕЛЕКТ(3,12,8∅)
A∅4 <∅ПЕРЕХ M∅1
A∅4=∅ПЕРЕХ M∅2
(A∅4)SQR=>A∅5
∅.5*(A∅2 3H+A∅5)/A∅1=>A∅6
∅.5*(A∅2 3H−A∅5)/A∅1=>A∅7
ПЕЧАТЬ ("КОРНИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ",)
ПЕЧАТЬ ("X1=",A∅6,"X2=",A∅7,)
ПЕРЕХ M∅3
M∅1
ПЕЧАТЬ ("КОРНИ КОМПЛЕКСНЫЕ",)
ПЕРЕХ M∅3
M∅2
∅.5*A∅2 3H/A∅1=>A∅6
ПЕЧАТЬ ("КОРНИ ОДИНАКОВЫ",)
ПЕЧАТЬ ("X1=X2=",A∅6,)
M∅3
```

Цифровые значения вводятся с помощью оператора Н. Особенностью данного языка является то, что в символе => («положить равным») имя переменной размещается справа, а арифметическое выражение или число — слева. Символы элементарных функций также располагаются необычно: справа от аргумента, а не слева, как в Фортране, Бейсике или Паскале. Операторы условного и безусловного перехода аналогичны другим языкам. Метки занимают специальный оператор.

1.133. Укажите, какие из приведенных ниже записей могут служить именами переменной, а какие — нет:

1) A15
2) X
3) И31
4) Y∅5
5) CA∅9
6) AИ25
7) ZET
8) ALFA
9) CAИ19

1.134. Объясните назначение операторов СЕЛЕКТ:

1) СЕЛЕКТ(∅,3,∅)
2) СЕЛЕКТ (3,12,8∅)
3) СЕЛЕКТ (1,2∅,12)
4) СЕЛЕКТ (2,8,32)
5) СЕЛЕКТ (∅,1,∅)
6) СЕЛЕКТ (3,5,64)

1.135. Составьте программу для нахождения объема цилиндра радиусом R и высотой H по формуле

$$V=\pi R^2 H. \qquad (1.105)$$

1.136. Смоделируйте с помощью ЭВМ координаты точек фигуры Лиссажу. Для этого составьте программу, которая осуществляла бы расчет по формулам:

$$\begin{cases} x=\sin(\omega t), \\ y=\sin(k\omega t+\varphi). \end{cases} \qquad (1.106)$$

для $\omega=1$ и значений t, изменяющихся от 0 до 2π с шагом $0{,}04\pi$. Отладьте программу, произведите расчеты для значений k, равных 0,5; 1; 1,5; 2 и для φ, равных 0, 45°, 90°. Отложите на графике точки, абсцисса и ордината которых соответствует одинаковому моменту времени, и соедините их плавной кривой.

Механика. Акустика

Глава вторая

§ 2.1. Вращательное движение. Законы биомеханики

Связь между линейными и угловыми характеристиками во вращательном движении

$$ds_i = r_i d\varphi, \tag{2.1}$$

где r_i — расстояние (модуль радиуса-вектора) i-й точки тела от оси вращения; ds_i — длина траектории (дуги), соответствующей повороту радиуса-вектора на угол $d\varphi$.
Скорость (линейная) i-й точки

$$v_i = r_i \omega, \tag{2.2}$$

где ω — угловая скорость.
Нормальная составляющая ускорения i-й точки

$$a_{ni} = v_i^2 / r_i = r_i \omega^2. \tag{2.3}$$

Тангенциальная (касательная) составляющая ускорения i-й точки

$$a_{\tau i} = r_i \varepsilon, \tag{2.4}$$

где ε — угловое ускорение.
Полное ускорение (линейное) i-й точки

$$a_i = r_i \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{2.5}$$

Момент инерции i-й материальной точки массой m_i относительно оси вращения

$$J_i = m_i r_i^2. \tag{2.6}$$

Момент инерции тела относительно оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \quad \text{или} \quad J = \int_V r^2 \rho dV, \tag{2.7}$$

где интеграл берется по всему объему V тела; N — общее число материальных точек, из которых состоит тело; ρ — плотность тела.

Теорема Гюйгенса

$$J=J_0+md^2, \tag{2.8}$$

где J — момент инерции тела массой m относительно некоторой оси; J_0 — момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела; d — расстояние между двумя параллельными осями.

Момент инерции различных однородных тел массой m относительно оси, проходящей через центр масс:

шара радиусом R

$$J={}^2/_5 mR^2; \tag{2.9}$$

цилиндра с внутренним радиусом r и внешним R (ось вращения совпадает с геометрической осью цилиндра)

$$J={}^1/_2 m(r^2+R^2). \tag{2.10}$$

В частном случае момент инерции:

тонкостенного цилиндра ($R\approx r$)

$$J=mR^2; \tag{2.11}$$

сплошного цилиндра ($r=0$)

$$J={}^1/_2 mR^2; \tag{2.12}$$

тонкого стержня длиной l (ось вращения проходит перпендикулярно стержню через его середину)

$$J={}^1/_{12} ml^2. \tag{2.13}$$

Момент импульса (момент количества движения) материальной точки

$$L=m_i v_i r_i. \tag{2.14}$$

Момент импульса тела

$$L_i=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i r_i=J\omega. \tag{2.15}$$

Элементарная работа во вращательном движении

$$\mathrm{d}A=M\mathrm{d}\varphi, \tag{2.16}$$

где M — момент силы, приложенной к телу.

Работа силы при вращательном движении

$$A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi. \tag{2.17}$$

где углы φ_1 и φ_2 соответствуют начальному и конечному положениям радиуса-вектора любой точки твердого тела.

Кинетическая энергия вращающего тела

$$E_к = {}^1/_2 J\omega^2. \quad (2.18)$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, при поступательном движении оси со скоростью v

$$E_к = {}^1/_2 J\omega^2 + {}^1/_2 mv^2. \quad (2.19)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$\varepsilon = M/J \quad (2.20)$$

или

$$M = \frac{dL}{dt}, \quad (2.21)$$

где M — равнодействующий момент сил, приложенных к телу.

Закон сохранения момента импульса

$$L = \mathrm{const} \text{ при } M = 0. \quad (2.22)$$

Сила, действующая на частицу со стороны окружающей жидкости, при центрифугировании

$$F_1 = \rho_0 V\omega^2 r, \quad (2.23)$$

где ρ_0 — плотность жидкости, V — объем частицы, ω — угловая скорость вращения, r — расстояние частицы от оси вращения.

Сила, действующая на частицу при ее движении по окружности,

$$F = \rho_1 V\omega^2 r, \quad (2.24)$$

где ρ_1 — плотность вещества частицы. При $F_1 \neq F$ происходит перемещение частицы в направлении к оси вращения (при $F_1 > F$) или от оси (при $F_1 < F$).

2.1. Число оборотов ротора центрифуги достигает $n = 2 \times 10^4$ об/мин. После отключения двигателя вращение прекращается через $t = 8$ мин. Найдите угловое ускорение и зависимость угла поворота центрифуги от времени, считая движение равнопеременным. Указать направления векторов ω и ε.

2.2. Уравнение вращательного движения твердого тела имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ рад, $B = 3$ рад/с, $C = 1$ рад/с^3. Найдите: 1) угол φ, угловую скорость ω и угловое ускорение ε в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 4$ с; 2) среднюю угловую скорость $\langle\omega\rangle$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

2.3. Угловая скорость вращающегося тела изменяется по закону

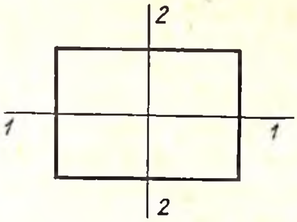


Рис. 2.1

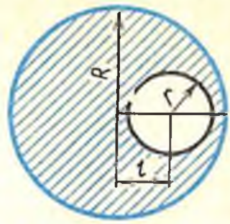


Рис. 2.2

$\omega = At + Bt^2$, где $A = 2$ рад/с^2, $B = 3$ рад/с^3. На какой угол повернулось тело за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с?

2.4. Рассчитайте момент инерции однородного кольца массой $m = 1$ кг относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии. Внутренний радиус кольца $R_1 = 10$ см, внешний радиус $R_2 = 30$ см.

2.5. Найдите моменты инерции однородного стержня длиной l и массой m относительно осей вращения, перпендикулярных стержню и проходящих через его середину и конец. Проверьте на этом примере выполнение теоремы Гюйгенса.

2.6. Тонкая однородная прямоугольная пластинка (рис. 2.1) массой $m = 0{,}6$ кг имеет размеры: $a = 12$ см, $b = 10$ см. Определите моменты инерции этой пластинки относительно осей *1—1* и *2—2*, проходящих через центр масс пластинки.

2.7. Прямолинейная однородная проволока длиной l и массой m согнута так, что точка перегиба делит проволоку на две части, длины которых относятся как 1 : 2. Чему равен момент инерции проволоки относительно оси вращения, проходящей через точку перегиба и перпендикулярной плоскости проволоки?

2.8. Представляя тело человека в виде цилиндра, радиус которого $R = 20$ см, высота $h = 1{,}7$ м и масса $m = 70$ кг, определите момент инерции человека в положении стоя и лежа относительно вертикальной оси, проходящей через центр цилиндра (приблизительно через центр масс человека).

2.9. Определите момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, если в диске сделан вырез в виде круга радиуса $r = 0{,}3$ м, центр которого находится на расстоянии $l = 0{,}5$ м от центра диска (рис. 2.2). Масса диска $m = 10$ кг, радиус $R = 1$ м.

2.10. Используя условие задачи **2.9**, определите момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр выреза.

2.11. Человек с опущенными руками, момент инерции которого $J_1 = 1{,}2$ кг·м^2, стоит в центре легкой вращающейся платформы. Какой момент силы сообщает человеку угловое ускорение $\varepsilon = 0{,}3$ рад/с^2? Какое угловое ускорение будет иметь человек, если при том же моменте силы его руки займут горизонтальное положение, а момент инерции при этом $J_2 = 2{,}5$ кг·м^2? Массой платформы и трением пренебречь.

2.12. Две гири массой $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Масса блока $M = 2$ кг. Найдите силы натяжения T_1 и T_2 нитей и ускорение a, с которым движутся гири.

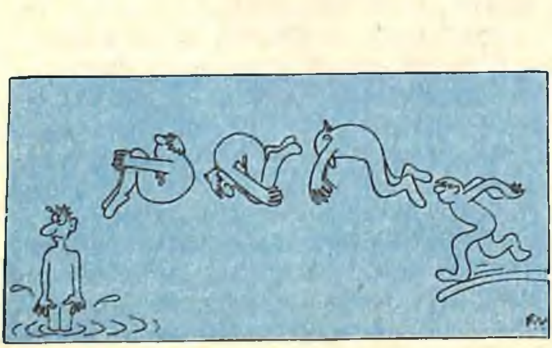
2.13. Два одинаковых маховика были раскручены до частоты вращения $n = 480$ мин$^{-1}$ и предоставлены самим себе. Под действием трения валов о подшипники первый маховик остановился через $t_1 = 1$ мин 20 с, второй маховик до полной остановки сделал $N_2 = 240$ оборотов. Считая, что момент силы трения в обоих случаях постоянен, определите, во сколько раз момент сил трения одного маховика больше другого.

2.14. Диск радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 3$ кг вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Угловая скорость диска изменяется со временем по закону $\omega = 20 + 8t$. Найдите касательную силу, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

2.15. Стержень массой $m = 6$ кг и длиной $l = 40$ см вращается вокруг оси, проходящей через его середину перпендикулярно длине стержня. Угол поворота стержня зависит от времени: $\varphi = 3t^3 - t^2 + 4t + 6$. Найдите закон, по которому изменяется со временем момент сил, действующих на стержень. Каков момент сил при $t = 3$ с?

2.16. Диск массой $m = 5$ кг и радиусом $R = 0{,}4$ м вращается с частотой $\nu = 3$ Гц. Через $t = 20$ с после начала торможения диск останавливается. Найдите момент сил торможения.

2.17. Масса руки человека равна $m = 4{,}2$ кг, длина $l = 83$ см, ее центр масс расположен на расстоянии $r = 34$ см от плечевого сустава, момент инерции руки относительно этого сустава равен $J = 0{,}3$ кг·м^2. Рука свободно, без мышечных усилий «падает» из горизонтального положения в вертикаль-



В каком положении тела момент инерции относительно оси вращения наибольший?

ное. Найдите кинетическую энергию руки и линейную скорость нижней части кисти в конце «падения».

2.18. Какую работу нужно совершить, чтобы привести во вращение сплошной однородный вал вокруг оси, совпадающей с его осью симметрии, с частотой $\nu = 3$ Гц? Масса вала $m = 30$ кг, радиус $R = 0{,}5$ м. Трением пренебречь.

2.19. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности и останавливается через $t = 7$ с. Определите расстояние, которое проходит шар до остановки, если коэффициент трения $k = 0{,}3$.

2.20. Диск скатывается с наклонной плоскости длиной $l = 7{,}5$ м. Скорость диска в конце наклонной плоскости $v = 7$ м/с. Определите угол наклона плоскости.

2.21. Какую среднюю мощность развивает человек при ходьбе, если продолжительность шага равна $\Delta t = 0{,}5$ с? Считать, что работа затрачивается на ускорение и замедление нижних конечностей. Угловое перемещение ног около $\Delta\varphi = 30°$. Момент инерции нижней конечности $J = 1{,}7$ кг·м^2. Движение ног рассматривать как равнопеременное вращательное.

2.22. Радиус вращения тренировочной центрифуги равен 5 м. Определите силу, действующую на летчика во время тренировки на такой центрифуге, если его масса 80 кг, а перегрузка составила $6g$? С какой частотой должна вращаться центрифуга для создания такой перегрузки?

2.23. Какую работу совершает человек, делая за время $T = 1$ с одно полное колебание мизинцем с углом размаха $\Delta\varphi = 60°$? Момент инерции мизинца $J = 4 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2. Считать, что работа затрачивается на ускорение и замедление мизинца, а его движение — равнопеременное вращательное.

2.24. Фигурист вращается, делая $n_1 = 6$ об/с. Как изменится момент инерции фигуриста, если он прижмет руки к груди, и при этом частота вращения станет $n_2 = 18$ об/с?

2.25. Человек стоит в центре легкой вращающейся платформы (скамья Жуковского). Момент инерции его относительно оси платформы $J_1 = 1{,}5$ кг·м^2. При раздвижении рук в горизонтальное положение момент инерции человека возрастает вдвое. Если при этом в руках человека гантели, то угловая скорость уменьшается в 4 раза. Найдите массу гантели, если начальное расстояние между гантелями $l_1 = 0{,}4$ м, а конечное $l_2 = 1{,}6$ м.

2.26. Во сколько раз изменилась кинетическая энергия системы в предыдущей задаче?

2.27. На краю горизонтальной платформы стоит человек массой $m_1 = 60$ кг. Платформа, представляющая собой круглый однородный диск массой $m_2 = 120$ кг, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, с частотой 0,1 Гц. Сколько оборотов в минуту будет делать платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать человека точечной массой.

2.28. Человек массой $m_1 = 60$ кг находится на неподвижной платформе, масса которой $m_2 = 80$ кг. Найдите частоту вращения платформы, если человек начнет двигаться по окружности радиусом $R_1 = 3$ м вокруг оси вращения. Скорость человека относительно платформы равна $v = 1$ м/с. Радиус платформы $R_2 = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

2.29. Вентилятор начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}3$ рад/с^2 и через $t_1 = 15$ с после начала вращения приобретает момент импульса $L_1 = 30$ кг$\cdot$м^2/с. Найдите кинетическую энергию вентилятора через $t_2 = 20$ с после начала вращения.

2.30. Стержень массой $m = 1$ кг, длиной $l = 50$ см может вращаться около оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. Пуля массой $m_1 = 10$ г, летящая со скоростью $v = 200$ м/с перпендикулярно оси и стержню, попадает в конец стержня и застревает в нем. Найдите частоту вращения стержня.

2.31. Тяжелоатлет поднимает штангу массой $m = 150$ кг с груди на вытянутые руки ($h = 65$ см) в течение $\Delta t = 1{,}5$ с. Какая средняя мощность при этом развивается?

2.32. Человек прыгает с высоты $h = 1$ м в одном случае на прямые ноги, а в другом — сгибая ноги в коленях. Время торможения при соприкосновении с опорой соответственно равно 0,1 и 0,5 с. Вычислите кратность перегрузок, которые при этом возникают, и длительность состояния невесомости. Сопротивлением воздуха при падении пренебречь; считать, что человек в обоих случаях при падении проходит одно и то же расстояние.

2.33. Центрифуга, используемая для тренировки космонавтов, совершает $n = 0{,}5$ об/с при радиусе траектории $R = 4$ м. Найдите угол α между вертикалью и направлением отвеса в месте расположения космонавта. Какие перегрузки при этом возникают? Установите зависимость $\alpha = f(\omega)$.

2.34. Какие перегрузки возникают в центрифуге, вращающейся вокруг вертикальной оси, при $R = 2$ м, $\nu = 0{,}34$ Гц?

2.35. Найдите силу, действующую при центрифугировании на ядра клеток печени, диаметр которых 8 мкм (принять ядра за правильные сферические частицы), плотность ядер 1 300 кг/м^3, радиус ротора центрифуги 0,05 м, частота вращения ротора 2 кГц.

2.36. Определите угловую скорость вращения ротора ультрацентрифуги, в которой под действием силы 43 нН осаждаются лизосомы. Плотность вещества лизосом 1 200 кг/м^3, радиус лизосомы 0,7 мкм, радиус ротора ультрацентрифуги 0,045 м.

§ 2.2. Механические колебания и волны. Звук

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \qquad (2.25)$$

Здесь x — смещение колеблющейся материальной точки, t — время,

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \qquad (2.26)$$

— круговая частота колебаний, где k — коэффициент квазиупругой силы ($F = -kx$), возникающей в системе при выходе ее из положения равновесия.

Решение уравнения (2.25)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (2.27)$$

где A — амплитуда колебаний, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ — фаза колебаний, φ_0 — начальная фаза колебаний ($\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$), ω_0 — круговая частота колебаний.

Период колебаний:

математического маятника

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (2.28)$$

где l — длина маятника, g — ускорение свободного падения;

пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (2.29)$$

где k — жесткость пружины;

физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)}, \qquad (2.30)$$

где J — момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса; l — расстояние между точкой подвеса и центром массы маятника.

Приведенная длина физического маятника

$$l_{пр} = J/(ml). \qquad (2.31)$$

Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= v_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \qquad (2.32)$$

где $v_{max} = A\omega_0$ — амплитуда скорости.

Ускорение материальной точки при гармонических колебаниях:

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=-a_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=$$
$$=a_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi), \qquad (2.33)$$

где $a_{max}=A\omega_0^2$ — амплитуда ускорения.

Энергия колеблющейся материальной точки:

кинетическая

$$E_к=\frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0); \qquad (2.34)$$

потенциальная

$$E_п=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0); \qquad (2.35)$$

полная

$$E=E_к+E_п=\frac{kA^2}{2}. \qquad (2.36)$$

Амплитуда сложного колебания

● $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}\ , \qquad (2.37)$$

где A_1 и A_2 — амплитуды слагаемых гармонических колебаний; φ_{01} и φ_{02} — их начальные фазы.

Начальная фаза сложного колебания

● $$\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}. \qquad (2.38)$$

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний, заданных уравнениями

$$x=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01}) \text{ и } y=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02}), \qquad (2.39)$$

получаем периодическое движение материальной точки по эллиптической траектории. В общем случае, уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01}). \qquad (2.40)$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

● $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (2.41)$$

где $\beta=r/(2m)$ — коэффициент затухания, r — коэффициент пропорциональности между скоростью материальной точки и силой трения, равной

$$F_{тр}=-rv. \qquad (2.42)$$

Решение зависит от знака разности:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \tag{2.43}$$

где ω — круговая частота затухающих колебаний.
При $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 > 0$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{2.44}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{2.45}$$

При $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 < 0$ период становится мнимым, а процесс — апериодическим.
Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \tag{2.46}$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}, \tag{2.47}$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — две последовательные амплитуды колебаний, разделенные интервалом времени, равным периоду.
Связь коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания

$$\lambda = \beta T. \tag{2.48}$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \tag{2.49}$$

где $f_0 = F_0/m$, F_0 — амплитуда вынуждающей силы.
Смещение материальной точки после установления вынужденных колебаний

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{2.50}$$

где

$$A = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \tag{2.51}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -2\beta\omega / (\omega^2 - \omega_0^2). \tag{2.52}$$

Круговая частота вынужденных колебаний при резонансе

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{2.53}$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе

$$A_{рез} = f_0 / (2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}). \tag{2.54}$$

Уравнение плоской упругой волны

$$s = A\cos\omega(t - y/v), \qquad (2.55)$$

где s — смещение колеблющихся точек в волне относительно их положения равновесия, y — координата положения равновесия какой-либо точки, v — скорость распространения волны (фазовая скорость).

Интенсивность волны (плотность потока энергии)

$$I = \omega_\rho v, \qquad (2.56)$$

где ω_ρ — объемная плотность энергии колебательного движения, v — скорость волны.

Объемная плотность энергии упругой волны, распространяющейся в веществе,

$$\omega_\rho = \rho A^2\omega_0^2/2, \qquad (2.57)$$

где ρ — плотность вещества.

Частота колебаний, воспринимаемая наблюдателем (эффект Доплера):

$$\nu' = \frac{v \pm v_н}{v \mp v_и}\nu, \qquad (2.58)$$

где $v_н$ и $v_и$ — скорости наблюдателя и источника упругой волны относительно среды, v — скорость распространения волны в этой среде, ν — частота испускаемых колебаний. Верхние знаки в (2.58) соответствуют встречному движению наблюдателя и источника, нижние — движению в противоположные стороны.

Доплеровский сдвиг частоты

$$\nu_Д = \frac{2v_0}{v}\nu, \qquad (2.59)$$

где v_0 — скорость движущегося тела, v — скорость волны (ультразвука). Формула получена в предположении $v \gg v_0$.

Связь интенсивности звука и звукового давления для плоской волны

$$I = p^2/(2\rho v), \qquad (2.60)$$

где ρ — плотность среды, в которой распространяется звук, v — его скорость.

Бел (Б) — в общем случае единица логарифмической относительной величины (логарифма отношения двух одноименных физических величин). Так, например,

$$L_Б = \lg(I/I_0), \quad I = 10^{L_Б}I_0, \qquad (2.61)$$

где $L_Б$ — выраженный в белах уровень интенсивности I звука относительно I_0, принятого за начальный уровень шкалы, или в децибелах (дБ)

$$L_{дБ} = 10\lg(I/I_0),\ I = 10^{L_{дБ}/10} I_0. \tag{2.62}$$

Из (2.60) и (2.61) следует

$$\lg\frac{I}{I_0} = \lg\frac{p^2}{p_0^2} = 2\lg\frac{p}{p_0}. \tag{2.63}$$

Считают, что шкалы громкости (E) и интенсивности звука (L) совпадают на частоте 1 кГц:

$$E_Б = L_Б = \lg(I/I_0) \tag{2.64}$$

или в фонах

$$E_ф = L_{дБ} = 10\lg(I/I_0). \tag{2.65}$$

Соответствие между интенсивностью и громкостью звука на разных частотах можно найти по кривым равной громкости (рис. 2.3).

2.37. Напишите уравнение гармонического колебания, если амплитуда ускорения $a_{max} = 50$ см/с^2, частота колебания $\nu = 0{,}5$ Гц, смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм. Найдите амплитуду скорости.

2.38. Напишите уравнение гармонического колебания, если амплитуда скорости $v_{max} = 63$ см/с, период колебаний $T = 1$ с, смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени равно нулю. Найдите амплитуду ускорения, частоту колебаний.

2.39. Маятник совершает гармонические колебания. Через какое время он при первом колебании отклонится от положения равновесия на расстояние, равное $^1/_2$ амплитуды, если период колебания $T = 4$ с, начальная фаза $\varphi_0 = \pi/2$.

2.40. Материальная точка массой $m = 2$ г совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки $x = 5$ см, скорость $v = 20$ см/с, ускорение $a = 80$ см/с^2. Найдите круговую частоту, период, фазу колебания в заданный момент времени, а также амплитуду и полную энергию колеблющейся точки.

2.41. Начальная фаза колебаний точки равна нулю, период колебания $T = 1$ с. Определите ближайшие моменты времени, в которые смещение, скорость и ускорение вдвое меньше амплитудных значений.

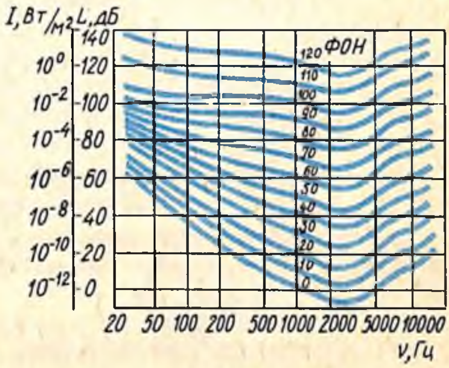


Рис. 2.3

2.42. Материальная точка массой $m=5$ г колеблется согласно уравнению $x=10\cos(2t+\varphi_0)$. Найдите максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию.

2.43. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид $0{,}2\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}8x=0$. Найдите период и частоту этих колебаний.

2.44. Пружина, к которой подвешено тело, растянулась на 4 см. Определите частоту колебаний пружинного маятника.

2.45. Тело массой $m=5$ кг совершает гармонические колебания с амплитудой $A=4$ см. Найдите период колебаний, если максимальная кинетическая энергия колеблющегося тела $E_{max}=0{,}98$ Дж.

2.46. Сплошной цилиндр высотой $h=32$ см плавает в вертикальном положении в жидкости, на $^2/_3$ погрузившись в нее. Определите период его вертикальных колебаний около положения равновесия.

2.47. Ареометр массой $m=50$ г, имеющий в верхней части цилиндрическую трубку диаметром $D=1$ см, плавает в воде. Определите частоту свободных вертикальных колебаний ареометра около его положения равновесия.

2.48. Длина столба ртути в сообщающихся трубках манометра равна $l=50$ см. Определите период собственных колебаний ртути в манометре.

2.49. Груз массой $m=200$ г подвешен к пружине с коэффициентом упругости $k=9{,}8$ Н/м. Найдите длину математического маятника, имеющего такой же период колебаний, как данный пружинный маятник.

2.50. Груз массой $m=0{,}3$ кг, подвешенный к пружине, растягивает ее на $\Delta x=2{,}2$ см. Определите кинетическую и потенциальную энергии груза через $\Delta t=3$ с после начала колебаний, если в начальный момент груз оттянут на $x_1=5$ см из положения равновесия и затем предоставлен самому себе.

2.51. Полная энергия тела массой $m=1$ кг, совершающего гармонические колебания, $E=1$ Дж, максимальная возвращающая сила, действующая на тело, равна $F_{max}=0{,}1$ Н. Напишите дифференциальное уравнение колебаний и его решение, если начальная фаза $\varphi_0=45°$.

2.52. Уравнение колебаний материальной точки массой $m=16$ г имеет вид $x=2\sin(\pi t/8+\pi/4)$ [x в см]. Определите кинетическую, потенциальную и полную энергии точки через $\Delta t=2$ с после начала колебаний.

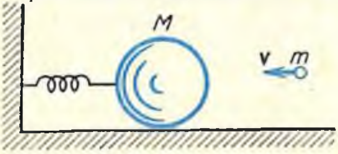


Рис. 2.4

2.53. На идеально гладком горизонтальном столе (рис. 2.4) лежит шар массой M, прикрепленный к вертикальной стойке пружиной с коэффициентом упругости k. Пуля массой m летит со скоростью v, попадает в шар и застревает в нем. Определите амплитуду возникших колебаний и период, а также максимальные значения скорости и ускорения.

2.54. Физическим маятником называют твердое тело, способное колебаться вокруг горизонтальной оси. Получите дифференциальное уравнение, описывающее малые колебания физического маятника.

Рис. 2.5

2.55. Определите момент инерции физического маятника (см. задачу **2.54**) массой $m = 20$ кг, если он совершает колебания с периодом $T = 3{,}14$ с, а расстояние от точки подвеса до центра массы $l = 1$ м (рис. 2.5).

2.56. Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого одинаков с периодом физического маятника. Определите частоту собственных колебаний ноги человека, рассматривая ее как физический маятник с приведенной длиной $l = 40$ см.

2.57. Два одинаково направленных колебания заданы уравнениями:

$$x_1 = 3\cos 5(t + 0{,}04\pi), \quad x_2 = 5\cos 5(t + 0{,}14\pi).$$

Запишите уравнение результирующего колебания.

2.58. Разложите гармоническое колебание, совершающееся по закону $x = 10\cos(6t + 0{,}2\pi)$, на два гармонических колебания той же частоты и того же направления так, чтобы начальные фазы этих колебаний были равны $\varphi_{01} = 0{,}1\pi$ и $\varphi_{02} = 0{,}5\pi$ соответственно.

2.59. Два одинаково направленных гармонических колебания с одинаковой частотой и амплитудами $A_1 = 3$ см и $A_2 = 5$ см складываются в одно гармоническое колебание с амплитудой $A = 7$ см. Найдите разность фаз складываемых колебаний.

2.60. На горизонтальный и вертикальный входы осциллографа подают соответственно напряжения $U_1 = 2\sin 5t$ и $U_2 = 2\sin(5t + \alpha)$. Определите уравнение траектории, которая описывается электронным лучом на экране осциллографа при: 1) $\alpha = \pi/2$; 2) $\alpha = \pi$.

2.61. В электронной трубке смещение пучка электронов пропорционально напряжению на отклоняющих пластинах. Найдите уравнение кривой, описываемой электронным лучом на экране трубки, если на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины поданы соответственно напряжения: $U_1=2\sin 5t$, $U_2=2\cos 5t$.

2.62. На горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются соответственно напряжения: $U_1=3\sin 2t$, $U_2=5\sin 2t$. Определите уравнение траектории, описываемой электронным лучом на экране осциллографа.

2.63. Математический маятник длиной $l=50$ см, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1=5$ см, а при втором (в ту же сторону) — на $x_2=4$ см. Найдите логарифмический декремент затухания и время релаксации (время убывания амплитуды в e раз) для этих колебаний.

2.64. За $\Delta t=10$ с амплитуда колебаний уменьшилась в e раз. Найдите коэффициент затухания этих колебаний.

2.65. Логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой $\nu=100$ Гц, равен $\lambda=0{,}002$. Через какой промежуток времени амплитуда колебаний камертона уменьшится в 100 раз?

2.66. Логарифмический декремент затухания маятника равен $\lambda=0{,}02$. Во сколько раз уменьшится амплитуда после 50 полных колебаний?

2.67. Через время $\Delta t=10$ с амплитуда колебаний маятника уменьшилась в 3 раза. Через сколько времени она уменьшится в 10 раз?

2.68. Амплитуда колебаний маятника уменьшается в 10 раз за 100 полных колебаний. Определите логарифмический декремент затухания. Через сколько колебаний амплитуда маятника уменьшилась в e раз?

2.69. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид $0{,}5\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}25\frac{dx}{dt}+8x=0$. Определите коэффициент затухания и круговую частоту этих колебаний.

2.70. Амплитуда затухающих колебаний убывает за 10 колебаний на 1/10 часть своей первоначальной величины. Период колебаний $T=0{,}4$ с. Определите логарифмический декремент и коэффициент затухания. Напишите дифференциальное уравнение этих колебаний.

2.71. К пружине подвешено тело, которое растягивает ее на $\Delta x=5$ см. Напишите дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника и его решение при начальной амплитуде $A_0=10$ см, если через время $\Delta t=5$ с амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

2.72. Стальной шарик диаметром $D=23$ см прикреплен к пружине. Круговая частота его колебаний в воздухе $\omega_0=5\ \text{с}^{-1}$, в глицерине $\omega=4\ \text{с}^{-1}$. Определите вязкость глицерина в условиях опыта. Считать, что на шарик в глицерине действует сила трения $F_{тр}=6\pi\eta Rv$ (закон Стокса), где η — вязкость глицерина. Вязкостью воздуха и сопротивлением пружины в глицерине пренебречь.

2.73. Вынужденные колебания описываются дифференциальным уравнением

$$0{,}4\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}48\frac{dx}{dt}+1{,}6x=0{,}8\sin 3t.$$

Найдите частоту этих вынужденных колебаний. Чему равна частота собственных колебаний системы? При какой частоте внешней силы будет наблюдаться резонанс?

2.74. Через какое время после прекращения действия вынуждающей силы для условия задачи **2.73** амплитуда колебаний уменьшится в е раз?

2.75. Определите частоту собственных колебаний системы, если при уменьшении коэффициента затухания в два раза резонансная частота изменяется от $\omega_{рез\,1}=3{,}88$ с$^{-1}$до $\omega_{рез\,2}=$ $=3{,}97$ с$^{-1}$.

2.76. Груз массой $m=2{,}5$ кг, подвешенный к пружине с жесткостью $k=3{,}6\cdot10^2$ Н/м, совершает вынужденные колебания под действием внешней силы $F=13{,}5\sin 6t$. Найдите амплитуду вынужденных колебаний груза. Трением пренебречь.

2.77. Источник звука совершает колебания по закону $x=$ $=\sin 2\,000\pi t$. Скорость распространения звука 340 м/с. Запишите уравнение колебаний для точки, находящейся на расстоянии $y=102$ м от источника. Потерями энергии пренебречь, волну считать плоской.

2.78. Найдите разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии $\Delta y=1{,}75$ м друг от друга, если длина волны $\lambda=1$ м.

2.79. Какова частота колебаний, если наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковых фазах, равно $\Delta y=1$ м? Скорость распространения волн $v=300$ м/с.

2.80. Точка, находящаяся на расстоянии $y=0{,}5$ м от источника колебаний, имеет в момент $t=T/3$ смещение, равное половине амплитуды. Найдите длину волны, если при $t=0$ смещение источника равно нулю.

2.81. Источник совершает колебания по закону $x=5\sin 3\,140t$. Определите смещение от положения равновесия, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии $y=340$ м от источника, через время $\Delta t=1$ с после начала колебания. Скорость распространения волны $v=340$ м/с.

2.82. Две точки лежат на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $v=50$ м/с. Период колебаний $T=0{,}05$ с, расстояние между точками $\Delta y=50$ см. Найдите разность фаз колебаний в этих точках.

2.83. Определите разность фаз в пульсовой волне между двумя точками артерии, расположенными на расстоянии $\Delta y=20$ см друг от друга. Скорость пульсовой волны считать равной $v=10$ м/с, а колебания сердца — гармоническими с частотой $\nu=1,2$ Гц.

2.84. Разность хода звуковых волн, приходящих в левое и правое ухо человека, составляет 1 см. Определите сдвиг фаз между обоими звуковыми ощущениями для тона с частотой $\nu=1000$ Гц.

2.85. Интенсивность плоской волны в воздухе равна $I=10^{-10}$ Вт/м^2. Найдите амплитуду колебаний частиц (молекул) воздуха при нормальных условиях и объемную плотность энергии колебательного движения для частот: $\nu_1=20$ Гц, $\nu_2=1000$ Гц, $\nu_3=20\,000$ Гц. Скорость звука в воздухе $v=330$ м/с.

2.86. Известно, что человеческое ухо воспринимает упругие волны в интервале частот от $\nu_1=20$ Гц до $\nu_2=20$ кГц. Каким длинам волн соответствует этот интервал в воздухе? в воде? Скорости звука в воздухе и воде равны соответственно $v_1=340$ м/с и $v_2=1400$ м/с.

2.87. Изучение движения барабанной перепонки показало, что скорость колебания ее участков оказывается величиной одного порядка со скоростью смещения молекул воздуха при распространении плоской волны. Исходя из этого, вычислите приближенно амплитуду колебания участков барабанной перепонки для двух случаев: а) порог слышимости; б) порог болевого ощущения. Частота равна $\nu=1$ кГц.

2.88. Определите среднюю силу, действующую на барабанную перепонку человека (площадь $S=66$ мм^2) для двух случаев: а) порог слышимости; б) порог болевого ощущения. Частота равна $\nu=1$ кГц.

2.89. Две машины движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1=20$ м/с и $v_2=10$ м/с. Первая машина дает сигнал с частотой $\nu_1=800$ Гц. Какой частоты сигнал услышит водитель второй машины: а) до встречи машин; б) после встречи машин.

2.90. Одинаковой ли высоты будет звук в случаях: а) источник звука движется навстречу неподвижному наблюдателю со скоростью $v_1=40$ м/с? б) наблюдатель движется навстречу неподвижному источнику с той же скоростью? Частота источника звука $\nu=600$ Гц.

2.91. На сколько увеличилась громкость звука, если интенсивность звука увеличилась от порога слышимости в 1 000 раз. Задачу решить для звука частотой: а) 100 Гц; б) 1 кГц. Для решения воспользоваться кривыми равной громкости.

2.92. Два звука одинаковой частоты $\nu=1$ кГц отличаются по громкости на $\Delta E=20$ фон. Во сколько раз отличаются их интенсивности?

2.93. Два звука одинаковой частоты отличаются по интенсивности на $\Delta L=30$ дБ. Найдите отношение амплитуд звукового давления.

2.94. По условиям некоторого производства определен допустимый предел уровня шума $E=70$ фон. Определите максимально допустимую интенсивность звука. Условно считать, что шум соответствует звуку частотой $\nu=1$ кГц.

2.95. Разрыв барабанной перепонки наступает при уровне интенсивности звука $L_0=150$ дБ. Определите интенсивность, амплитудное значение звукового давления и амплитуду смещения частиц в волне для звука частотой $\nu=1$ кГц, при которых может наступить разрыв барабанной перепонки.

2.96. Нормальный разговор человека оценивается уровнем громкости звука $E_1=50$ фон (для частоты $\nu=1$ кГц). Определите уровень громкости звука, соответствующего трем одновременно говорящим людям.

2.97. Шуму на оживленной улице соответствует уровень громкости звука $E_1=70$ фон, крику $E_2=80$ фон. Какой будет уровень громкости звука, полученного в результате сложения крика и шума улицы? Считать частоту, равной $\nu=1$ кГц.

2.98. Два звука частотой $\nu=1\,000$ Гц отличаются по громкости на 1 фон. Во сколько раз отличаются их интенсивности?

2.99. Шум на улице, которому соответствует уровень интенсивности звука $L_1=50$ дБ, слышен в комнате так, как шум $L_2=30$ дБ. Найдите отношение интенсивностей звука на улице и в комнате.

2.100. Уровень громкости звука частотой $\nu=5\,000$ Гц равен $E=50$ фон. Найдите интенсивность этого звука.

2.101. Уровни интенсивности звуков с частотами $\nu_1=100$ Гц и $\nu_2=3000$ Гц равны $L=50$ дБ. Определите уровни громкости этих звуков.

2.102. Звук частотой $\nu=200$ Гц проходит некоторое расстояние в поглощающей среде. Интенсивность звука при этом уменьшается с $I_1=10^{-4}$ Вт/м^2 до $I_2=10^{-8}$ Вт/м^2. На сколько при этом уменьшился уровень громкости?

2.103. Определите интенсивности звуков с частотами $\nu_1=100$ Гц, $\nu_2=500$ Гц и $\nu_3=1\,000$ Гц, если уровень громкости звуков одинаков и равен $E=40$ фон.

§ 2.3. Течение жидкости. Биореология

Уравнение Бернулли для точек идеальной жидкости, принадлежащих одной линии тока,

$$p_{ст} + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}, \quad (2.70)$$

где $p_{ст}$ — статическое, $\rho v^2/2 = p_д$ — динамическое и $\rho g h$ — гидростатическое давление, ρ — плотность жидкости, v — ее скорость, h — высота соответствующей точки жидкости относительно некоторого уровня (например, уровня Земли).

Сила внутреннего трения, действующая между слоями жидкости площадью S, (уравнение Ньютона)

$$F_{тр} = \eta \frac{dv}{dx} S, \quad (2.71)$$

где η — вязкость, dv/dx — градиент скорости. Объем жидкости, переносимый за 1 с;

через сечение цилиндрической трубы радиусом R (формула Пуазейля)

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}; \quad (2.72)$$

через переменное сечение

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dl}, \quad (2.73)$$

где l — длина участка трубы, на концах которого поддерживается разность давлений $p_1 - p_2$.

Гидравлическое сопротивление

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}. \quad (2.74)$$

Сила внутреннего трения, действующая на движущееся в жидкости сферическое тело (шарик) радиусом r (закон Стокса).

$$F_{тр} = 6\pi\eta r v, \quad (2.75)$$

где v — скорость шарика.

Скорость равномерного падения шарика в вязкой жидкости

$$v = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_ж) r^2 g}{\eta}, \quad (2.76)$$

где ρ и $\rho_ж$ — плотности материала, из которого сделан шарик, и жидкости соответственно.

Число Рейнольдса для трубы диаметром D

$$\text{Re} = \frac{\rho_ж v D}{\eta} = \frac{vD}{\nu}, \quad (2.77)$$

где v — скорость жидкости, $\nu=\eta/\rho_ж$ — кинематическая вязкость. Для гладких цилиндрических труб критическое число Рейнольдса приблизительно равно 2300.

Дополнительное давление под сферической поверхностью жидкости

$$\Delta p = 2\sigma/r, \tag{2.78}$$

где σ — поверхностное натяжение жидкости, r — радиус сферической поверхности.

Высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{R\rho_ж g}, \tag{2.79}$$

где θ — краевой угол, R — радиус капилляра, $\rho_ж$ — плотность жидкости.

Закон Гука

$$\sigma=\varepsilon E, \tag{2.80}$$

где σ — механическое напряжение, ε — относительная деформация, E — модуль упругости (модуль Юнга).

Для вязкого элемента

$$\varepsilon\eta=\sigma t, \tag{2.81}$$

где η — вязкость, t — время действия деформирующей силы. При параллельном соединении упругого и вязкого элементов (модель Кельвина — Фойгта)

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}\left(1-e^{-Et/\eta}\right). \tag{2.82}$$

Механическое напряжение стенки кровеносного сосуда

$$\sigma=p\frac{r}{h}, \tag{2.83}$$

где r — радиус просвета сосуда, h — толщина стенки сосуда. Скорость распространения пульсовой волны в крупных сосудах

$$v=\sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}, \tag{2.84}$$

где ρ — плотность вещества сосуда.

Связь объемной Q и линейной $v_{кр}$ скоростей кровотока в сосуде

$$Q=v_{кр}S, \tag{2.85}$$

где S — площадь просвета сосуда.

2.104. Скорость течения воды в некотором сечении горизонтальной трубы v=5 см/с. Найдите скорость течения в той части трубы, которая имеет вдвое меньший диаметр? вдвое меньшую площадь поперечного сечения?

2.105. Наблюдая под микроскопом движение эритроцитов в капилляре, можно измерить скорость течения крови ($v_{кр}=0{,}5$ мм/с). Средняя скорость тока крови в аорте составляет $v_а=40$ см/с. На основании этих данных определите, во сколько раз сумма поперечных сечений всех функционирующих капилляров больше сечения аорты.

2.106. Из горизонтально расположенного медицинского шприца диаметром 1,5 см выдавливается физиологический раствор силой $F=10$ Н. Найдите скорость вытекания жидкости из иглы шприца. Плотность физиологического раствора $\rho=1{,}03$ г/см^3. Сечение поршня значительно больше сечения иглы. Почему скорость вытекания раствора не зависит от сечения иглы?

2.107. Скорость течения воды во всех сечениях наклонной трубы одинакова. Найдите разность давлений Δp в двух точках, высоты которых над уровнем Земли различаются на $\Delta h=0{,}5$ м. Чему равно Δp, если система: а) находится в состоянии невесомости; б) испытывает трехкратные перегрузки?

2.108. В широкой части горизонтальной трубы вода течет со скоростью $v=50$ см/с. Определите скорость течения воды в узкой части трубы, если разность давлений в широкой и узкой частях $\Delta p=1{,}33$ кПа.

2.109. Трубка Пито (рис. 2.6, *а*) позволяет по высоте столба жидкости измерять полное давление p. Статическое давление p_1 в движущейся жидкости измеряется трубкой, нижнее сечение которой параллельно линиям тока (рис. 2.6, *б*). Вычислите скорость течения керосина, если известно, что $p=13{,}3$ кПа, $p_1=2{,}66$ кПа.

2.110. Из небольшого отверстия в дне широкого сосуда вытекает жидкость. Найдите наибольшую скорость струи, если известно, что высота жидкости в сосуде $h=1$ м. Объясните, почему решение задачи не зависит от свойств вытекающей жидкости.

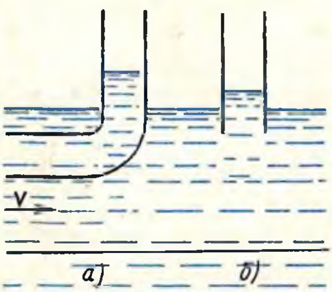


Рис. 2.6

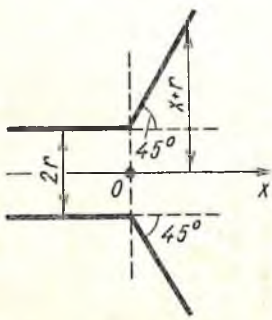


Рис. 2.7

2.111. По горизонтальной трубке переменного сечения протекает вода. Статическое давление в точке x_0 равно $p_0=0,3$ Па, а скорость воды $v_0=4$ см/с. Найдите статическое и динамическое давления в точке x_1, если отношение сечений трубы $S_{x_0}:S_{x_1}=0,5$.

2.112. Цилиндрическая труба переходит в конус (рис. 2.7). По этой системе протекает вода в направлении оси x. Считая воду идеальной жидкостью, получите зависимость $p=f(x)$ и изобразите ее графически. Гидростатическое давление не учитывать.

2.113. Используя условие задачи **2.112**, рассчитайте зависимость $p=f(x)$ и изобразите ее графически. Жидкость вязкая.

2.114. Сопоставьте формулы для электрического $R=\rho l/S$ и гидравлического $X=8\eta l/(\pi r^4)$ сопротивлений. Укажите и проанализируйте общее и различное в этих формулах.

2.115. Вычислите силу, действующую на $S=2$ м^2 дна русла, если по нему перемещается поток воды высотой $h=2$ м. Скорость верхнего слоя воды $v=30$ см/с, скорость нижних слоев постепенно уменьшается и равна нулю у дна.

2.116. В цилиндрическом стакане (высота $h=10$ см, внутренний диаметр $D=5$ см) вращается вода. Градиент скорости воды вблизи поверхности стакана равен $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r=2$ с$^{-1}$. Найдите момент силы, действующей со стороны жидкости на стакан. Считать, что вода заполняет весь стакан и сохраняет форму цилиндра.

2.117. Используя закон Стокса, определите, в течение какого времени в комнате высотой $h=3$ м полностью выпадет пыль. Частицы пыли считать шарообразными диаметром 1 мкм с плотностью вещества $\rho=2,5$ г/см^3.

2.118. Найдите скорость и время полного оседания сферических частиц радиусом $r=2$ мкм (плотность вещества $\rho=2,5$ г/см^3) в слое воды толщиной $l=3$ см в двух случаях: а) при действии силы тяжести, б) при центрифугировании с $n=500$ с$^{-1}$ (в этом случае действием силы тяжести пренебречь). Радиус центрифуги $R=10$ см.

2.119. Определите максимальное количество крови, которое может пройти через аорту в 1 с, чтобы течение сохранялось ламинарным. Диаметр аорты $D=2$ см, вязкость крови $\eta=5$ мПа·с.

2.120. Какой диаметр имеет перетяжка при отрыве капли дистиллированной воды массой $m=50$ мг?

2.121. В ряде случаев лекарство дозируют каплями. На сколько процентов изменится доза водного раствора лекарства при изменении температуры от $t_1=25$°C до $t_2=10$°C? Этим температурам соответствуют поверхностные натяжения $\sigma_1=71,78$ мН/м и $\sigma_2=74,01$ мН/м.

2.122. Вычислите дополнительное давление, обусловленное поверхностным натяжением в сферической капле тумана. Диаметр ее равен 3 мкм.

2.123. Разность уровней ртути в сообщающихся стеклянном капилляре и широком сосуде равна $\Delta h = 7{,}4$ мм. Определите радиус кривизны мениска ртути.

2.124. Определите относительное удлинение скелетной мышцы, моделируемой телом Кельвина — Фойгта, за 3 мин, если модуль упругости мышцы 1,2 МПа, площадь поперечного сечения $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м^2, а нагрузка на мышцу 6,3 Н. Вязкость вещества мышцы принять равной 1,25 г/(см·с).

2.125. Определите эффективный модуль упругости портняжной мышцы лягушки, если при возрастании приложенного к мышце напряжения от 10 кПа до 40 кПа длина ее увеличивалась от 0,032 м до 0,034 м.

2.126. Рассчитайте относительное удлинение скелетной мышцы, предполагая, что ее механические свойства можно описать моделью чисто вязкостного элемента. Условия взять из задачи **2.124.**

2.127. Как изменится модуль упругости бедренной кости человека, если при напряжении 5 Па относительная деформация составляет 0,025, а при увеличении напряжения до 11 Па она стала равной 0,055.

2.128. Определите давление в стенке капилляра диаметром 20 мкм, если толщина стенки сосуда 2 мкм, а тангенциальное напряжение в стенке $8 \cdot 10^{-5}$ Па.

2.129. Каково гидравлическое сопротивление кровеносного сосуда длиной 0,12 м и радиусом 0,1 мм?

2.130. Чему равен эффективный модуль упругости стенки грудной аорты, если отношение радиуса просвета сосуда к толщине его стенки равно 5. Известно, что при изменении давления внутри аорты от 13,3 до 16 кПа, площадь поперечного сечения сосуда увеличивается с 6,16 до 6,2 см^2.

2.131. Скорость пульсовой волны в артериях составляет 8 м/с. Чему равен модуль упругости этих сосудов, если известно, что отношение радиуса просвета к толщине стенки сосуда равно 6, а плотность сосудистой стенки равна 1,15 г/см^3.

2.132. Найдите объемную скорость кровотока в аорте, если радиус просвета аорты равен 1,75 см, а линейная скорость крови в ней составляет 0,5 м/с.

2.133. На сколько процентов изменится частота ультразвука при отражении его от движущихся эритроцитов в артерии? Среднюю скорость движения эритроцитов принять равной 40 см/с.

2.134. Какие частоты зафиксирует приемник ультразвука в условии задачи **2.133**, если частота генератора равна 1 МГц? Рассмотрите случаи движения крови к технической системе и от нее.

2.135. Доплеровский сдвиг частоты при отражении механической волны от движущихся эритроцитов равен 50 Гц, частота генератора равна 100 кГц. Определите скорость движения крови в кровеносном сосуде.

2.136. Используя эффект Доплера, определяют скорость движения слоев крови в зависимости от их удаления от оси крупного кровеносного сосуда: $v=f_1(r)$. Допустим, что эта зависимость соответствует расчетной для течения вязкой жидкости по цилиндрической трубе. Укажите, какой вид, при этом условии, имеет график зависимости $\nu_д=f_2(r)$, где $\nu_д$ — доплеровский сдвиг частоты.

Термодинамика. Физические процессы в биологических мембранах

Глава третья

§ 3.1. Термодинамика

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A. \tag{3.1}$$

Здесь Q — количество теплоты, переданное системе; ΔU — изменение внутренней энергии системы; A — работа, совершаемая системой.

Работа, совершаемая газом при изменении объема от V_1 до V_2,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV, \tag{3.2}$$

где p — давление.

Для адиабатного процесса ($Q = 0$)

$$\Delta U = A = nC_V(T_2 - T_1), \tag{3.3}$$

Здесь n — число молей идеального газа, C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры.

Обмен веществ в живых организмах также подчиняется первому закону термодинамики. Определение энергетического обмена между живыми организмами и окружающей средой осуществляется с помощью калориметрии, которая подразделяется на прямую и непрямую. Более распространенной является непрямая калориметрия. В этом случае о суммарном тепловом эффекте реакций, протекших в организме, судят по калорическому коэффициенту кислорода. Он показывает, какое количество теплоты выделяется при полном окислении данного вещества до углекислого газа и воды на каждый литр поглощенного организмом кислорода. Установлено, что этот коэффициент для углеводов равен 20,9, для жиров — 19,7 и для белков — 20,3 кДж. Однако в живом организме идет также синтез веществ, которые затем могут окисляться. Чтобы учесть общее количество теплоты, освобождаемое живым организмом за определенный промежуток времени, надо учитывать дыхательный коэффициент, равный отношению объема углекислого газа к потребленному за то же время кислороду. Дыхательный коэффициент для углеводов равен 1, для белков — 0,8 и для жиров он составляет 0,7. Существует связь между дыхательным и калорическим коэффициентами (см. табл. 24). Это позволяет устанавливать расход энергии организма, зная количество поглощенного кислорода и выделенного углекислого газа.

Количество теплоты для обратимого процесса

$$Q=\int T\mathrm{d}S. \qquad (3.4)$$

Изменение энтропии при нагревании или охлаждении вещества от температуры T_1 до температуры T_2

$$\Delta S=nC_p\ln\frac{T_2}{T_1}, \qquad (3.5)$$

где C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении. Скорость изменения энтропии для стационарного состояния в живом организме

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}S_e}{\mathrm{d}t}=0. \qquad (3.6)$$

Здесь $\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения энтропии, связанной с необратимыми процессами в биологической системе; $\frac{\mathrm{d}S_e}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения энтропии вследствие взаимодействия системы с окружающей средой.

3.1. В кислородной подушке 9,93 г газа находится под некоторым давлением. Определите работу, которая совершается газом при изменении его объема от 2 до 6 л, если процесс происходит при постоянной температуре 20°С.

3.2. В барокамере для создания нужного давления использовали газовый баллон объемом 20 л. При выходе всего газа из баллона была совершена работа 350 Дж. Каков объем барокамеры, если температура оставалась постоянной и равной 22°С?

3.3. Рассчитайте изменение внутренней энергии в результате испарения воды при кипячении инструментов в стерилизаторе, если давление при этом было постоянным и равным 10^5 Па, а испарилось 18 г воды.

3.4. 5 моль идеального одноатомного газа адиабатно расширяются от начального давления 1 МПа. При этом температура газа падает от 320 до 275 К. Какая при этом совершается работа?

3.5. В кислородной подушке содержится 2 моль кислорода под давлением 300 кПа. При открывании клапана газ расширяется, при этом его температура падает от 325 до 275 K. Рассчитайте совершаемую газом работу, если внешнее давление 100 кПа.

3.6. 0,85 моль идеального одноатомного газа, первоначально находившегося под давлением 1,5 МПа при 300 K, расширяется изотермически, пока давление не станет равно 100 кПа. Рассчитайте совершаемую при этом работу, если расширение происходит: 1) обратимо; 2) против внешнего давления 100 кПа.

3.7. 2 моль кислорода расширяются от начального давления 400 кПа против постоянного внешнего давления 100 кПа. Газ находится при температуре 22°С. Найдите конечный объем кислорода.

3.8. Определите расход энергии человека в состоянии мышечного покоя, если за 10 мин он выдыхает 60 л воздуха, в котором содержится 15% кислорода и 5% углекислого газа.

3.9. Спортсмен, пробегая дистанцию, выделяет за 1 мин 90 л воздуха, в котором содержится 12% кислорода и 8% углекислого газа. Каков расход энергии спортсмена за 5 мин дистанции?

3.10. Определите калорический коэффициент кислорода при окислении глюкозы, если из экспериментов с калориметрической бомбой известно, что при окислении 1 г глюкозы выделяется 15,7 кДж теплоты.

3.11. На сколько градусов изменится температура азота, который адиабатно расширяется при начальной температуре 20°С, если открыть клапан баллона, где 5 моль азота находится под давлением 1 МПа? Объем баллона 5 л, конечный объем, занимаемый газом, 20 л. Внешнее давление постоянно и равно 100 кПа.

3.12. При непрямой калориметрии энергетический расход человека за 10 мин составил 84 кДж. Какой объем кислорода он выдохнул, если известно, что в выдыхаемом воздухе содержалось 13% кислорода и 7% углекислого газа?

3.13. Кролик массой 1,5 кг поглотил за 1 ч 1,5 л кислорода. Определите, сколько энергии расходует кролик за сутки, если средний калорический эквивалент кислорода 20,52 кДж.

3.14. Изменение энтропии при расширении 1 моль закиси азота от 10 л при постоянной температуре составляет 5,8 Дж/K. Каков конечный объем газа?

3.15. Определите изменение энтропии в процессе таяния 1 моль льда при 0°С и последующем нагревании образующейся воды до 100°С.

3.16. Вычислите изменение энтропии в процессе превращения 1 моль воды в пар при температуре кипения.

3.17. При какой температуре находилось 2 моль воды в сосуде, если при ее нагревании до 100°С произошло увеличение энтропии на 23,5 Дж/K?

3.18. В баллоне было 10^{-2} м^3 кислорода. Открыв кран, газ перекачали в 20 кислородных подушек емкостью по 10^{-3} м^3 каждая. Процесс перекачки происходил при постоянной температуре. Вычислите изменение энтропии в этом процессе.

3.19. Сколько полезной работы может быть получено при сжигании 1 моль глюкозы, если предположить, что тело человека работает как тепловая машина? ($\eta = 30\%$).

3.20. Назовите основные различия между стационарным состоянием термодинамической системы и состоянием равновесия.

3.21. Чему равен общий баланс энтропии живого организма в стационарном состоянии?

3.22. Найдите тепловой эффект реакции окисления углерода до оксида углерода.

3.23. Диета человека массой 70 кг содержит 400 г белка (20,1 МДж/кг), 22 г жиров (39,8 МДж/кг) и 80 г углеводов (16,7 МДж/кг). Каждый день он поднимается на высоту 3 км и совершает перед этим работу, включая работу метаболизма, в 4 раза превышающую механическую работу поднятия своего тела на высоту 3 км. Чему равно изменение внутренней энергии при таком ежедневном процессе?

3.24. Определите температуру мышцы, предполагая, что она работает как тепловая машина с $\eta = 30\%$ при температуре 25°C.

В каком из рисунков состояние человека ближе всего соответствует стационарному?

§ 3.2. Физические процессы в биологических мембранах

Уравнение Фика

$$J = -D\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}, \quad (3.7)$$

где J — плотность потока диффундирующего вещества, D — коэффициент диффузии, $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$ — производная от концентрации диффундирующего вещества по направлению x (проекция градиента концентраций на направление x).

Уравнение Теорелла

$$J = -CU\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}. \quad (3.8)$$

Здесь μ — электрохимический потенциал;

$$U = \frac{D}{RT} \quad (3.9)$$

— подвижность, где R — молярная газовая постоянная.

Средняя величина смещения молекулы вещества в растворе

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad (3.10)$$

где D — коэффициент диффузии, t — время.

Характерное время установления равновесной концентрации

$$t_{0,5} = 0{,}693\frac{V}{pS}. \quad (3.11)$$

Здесь V — объем клетки; S — площадь поверхности клеточной мембраны;

$$P = \frac{D}{l}K, \quad (3.12)$$

где P — проницаемость мембраны для данного вещества, l — толщина мембраны, K — коэффициент распределения.

Формула Нернста

$$\Delta\varphi = \frac{RT}{ZF}\ln\frac{C_0}{C_i}. \quad (3.13)$$

Здесь $\Delta\varphi$ — равновесный мембранный потенциал, C_0 и C_i — концентрации данного иона снаружи и внутри клетки, F — постоянная Фарадея, Z — валентность иона.

Уравнение Гольдмана — Ходжкина — Катца

$$\varphi_{\text{м}} = \frac{RT}{F}\ln\frac{P_{\text{K}}[\text{K}^+]_0 + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_0 + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_i}{P_{\text{K}}[\text{K}^+]_i + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_i + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}]_0}, \quad (3.14)$$

где $\varphi_м$ — мембранный потенциал, P_K, P_{Na}, P_{Cl} — проницаемости мембраны для соответствующих ионов, $[K^+]_0$, $[Na^+]_0$, $[Cl^-]_0$ — концентрации ионов снаружи клетки, $[K^+]_i$, $[Na^+]_i$, $[Cl^-]_i$ — концентрации этих же ионов внутри нее.

Потенциал поля заряда q в электролите

$$\varphi=\frac{q}{r}e^{-r/\delta}, \tag{3.15}$$

где r — расстояние, δ — дебаевский радиус экранирования.

В общем случае, когда в растворе присутствует несколько ионов

$$\delta=\sqrt{\frac{RT\varepsilon}{F^2\sum_i Z_i^2 c_i}}, \tag{3.16}$$

где Z_i — валентность иона, c_i — концентрация соответствующего иона.

3.25. Найдите среднюю величину смещения молекулы формамида в воде и в растворе сахарозы за 1 мин, если коэффициенты диффузии этого вещества в воде и в сахарозе равны соответственно $1{,}6\cdot10^{-5}$ и $0{,}3\cdot10^{-5}$ см$^2\cdot$с$^{-1}$.

3.26. Чему равен поток формамида через плазматическую мембрану Chara ceratophylla толщиной 8 нм, если коэффициент диффузии его составляет $1{,}4\cdot10^{-8}$ см$^2\cdot$с$^{-1}$, концентрация формамида в начальный момент времени снаружи была равна $2\cdot10^{-4}$ М*, а внутри в десять раз меньше?

3.27. Бислойная липидная мембрана (БЛМ) толщиной 10 нм разделяет камеру на две части. Поток метиленового синего через БЛМ постоянен и равен $3\cdot10^{-4}$ М$\cdot$см/с, причем концентрация его с одной стороны мембраны равна 10^{-2} М, а с другой $2\cdot10^{-3}$ М. Чему равен коэффициент диффузии этого вещества через БЛМ?

3.28. Определите коэффициент диффузии в воде эритрола, если среднее смещение его молекулы составляет 40 мкм.

3.29. Найдите коэффициент проницаемости плазматической мембраны Mycoplasma для формамида, если при разнице концентраций этого вещества внутри и снаружи мембраны, равной $0{,}5\cdot10^{-4}$ М плотность потока его через мембрану равен $8\cdot10^{-4}$ М$\cdot$см/с.

3.30. Толщину двойного слоя на границе мембрана — электролит характеризует дебаевский радиус δ. Определите δ для случая, когда в растворе электролита, окружающем мембрану, есть только ионы калия с концентрацией: 1) 10^{-5} М; 2) 10^{-2} М.

---

* М = моль/л.

3.31. Найдите дебаевский радиус экранирования, создаваемого присутствующими в растворе ионами кальция с концентрацией 10^{-5} М и натрия с концентрацией 10^{-4} М. Как изменится δ, если в растворе будут только ионы кальция в концентрации 10^{-4} М?

3.32. Какова связь электродиффузии и электрофореза? Проанализируйте связь, исходя из основного уравнения электродиффузии.

3.33. Потенциал покоя нервного волокна кальмара равен —60 мВ, а потенциал действия +35 мВ. Вследствие чего происходит такое изменение мембранного потенциала?

3.34. Какое из соединений, приведенных ниже, имеет наименьшую проницаемость через липидный бислой и почему: толуол, этанол, ионы калия, кальция? Приведите необходимые уравнения.

3.35. Определите равновесный мембранный потенциал митохондрий, если при 37°С внутри митохондрий $pH=9$, а в окружающей среде 7? Температура равна 20°С.

3.36. Покажите, что электродиффузионное уравнение Нернста — Планка является частным случаем уравнения Теорелла.

3.37. Определите равновесный мембранный потенциал на мембране при отношении концентраций натрия снаружи и внутри клетки: 1) 1:1; 2) 10:1; 3) 100:1.

3.38. Как изменится основное электродиффузионное уравнение при отсутствии внешнего электрического поля?

3.39. Вязкость липидного бислоя в 100 раз больше, чем вязкость воды. Толщина примембранных слоев воды приблизительно в 100 раз больше толщины липидного бислоя. Коэффициент распределения кислорода в системе липид — вода близок к 1. Что является основным барьером для молекулярного кислорода при его диффузии через мембрану: липидный бислой или примембранный слой? Приведите необходимые уравнения.

3.40. Покажите, что уравнение Фика для диффузии является частным случаем уравнения Теорелла.

3.41. Определите равновесный мембранный потенциал, создаваемый на бислойной липидной мембране ионами калия при температуре 20°С, если концентрация калия с одной стороны мембраны равна 10^{-3} М, а с другой — 10^{-5} М.

3.42. Каков электрический заряд мембраны, если ее емкость 1 мкФ·см$^{-1}$, а равновесный мембранный потенциал такой же, как в задаче **3.41**?

3.43. Рассчитайте потенциал покоя гигантского аксона кальмара, если известно, что концентрация ионов натрия снаружи равна 440 мМ, а внутри его 49 мМ (температура равна 20°С).

3.44. Потенциал покоя нерва конечности краба равен 89 мВ. Чему равна концентрация ионов калия внутри нерва, если снаружи она составляет 12 мМ? Принять температуру равной 20°С.

3.45. Определите время, в течение которого устанавливается равновесная концентрация эритрола в клетке, если объем клетки 70 мкм^3, коэффициент проницаемости 13 мкм/с, а площадь поверхности мембраны клетки 43 мкм^2.

3.46. В клетках фагоцитов равновесная концентрация вещества устанавливается за 0,2 с. Чему равен коэффициент проницаемости этого вещества через мембрану фагоцитов, если считать клетку телом сферической формы диаметром 8 мкм?

Электродинамика. Электроника

Глава четвертая

§ 4.1. Электрическое поле

Электрический (дипольный) момент диполя

$$p = ql, \tag{4.1}$$

где q — электрический заряд, l — расстояние между зарядами.

Момент силы, действующей на диполь в электрическом поле,

$$M = pE\sin\alpha, \tag{4.2}$$

где α — угол между электрическим моментом диполя и напряженностью.

Проекция силы, действующей на диполь в неоднородном электрическом поле, на ось Ox

$$F_x = p_x \frac{dE_x}{dx}, \tag{4.3}$$

где p_x, E_x — соответственно проекции **p** и **E** на ось Ox.

Потенциал электрического поля, созданного диполем в некоторой точке A на расстоянии r ($r \gg l$),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\frac{p\cos\alpha}{r^2}, \tag{4.4}$$

где α — угол между **p** и направлением на точку A; ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 — электрическая постоянная.

Разность потенциалов двух точек, равноудаленных от диполя — источника поля,

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{\sin(\gamma/2)}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} p\cos\beta, \tag{4.5}$$

где γ — угол, под которым видны точки A и B от диполя, β — угол между **p** и прямой AB.

Соотношение между поверхностной плотностью связанных зарядов и поляризованностью

$$\sigma_{\text{св}} = P_e\cos\alpha, \tag{4.6}$$

где α — угол между $\mathbf{P}_e$ и нормалью к поверхности диэлектрика. Поляризованность

$$P_e = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E. \qquad (4.7)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$E_{эл} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \qquad (4.8)$$

Объемная плотность энергии электрического поля

$$\omega_{эл} = \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2/2. \qquad (4.9)$$

Плотность тока

$$j = qnv, \qquad (4.10)$$

где q и n — заряд и концентрация носителей тока, v — средняя скорость их направленного движения.

Плотность тока в электролите

$$j = qn(b_+ + b_-)E, \qquad (4.11)$$

где b_+ и b_- — подвижности ионов соответствующих знаков; E — напряженность электрического поля.

Зависимость термоэлектродвижущей силы от разности температур спаев

$$\varepsilon_т = \beta\Delta T, \qquad (4.12)$$

где β — коэффициент, равный термо-э. д. с. при $\Delta T = 1$ К.

Зависимость удельного сопротивления полупроводника от температуры

$$\rho = \rho_0 e^{\Delta E_з/(2kT)}, \qquad (4.13)$$

где $\Delta E_з$ — ширина запрещенной зоны; ρ_0 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность удельного сопротивления; k — постоянная Больцмана.

4.1. Между внутренней частью клетки и наружным раствором существует разность потенциалов (мембранный потенциал покоя) порядка $U = 80$ мВ. Полагая, что электрическое поле внутри мембраны однородно, и считая толщину мембраны $l = 8$ нм, найдите напряженность этого поля.

4.2. Для изучения структуры и функции биологических мембран используют модели — искусственные фосфолипидные мембраны, состоящие из бимолекулярного слоя фосфолипидов. Толщина искусственной мембраны достигает около $l = 6$ нм. Найдите электроемкость 1 см^2 такой мембраны, считая ее относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_r = 3$. Сравните полученную электроемкость с аналогичной характеристикой конденсатора, расстояние между пластинами которого $l = 1$ мм.

4.3. Найдите электрический момент системы электрон — ядро атома водорода, рассматривая эту систему как диполь. Выразите электрический момент в единицах СИ и дебаях. Расстояние между ядром и электроном принять равным $r=10^{-8}$ см.

4.4. В результате поляризации на концах диэлектрика возникли связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{св}=10^{-10}$ Кл/м^2. Образец диэлектрика имеет форму цилиндра длиной $l=30$ см и площадью поперечного сечения $S=1$ см^2. Считая поляризованный диэлектрик диполем, найдите его электрический момент.

4.5. Какой максимальный момент силы действует в электрическом поле с напряженностью $E=20$ кВ/м на молекулу воды ($p=3{,}7\cdot10^{-29}$ Кл·м)? В чем различие действия на молекулу однородного и неоднородного полей?

4.6. Какая сила действует на диполь, электрический момент которого $p=10^{-10}$ Кл·м, если он расположен в вакууме на расстоянии $x=50$ см от точечного заряда $q=1{,}5\cdot10^{-4}$ Кл вдоль линий напряженности? Расстояние между зарядами диполя много меньше x.

4.7. В электрическом поле точечного заряда $q=0{,}3$ нКл на расстоянии $r=1$ м от него находятся диполь с $p=2\cdot10^{-28}$ Кл·м. Найдите максимальный момент силы, действующий на диполь в вакууме.

4.8. Под воздействием однородного электрического поля свободный диполь начинает колебаться. Получите дифференциальное уравнение и формулу для периода колебаний, если известны: напряженность E электрического поля, электрический момент p и момент инерции J диполя. Считать угол отклонения диполя от положения устойчивого равновесия малым ($\sin\alpha\approx\alpha$).

4.9. Найдите потенциал поля, созданного диполем в точке A, удаленной на расстояние $r=0{,}5$ м в направлении под углом $\alpha=30°$ относительно электрического момента p диполя (рис. 4.1). Среда — вода. Диполь образован зарядами $q=2\cdot10^{-7}$ Кл, расположенными на расстоянии $l=0{,}5$ см.

4.10. Используя условие задачи **4.9**, найдите разность потенциалов двух точек поля, созданного диполем. Точки находятся

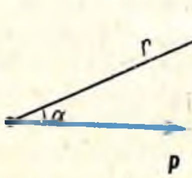


Рис. 4.1

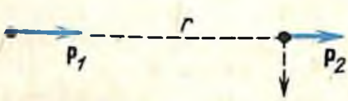


Рис. 4.2

на расстоянии $r=0{,}5$ м под углами соответственно $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=90°$.

4.11. Используя выражение для потенциала диполя и связь между напряженностью и потенциалом, найдите зависимость напряженности электрического поля на оси диполя от p и r.

4.12. Найдите силу, с которой диполь ($p_1=10^{-15}$ Кл·м) действует в вакууме на другой диполь ($p_2=10^{-16}$ Кл·м), расположенный вдоль оси первого диполя на расстоянии $r=20$ см (рис. 4.2). Какой момент силы будет действовать на второй диполь, если его повернуть на 90° (штриховое изображение на рисунке)? Воспользоваться формулой, полученной в задаче **4.11.**

4.13. Согласно представлениям Эйнтховена сердце подобно электрическому диполю. Электрический момент сердца-диполя периодически изменяется как по модулю, так и по направлению. Биопотенциалы (электрокардиограммы) регистрируются между вершинами условно равностороннего треугольника, который образуется двумя руками и одной ногой. Какой вид имели бы электрокардиограммы, снятые в трех возможных отведениях, если бы электрический момент сердца равномерно вращался во фронтальной плоскости? Укажите общие формулы и постройте три «электрокардиограммы», откладывая по оси абсцисс время, а по оси ординат — разность биопотенциалов.

4.14. Какой вид имели бы электрокардиограммы, снятые в трех возможных отведениях, если бы электрический момент сердца-диполя изменялся по закону $p=p_0\cos\omega t$ во фронтальной плоскости, сохраняя ориентацию в пространстве параллельно одной из сторон треугольника Эйнтховена. Укажите общие формулы и постройте графики (сравните с задачей **4.13**).

4.15. В одном из отведений наибольшая разность биопотенциалов на электрокардиограмме равна 2 мВ. Предполагая, что при этом электрический момент сердца параллелен стороне треугольника Эйнтховена, с которой снимается электрокардиограмма, оцените величину электрического момента сердца. Известны: $\varepsilon_r=80$, $r=1$ м [см. (4.5)].

4.16. В воде 3% молекул ориентированы упорядоченно вдоль линий напряженности приложенного электрического поля, остальные молекулы ориентированы хаотически. Найдите поляризованность электрического поля диполя молекул воды $p=1{,}86$ Д.

4.17. На пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми $l=3$ см, подано напряжение $U=1$ кВ. Пространство между пластинами заполнено кровью. Найдите поверхностную плотность связанных зарядов и поляризованность.

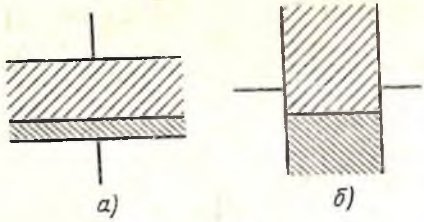


Рис. 4.3

4.18. Одна часть плоского конденсатора заполнена водой, другая — глицерином. Во сколько раз поверхностная плотность связанных зарядов одного диэлектрика больше, чем другого?
Ответ указать для двух случаев расположения воды и глицерина (рис. 4.3, *а* и *б*).

4.19. Вычислите электроемкость тела человека, считая ее равной емкости электропроводящего шара того же объема. Среднюю плотность тела принять равной $\rho = 1$ г/см^3; масса человека $m = 60$ кг.

4.20. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $l = 0{,}5$ см, заряжен до разности потенциалов $U = 700$ В. Диэлектрик — кровь. Определите объемную плотность энергии поля конденсатора.

4.21. Конденсатор емкостью $C_1 = 2$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U = 100$ В. После отключения от источника э. д. с. конденсатор был подключен к другому незаряженному конденсатору емкостью $C_2 = 5$ мкФ. На сколько изменилась энергия системы двух конденсаторов?

4.22. Диполь с электрическим моментом $p = 0{,}3 \cdot 10^{-2}$ нК·м ориентирован вдоль линии напряженности электрического поля $E = 50$ В/см. Найдите работу, которую необходимо совершить для поворота диполя на угол: а) 90°; б) 180°.

4.23. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора площадью $S = 50$ см^2 изменяется от $l_1 = 3$ см до $l_2 = 10$ см. Конденсатор был заряжен до напряжения $U = 200$ В и отключен от источника тока. Найдите изменение энергии поля конденсатора. Чему равна работа по раздвижению пластин конденсатора?

4.24. Используя данные задачи **4.23** и считая конденсатор подключенным к источнику тока, найдите изменение энергии конденсатора, источника тока и работу по раздвижению пластин конденсатора.

4.25. Через плоское сечение проводника проходят электроны со скоростью $v = 1{,}5$ см/с. Концентрация электронов равна $n = 10^{19}$ см$^{-3}$. Найдите плотность тока. Определите силу тока создаваемого этими зарядами, если сечение проводника $S = 0{,}3$ мм^2.

4.26. Найдите плотность тока в электролите, если концентрация ионов в нем $n = 10^5$ см$^{-3}$, их подвижности $b_+ = 4{,}5 \times 10^{-4}$ см^2/(В·с), $b_- = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ см^2/(В·с) и напряженность электрического поля $E = 10$ В/см. Считая плотность тока всюду одинаковой, найдите силу тока, если площадь каждого электрода $S = 1$ дм^2. Принять заряд иона равным заряду электрона.

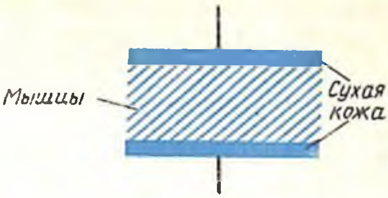


Рис. 4.4

4.27 Между двумя электродами, к которым приложено постоянное напряжение $U = 36$ В, находится часть живой ткани. Условно можно считать, что ткань состоит из двух слоев сухой кожи (рис. 4.4) и мышц с кровеносными сосудами. Толщина каждого слоя кожи $l_1 = 0{,}3$ мм, толщина внутренней ткани $l_2 = 9{,}4$ мм. Найдите плотность тока и падение напряжения в коже и в мышечной (сосудистой) ткани, рассматривая их как проводники. Как изменяется потенциал в направлении, перпендикулярном этим слоям?

4.28. В ионизационной камере, расстояние между плоскими электродами которой $l = 4$ см, проходит ток насыщения. Плотность тока $j = 15$ мкА/м^2. Найдите среднее число пар ионов, образующихся под действием ионизатора в одном кубическом сантиметре пространства камеры в единицу времени. Заряд иона численно равен заряду электрона.

4.29. Между плоскими электродами площадью $S = 100$ см^2 каждый находится $V = 300$ см^3 водорода. Концентрация ионов в газе $n = 5 \cdot 10^{-7}$ см$^{-3}$. Какое напряжение нужно приложить к электродам, чтобы получить ток силой $I = 1$ мкА? Подвижности ионов: $b_+ = 5{,}4$ см^2/(В·с) и $b_- = 7{,}4$ см^2/(В·с).

4.30. Термопара из Pb — Ag создает термоэлектродвижущую силу 3 мкВ при разности температур спаев 1 К. Можно ли такой термопарой уверенно установить повышение температуры тела человека от 36,5 до 37,0°С, если потенциометр позволяет измерить напряжение с точностью до 1 мкВ?

4.31. Во сколько раз изменится сопротивление полупроводника при уменьшении температуры вдвое, если его начальная температура $T = 400$ К, ширина запрещенной зоны $\Delta E_з = 0{,}7$ эВ?

4.32. Во сколько раз уменьшится сопротивление полупроводника при увеличении температуры на 10%, если его начальная температура $t = 27$°С, ширина запрещенной зоны $\Delta E_з = 0{,}6$ эВ?

4.33. Найдите (в электронвольтах) ширину запрещенной зоны полупроводника, если известно, что при температурах $T_1 = 300$ К и $T_2 = 350$ К сопротивления его соответственно равны $R_1 = 700$ Ом и $R_2 = 100$ Ом.

4.34. Как можно из графика $\ln R = f\left(\frac{1}{T}\right)$ определить ширину запрещенной зоны? Найдите графически ширину запрещенной зоны для кремния, если из эксперимента получены следующие данные:

T, К	900	682	555	467
R, Ом	0,25	2,5	25	250

4.35. Из зависимости (4.13) получите выражение для температурного коэффициента сопротивления полупроводников. Температурным коэффициентом сопротивления называют отношение относительного изменения сопротивления к изменению температуры: $\alpha = \frac{dR}{R dT}$.

4.36. Чему равен температурный коэффициент сопротивления кремния при температуре 1000 К (см. задачи 4.35, 4.34)?

§ 4.2. Магнитное поле. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Связь напряженности магнитного поля и магнитной индукции в однородной безграничной среде

● $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, (4.14)

где μ_0 — магнитная постоянная, μ_r — относительная магнитная проницаемость.

Закон Био — Савара — Лапласа (рис. 4.5)

● $dH = \frac{I\,dl \sin\alpha}{4\pi r^2}$, (4.15)

или в векторной форме

● $d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$, (4.16)

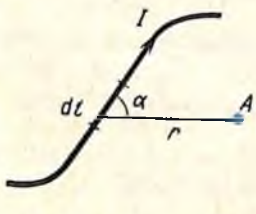


Рис. 4.5

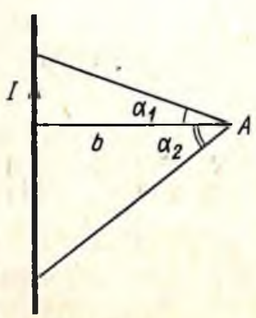


Рис. 4.6

где $d\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, созданного элементом тока $I d\mathbf{l}$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от элемента тока в точку A, в которой определяется $d\mathbf{H}$, $r = |\mathbf{r}|$.
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока радиусом r

$$H = I/(2r). \tag{4.17}$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого прямолинейным отрезком проводника с током,

$$H = \frac{I}{4\pi b}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2), \tag{4.18}$$

где b — расстояние от оси проводника до точки A (рис. 4.6).
Напряженность магнитного поля, создаваемого прямолинейным бесконечно длинным проводником с током,

$$H = \frac{I}{2\pi b}, \tag{4.19}$$

где b — расстояние от оси проводника до точки A.
Напряженность магнитного поля в центре длинного соленоида

$$H = \frac{IN}{l}, \tag{4.20}$$

где N — число витков, l — длина соленоида.
Сила, действующая на элемент тока $I dl$ в магнитном поле с индукцией B (закон Ампера),

$$dF = IB\,dl \sin\beta, \tag{4.21}$$

где β — угол между $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$, или в векторной форме

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{4.22}$$

Магнитный момент замкнутого плоского контура с током

$$p_m = IS, \tag{4.23}$$

где S — площадь, охватываемая контуром.
Момент силы, действующий на рамку с током в магнитном поле,

$$M = p_m B \sin\alpha, \tag{4.24}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}, \tag{4.25}$$

где α — угол между нормалью к плоскости рамки и индукцией $\mathbf{B}$.
Э. д. с. индукции, возникающая в замкнутом контуре,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.26}$$

Сила индукционного тока, текущего по контуру сопротивлением R,

$$I=\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.27)$$

Количество индуцируемого электричества в контуре с сопротивлением R,

$$q=\Delta\Phi/R, \qquad (4.28)$$

где $\Delta\Phi$ — изменение потока.

Э. д. с. взаимной индукции, возникающая в контуре,

$$\mathcal{E}_{в}=-M\frac{dI}{dt}, \qquad (4.29)$$

где M — взаимная индуктивность, dI/dt — скорость изменения силы тока в соседнем контуре.

Э. д. с. самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем,

$$\mathcal{E}_{с}=-L\frac{dI}{dt}, \qquad (4.30)$$

где L — индуктивность контура.

Индуктивность соленоида

$$L=\mu_0\mu_r N^2 S/l, \qquad (4.31)$$

где N — общее число витков, l — длина соленоида, S — площадь сечения

Энергия магнитного поля тока

$$E_{м}=LI^2/2. \qquad (4.32)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$\omega_{м}=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_r\mu_0}=\frac{\mu_0\mu_r H^2}{2}. \qquad (4.33)$$

Сила Лоренца

$$f_{Л}=qvB\sin\beta, \qquad (4.34)$$

где β — угол между скоростью $\mathbf{v}$ движения заряда и индукцией $\mathbf{B}$, или в векторной форме

$$\mathbf{f}_{Л}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (4.35)$$

Результирующая сила, действующая на движущуюся заряженную частицу одновременно со стороны электрического и магнитного полей,

$$\mathbf{f}_{em}=\mathbf{f}_e+\mathbf{f}_{Л}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (4.36)$$

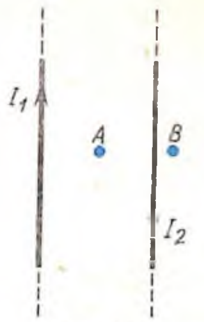


Рис. 4,7

Рис. 4.8

4.37. По двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам (рис. 4.7) текут в противоположных направлениях токи силой $I_1 = 5$ А и $I_2 = 10$ А. Расстояние между проводниками $l = 10$ см. Найдите напряженность и индукцию магнитного поля в точке A, лежащей посередине между проводниками, и в точке B справа от проводника с током I_2 на расстоянии $l_1 = 2$ см от него.

4.38. По двум длинным параллельным проводникам текут в противоположных направлениях токи, причем $I_2 = 2I_1$. Расстояние между ними $l = 5$ см. Определите положение точек, в которых напряженность магнитного поля равна нулю.

4.39. Вычислите напряженность магнитного поля, созданного отрезком прямолинейного проводника длиной $l = 8$ см в точке, лежащей на перпендикуляре к его середине на расстоянии $r = 3$ см от проводника, если по проводнику течет ток $I = 20$ А.

4.40. Из проволоки длиной $l = 40$ см сделана квадратная рамка, по которой течет ток $I = 10$ А. Найдите напряженность и индукцию магнитного поля в центре этой рамки. Относительная магнитная проницаемость среды $\mu_r = 2$.

4.41. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи $I_1 = 1$А и $I_2 = 2$ А. Расстояние между проводами $l = 6$ см. Определите напряженность магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на $b_1 = 6$ см и от второго на $b_2 = 3$ см.

4.42. По длинному проводу, согнутому под прямым углом (рис. 4.8), течет ток $I = 10$ А. Определите напряженность магнитного поля в точке A, если $b = 2{,}5$ см.

4.43. По тонкой катушке течет ток $I = 7$ А, радиус витков $r = 10$ см. При каком числе витков N напряженность магнитного поля в центре катушки будет $H = 245$ А/м? Считать катушку плоской.

4.44. Ток $I = 1$ А течет по проводнику, который вначале явля-

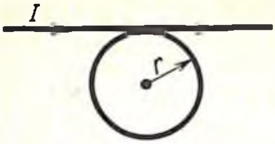


Рис. 4.9

Рис. 4.10

ется прямолинейным, затем делает круговую петлю радиусом $r=5$ см и далее снова выпрямляется (рис. 4.9). Найдите напряженность и индукцию в центре кольца.

4.45 По проводу (рис. 4.10) течет ток $I=3{,}2$ А. Чему равна индукция магнитного поля в центре полукруга (точка A)? Радиус его $r=5$ см.

4.46. В однородном магнитном поле $B=0{,}1$ Тл расположен прямолинейный участок проводника с током $I=10$ А под углом 30° к вектору магнитной индукции. Определите силу, с которой поле действует на каждый сантиметр участка проводника.

4.47. Равносторонний треугольник со стороной $l=10$ см расположен в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}2$ Тл. Найдите силы, действующие на все стороны треугольника, если по нему течет ток $I=5$ А, а вектор индукции **B** параллелен одной из его сторон.

4.48. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током $I_1=5$ А расположена прямоугольная рамка (рис. 4.11), обтекаемая током $I_2=1$ А. Найдите силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны поля, создаваемого прямым током, а также равнодействующую этих сил. Сторона рамки $l=10$ см, расстояние от стороны AB до прямого провода $b=5$ см.

4.49. В одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I=10$ А, расположена прямоугольная рамка так, что большая сторона ее длиной $l=5$ см параллельна проводнику, и расстояние от проводника до этой стороны равно длине меньшей стороны. Определите магнитный поток, пронизывающий рамку. Окружающая среда — воздух.

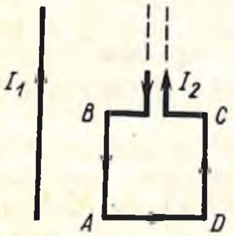


Рис. 4.11

4.50. Проволочное кольцо радиусом $r=3$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H=10^5$ А/м. Плоскость кольца составляет угол 30° с линиями напряженности. Вычислите магнитный поток, пронизывающий кольцо. Окружающая среда — воздух.

4.51. Определите работу при перемещении на 50 см проводника длиной $l = 20$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}7$ Тл. Вектор индукции поля, направления перемещения проводника и тока взаимно перпендикулярны.

4.52. Определите магнитный момент соленоида при токе $I = 0{,}3$ А, если число витков $N = 500$, площадь витка $S = 20$ см^2.

4.53. Согласно теории Бора в невозбужденном атоме водорода электрон движется вокруг ядра по окружности радиуса $r = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см со скоростью $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ см/с. Определите магнитный момент атома водорода, обусловленный этим круговым током, и направление этого момента.

4.54. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл находится квадратная рамка с током силой $I = 0{,}4$ А. Плоскость рамки составляет с направлением поля угол $\alpha = 60°$. Определите вращающий момент, действующий на рамку, если сторона ее $a = 2$ см.

4.55. Определите максимальный вращающий момент, действующий на квадратную рамку со стороной $a = 5$ см, помещенную в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл. По рамке точек ток $I = 1$ А.

4.56. Короткая катушка площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2, содержащая $N = 40$ витков, по которым течет ток $I = 1$ А, помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Определите магнитный момент катушки, а также вращающий момент, действующий на катушку, если между осью катушки и вектором индукции поля угол $\alpha = 60°$.

4.57. В однородном магнитном поле свободно с периодом $T = 10$ с колеблется рамка с током $I = 0{,}1$ А. Площадь рамки $S = 10$ см^2, момент инерции $J = 2 \cdot 10^{-3}$ кг$\cdot$м^2. Определите магнитную индукцию поля. Максимальный угол отклонения рамки мал.

4.58. Рамка площадью $S = 20$ см^2, содержащая $N = 10$ витков, равномерно вращается с частотой 10 с$^{-1}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Определите максимальную э. д. с., индуцируемую в рамке, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции.

4.59. Проволочная рамка площадью $S = 40$ см^2 расположена перпендикулярно индукции магнитного поля, которая изменяется по закону $B = 1 + e^{-2t}$. Определите э. д. с., индуцируемую в контуре в момент $t = 0{,}5$ с.

4.60. Квадратная рамка со стороной $l = 10$ см расположена в магнитном поле так, что плоскость рамки образует угол $\alpha = 30°$ с направлением индукции поля, изменяющейся по закону $B = 0{,}1 \sin \pi t$. Определите закон, по которому изменяется э. д. с. в рамке, и найдите э. д. с. в момент $t = 4$ с.

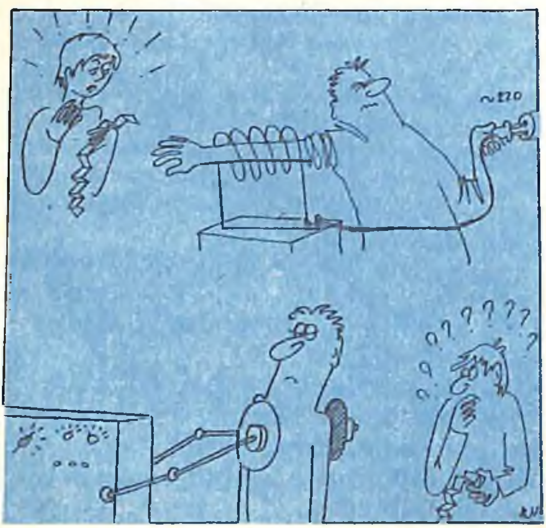
4.61. Катушка радиусом $r = 4$ см, имеющая $N = 100$ витков, находится в магнитном поле. Чему равно среднее значение э. д. с. индукции в этой катушке, если индукция магнитного поля увеличивается в течение $t = 0{,}4$ с от $B = 0$ до $B = 1{,}2$ Тл?

4.62. Самолет, имеющий размах крыльев $l = 40$ м, летит горизонтально со скоростью $v = 900$ км/ч. Определите разность потенциалов на концах крыльев, если вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H = 40$ А/м.

4.63. Виток из проволоки площадью $S = 20$ см^2 и сопротивлением $R = 10^{-2}$ Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\alpha = 90°$ с линиями индукции. Определите количество электричества, которое протечет по витку, если его выдернуть из поля.

4.64. Кольцо радиусом $r = 4$ см находится в магнитном поле напряженностью $H = 3 \cdot 10^2$ А/м. Плоскость кольца перпендикулярна линиям поля. Каково сопротивление кольца, если при исчезновении поля по кольцу протекает заряд $q = 10^{-2}$ Кл? Окружающая среда — воздух.

4.65. Замкнутый провод длиной $l = 4$ м (сложенный сдвое) развертывается в квадрат в магнитном поле Земли. Вычислите наведенный в горизонтально расположенном контуре заряд, если известно, что сопротивление провода $R = 5$ Ом. Среда — воздух. Вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H = 40$ А/м. Будет ли больше наведенный заряд, если провод развертывается в окружность?



Какой физический фактор действует на пациента? Какие процессы при этом протекают в органах?

4.66. На катушку длиной $l = 20$ см и площадью поперечного сечения $S = 20$ см^2 надет проволочный виток. Обмотка катушки имеет $N = 100$ витков и по ней идет ток $I = 1$ А. Какая э. д. с. индуцируется в надетом на катушку витке, когда ток в катушке выключается в течение $\Delta t = 10^{-2}$ с? Относительная магнитная проницаемость среды $\mu_r = 5$.

4.67. По катушке протекает ток $I = 1$ А, который создает в ней магнитный поток $\Phi = 0{,}6$ Вб. Сколько витков имеет катушка, если длина катушки $l = 40$ см, радиус $r = 5$ см и относительная магнитная проницаемость железного сердечника при этом токе $\mu_r = 100$?

4.68. На бумажный цилиндр, сечение которого $S = 50$ см^2, наматывается однослойная катушка. Густота намотки 20 витков на 1 см. При какой длине катушки ее индуктивность L будет равна $5 \cdot 10^{-3}$ Гн?

4.69. Соленоид с радиусом поперечного сечения $r = 3 \cdot 10^{-2}$ м изготавливают, плотно наматывая провод диаметром $d = 0{,}6$ мм. Какой длины должен быть соленоид, если его индуктивность $L = 0{,}006$ Гн?

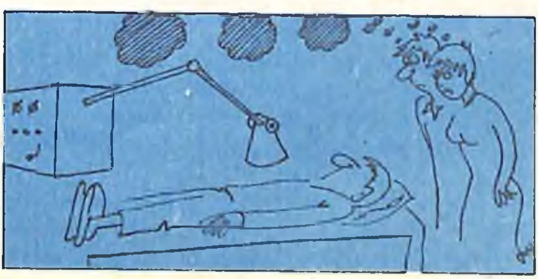
4.70. При изменении силы тока в катушке на $\Delta I = 0{,}8$ А за $\Delta t = 2$ с в другой замкнутой катушке, расположенной рядом с первой, возникает э. д. с. индукции $\mathcal{E}_i = 2$ В. Определите взаимную индуктивность катушек.

4.71. По первичной обмотке трансформатора течет ток, сила которого изменяется по закону $I = 12 \sin 10\pi t$. Найдите максимальное значение э. д. с., индуцируемой во вторичной обмотке, если взаимная индуктивность обмоток трансформатора $L = 0{,}1$ Гн.

4.72. Сила тока в соленоиде изменяется по закону $I = 10t - t^2$. Индуктивность соленоида $L = 10$ Гн. Какая э. д. с. самоиндукции будет в соленоиде через $\Delta t = 2$ с?

4.73. Вычислите среднюю э. д. с. самоиндукции, получающуюся при размыкании тока в электромагните. Число витков $N = 1000$, поперечное сечение соленоида $S = 10$ см^2, индукция $B = 1{,}5$ Тл, время размыкания $\Delta t = 0{,}01$ с.

4.74. Какова энергия магнитного поля в катушке длиной $l = 50$ см, имеющей $N = 10^3$ витков диаметром $d = 20$ см, если



по ней протекает ток $I=2$ мА? Найдите объемную плотность энергии.

4.75. Определите энергию магнитного поля в катушке, если длина ее $l=50$ см, площадь поперечного сечения $S=20$ см^2, число витков $N=1000$. По катушке течет ток $I=2$ А. Относительная магнитная проницаемость железного сердечника при этой силе тока $\mu_r=150$.

4.76. При индукции магнитного поля $B=0{,}1$ Тл плотность энергии магнитного поля в железе $\omega_м=10$ Дж/м^3. Какова относительная магнитная проницаемость железа при этих условиях?

4.77. Напряженность магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от $H_1=200$ А/м до $H_2=800$ А/м. Во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля? Магнитная индукция полей соответственно равна $B_1=0{,}5$ Тл и $B_2=1{,}25$ Тл.

4.78. По длинному прямолинейному проводнику течет ток $I=3$ А. Определите, как убывает плотность энергии магнитного поля с расстоянием от прямого тока. Найдите плотность энергии магнитного поля на расстоянии $b=5$ см от прямого тока. Среда — воздух.

4.79. Найдите удельный заряд для протона, если он, влетая со скоростью $v=10^8$ см/с в однородное магнитное поле напряженностью $H=2\cdot10^5$ А/м, движется по дуге окружности радиусом $r=4{,}2$ см. Направления скорости протона и индукции магнитного поля перпендикулярны.

4.80. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. У какой частицы и во сколько раз радиус кривизны траектории будет больше?

4.81. Электрон, пройдя разность потенциалов $U=300$ В, влетает в магнитное поле с напряженностью $H=8\cdot10^3$ А/м перпендикулярно индукции поля. Определите радиус его траектории.

4.82. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл движется протон. Траектория его движения представляет собой винтовую линию с радиусом $r=30$ см и шагом $h=20$ см. Определите кинетическую энергию протона. Масса его $m=$ $=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

4.83. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ мТл. Траектория движения электрона представляет собой винтовую линию с радиусом $r=1{,}8\cdot10^{-2}$ м и шагом $h=0{,}2$ м. Определите скорость электрона и ее направление.

4.84. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}18$ Тл. Определите период обращения электрона.

Оптика

Глава пятая

§ 5.1. Интерференция

Оптическая длина пути

$$L = nx, \tag{5.1}$$

где x — геометрическая длина пути волны, n — показатель преломления среды.

Соотношение между разностью фаз $\Delta\varphi$ и оптической разностью хода двух волн с одинаковой длиной волны λ в вакууме

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta. \tag{5.2}$$

Условие максимума интенсивности света при интерференции

- $$\delta = k\lambda; \tag{5.3}$$

условие минимума

- $$\delta = (2k+1)\lambda/2. \tag{5.4}$$

Условие максимума интерференции в тонкой пленке для отраженного света

- $$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k+1)\lambda/2, \tag{5.5}$$

где l — толщина пленки, n — показатель преломления вещества пленки, i — угол падения. В формуле учтена потеря «полволны» при отражении от среды оптически более плотной.

Условие минимума интерференции

- $$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\lambda. \tag{5.6}$$

Для интерференции в проходящем свете формула (5.5) соответствует условию минимума, а (5.6) — максимума.

Закон преломления

- $$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \tag{5.7}$$

где i — угол падения, r — угол преломления.

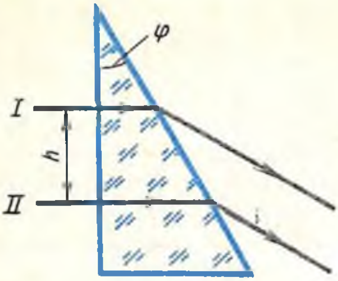


Рис. 5.1

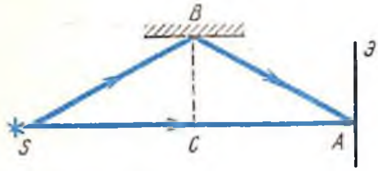


Рис. 5.2

5.1. Разности хода двух интерферирующих волн в вакууме равны: а) 0; б) $0{,}2\lambda$; в) $0{,}5\lambda$; г) λ; д) $1{,}2\lambda$. Чему равна соответствующая разность фаз?

5.2. Разности фаз двух интерферирующих волн равны: а) 0; б) $\pi/3$; в) $\pi/2$; г) π; д) 2π; е) 3π. Скольким длинам волн в вакууме будут соответствовать оптические разности хода этих волн?

5.3. На пути луча света перпендикулярно ему поставлена стеклянная пластинка ($n=1{,}5$) толщиной $l=1$ мм. На сколько при этом изменится оптическая длина пути?

5.4. Два параллельных луча I и II падают на стеклянную ($n=1{,}5$) призму с преломляющим углом $\varphi=30°$ и после преломления выходят из нее (рис. 5.1). Найдите оптическую разность хода лучей после преломления; $h=2$ см.

5.5. Оптическая разность хода двух когерентных лучей в некоторой точке экрана равна $\delta=4{,}36$ мкм. Каков будет результат интерференции света в этой точке экрана, если длина волны света равна: а) 670,9 нм; б) 435,8 нм; в) 536,0 нм?

5.6. Оптическая разность хода интерферирующих лучей $\delta = 2{,}5$ мкм. Найдите все длины волн видимого диапазона (от 0,76 до 0,4 мкм), которые дают в этом случае максимум интерференции.

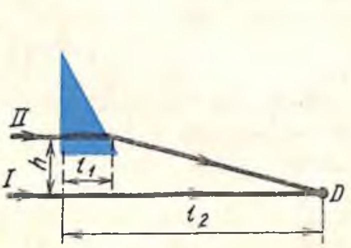


Рис. 5.3

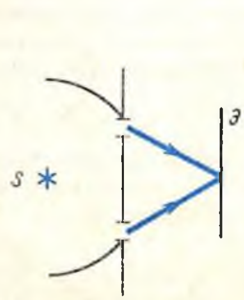


Рис. 5.4

5.7. Оптическая разность хода интерферирующих лучей $\delta = 2$ мкм. Найдите все длины волн видимого диапазона (от 0,76 до 0,4 мкм), которые дают в этом случае минимум интерференции.

5.8. Один луч от источника S монохроматического света ($\lambda = 0{,}76$ мкм) падает в точку A экрана Э непосредственно, другой — после отражения от плоского зеркала B (рис. 5.2); $SA = 2$ м, $SC = 1$ м, $BC = 2$ мм. Что будет наблюдаться в точке A в результате интерференции лучей — свет или темнота?

5.9. Два монохроматических ($\lambda = 0{,}6$ мкм) параллельных луча I и II идут на расстоянии $h = 2$ см друг от друга. На пути луча II поставлена стеклянная ($n = 1{,}5$) призма (рис. 5.3). Луч II проходит в призме путь $l_1 = 1$ см и, преломляясь, пересекает луч I в точке D на расстоянии $l_2 = 15$ см от вертикального катета призмы. Найдите разность оптических путей обоих лучей в точке D. Каков будет результат интерференции лучей в этой точке?

5.10. Как и во сколько раз изменится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране Э в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda_1 = 500$ нм) заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?

5.11. Как и во сколько раз изменится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга (рис. 5.4), если всю установку поместить под воду?

5.12. Два когерентных источника света S_1 и S_2 расположены в плоскости чертежа (рис. 5.5) на расстоянии b друг от друга и l от экрана Э ($l \gg b$). Установите зависимость разности хода интерферирующих волн от координаты x точки экрана. Расчет произвести для сечения, совпадающего с плоскостью чертежа. Какой вид будет иметь интерференционная картина на всей плоскости экрана?

5.13. Голограмму получают как интерференцию опорной волны, идущей от источника света, и сигнальной — отраженной от

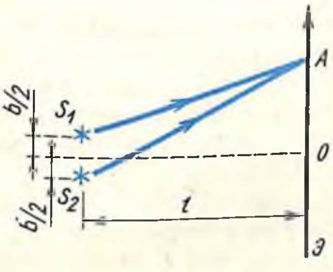


Рис. 5.5

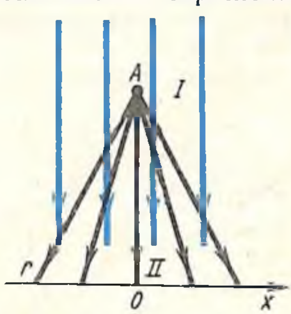


Рис. 5.6

предмета. Все тела могут рассматриваться как совокупности точек, поэтому принципиальный интерес имеет голограмма точки, регистрация которой схематически изображена на рис. 5.6. Здесь: A — точка предмета, Г — фотопластинка, которая после проявления даст голограмму, I — опорная и II — сигнальная волны. Вычислите, на каком расстоянии x от точки O голограммы будут расположены последующие темные (или светлые) линии: пятая x_5, десятая x_{10}, пятнадцатая x_{15}. Линия, проходящая через точку O, считается нулевой. Покажите, что расстояния между соседними однотипными линиями уменьшаются с увеличением x. Для этого найдите $\Delta x_{5,4}=x_5-x_4$, $\Delta x_{10,9}=x_{10}-x_9$; $\Delta x_{15,14}=x_{15}-x_{14}$. Расстояние $AO=50$ см; $\lambda=0,5$ мкм. Какую форму имеют линии голограммы?

5.14. Расстояние между когерентными источниками света $d=0,5$ мм, расстояние от источников до экрана $l=5$ м. В зеленом свете получились интерференционные полосы на расстоянии $\Delta x=5$ мм друг от друга. Найдите длину волны зеленого света.

5.15. Два когерентных источника света ($\lambda=0,5$ мкм) дают на экране интерференционную картину. Как изменится эта картина, если на пути одного из лучей поместить плоскопараллельную стеклянную ($n_2=1,5$) пластинку толщиной $l=10,5$ мкм?

5.16. Выразите условия максимума и минимума интерференции света в тонкой пленке через угол преломления r.

5.17. Покажите, что для интерференции в проходящем свете (лучи *1* и *2*) формула (5.4) соответствует условию минимума, а (5.5) — максимума (рис. 5.7).

5.18. Почему интерференция при отражении от пленки наблюдается более отчетливо (контрастно), чем в проходящем свете?

5.19. На мыльную пленку ($n=1,33$) падает белый свет под углом $i=45°$. При какой наименьшей толщине пленка в отраженном свете будет выглядеть окрашенной в желтый цвет ($\lambda=6\cdot10^{-5}$ см)?

5.20. Мыльная пленка толщиной $l=0,3$ мкм освещается белым светом под углом падения $i=0°$ и рассматривается в отраженном свете. Какого цвета будет при этом мыльная пленка?

Предположить, что цвет пленки определяется длиной волны, на которую приходится максимум интерференции.

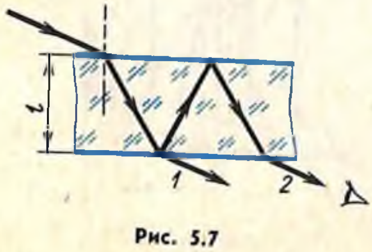


Рис. 5.7

5.21. На мыльную пленку под углом $i=30°$ падает параллельный пучок монохроматического света ($\lambda=600$ нм). При какой минимальной толщине пленки она будет светлой в отраженном свете?

5.22. На толстую стеклянную пластинку, покрытую тонкой пленкой с показателем преломления $n=1,4$, падает нормально параллельный пучок монохроматического света с $\lambda=0,6$ мкм. Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определите минимальную толщину пленки.

5.23. Как на основе интерференции света объяснить переливчатые цвета крыльев некоторых насекомых и птиц?

5.24. Для уменьшения коэффициентов отражения (доли отраженного света) поверхностей оптических деталей на них наносят одну или несколько непоглощающих пленок (просветление оптики). В результате интерференции света, отраженного от передних и задних границ просветляющих пленок, происходит ослабление отраженных волн и усиление проходящего света. При углах падения, близких к нормальному, эффект просветления оптики максимален, если толщина пленки удовлетворяет условию минимума интерференции, а показатель преломления пленки равен $n=\sqrt{n_1 n_2}$, где n_1 и n_2 — показатели преломления сред, граничащих с пленкой. Найдите минимальную толщину пленки и ее показатель преломления при условии, что пленка нанесена на стеклянную поверхность для создания минимального отражения в желто-зеленой области ($\lambda=555$ нм) — области наибольшей чувствительности человеческого глаза.

5.25. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, положенными одна на другую, поместили тонкую проволочку (рис. 5.8). Проволочка находится на расстоянии $l=5$ см от линии соприкосновения пластинок и ей параллельна. На верхнюю пластинку нормально падает монохроматический свет ($\lambda=0,6$ мкм). В отраженном свете на протяжении каждого сантиметра видно 20 интерференционных полос. Найдите толщину проволочки.

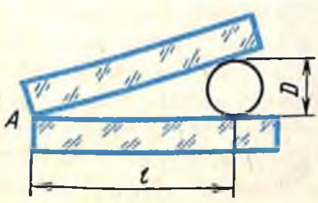


Рис. 5.8

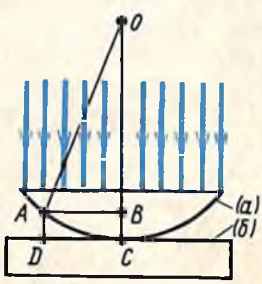


Рис. 5.9

5.26. На стеклянный ($n=1{,}5$) клин падает нормально пучок света ($\lambda=5{,}8\cdot10^{-7}$ м). Угол клина равен 20″. Какое число темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина?

5.27. Плосковыпуклая линза касается плоской стеклянной пластинки (рис. 5.9). На линзу падает параллельный пучок света. Между лучами, отраженными от сферической поверхности линзы (*а*) и от поверхности пластинки (*б*), имеется разность хода, которая зависит от расстояния между линзой и пластинкой. В результате интерференции этих лучей образуются линии равной толщины — темные и светлые кольца (кольца Ньютона), которые можно наблюдать как в отраженном, так и в проходящем свете. Получите выражения для радиусов r_k темных и светлых колец Ньютона в отраженном свете. Известен радиус кривизны R линзы. Между линзой и пластинкой находится воздух.

5.28. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете ($\lambda=$ $=589$ нм) под углом $i=0°$. В некоторой точке толщина воздушного слоя между выпуклой поверхностью линзы и плоской пластинкой $l=1{,}767$ мкм. Какое кольцо — светлое или темное — будет проходить через эту точку?

5.29. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы $R=4$ м. Чему равна длина волны падающего на линзу света, если радиус пятого светлого кольца в отраженном свете $r_5=3{,}6$ мм?

5.30. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы соседних темных колец $r_k=4$ мм и $r_{k+1}=4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы $R=6{,}4$ м. Найдите порядковые номера колец и длину волны падающего света.

5.31. Каково расстояние между десятым и одиннадцатым темными кольцами Ньютона, рассматриваемыми в отраженном монохроматическом свете, если расстояние между первым и вторым темными кольцами равно 0,41 мм?

5.32. Одна из причин, по которой невозможно наблюдать интерференцию в толстых пленках (пластинках), заключается в нестрогой монохроматичности света: интерференционные картины от различных длин волн накладываются друг на друга. Рассчитайте предельную толщину стеклянной ($n=$ $=1{,}5$) плоскопараллельной пластинки для наблюдения интерференции в отраженном свете при нормальном падении лучей. Предположить, что длина волны света изменяется в интервале от $\lambda_1=600$ нм до $\lambda_2=600{,}2$ нм.

5.33. Схема интерферометра, служащего для измерения показателей преломления прозрачных веществ, представлена на рис. 5.10. Здесь: S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом ($\lambda=600$ нм); *1* и *2* — две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых $l=10$ см,

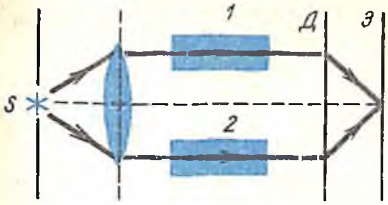


Рис. 5.10

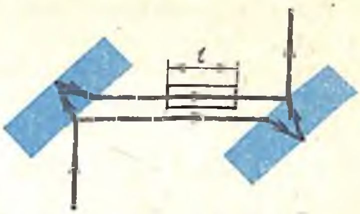


Рис. 5.11

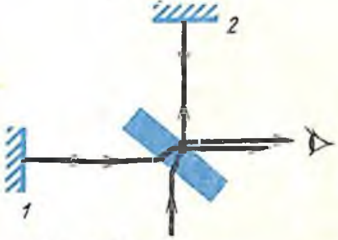
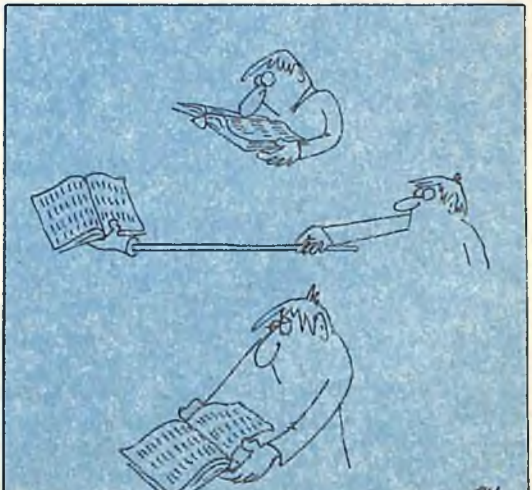


Рис. 5.12

Д — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух ($n = 1{,}000256$) в трубке *1* заменили углекислым газом, то интерференционная картина на экране Э сместилась на $N = 15$ полос. Определите показатель преломления углекислого газа.

5.34. На пути одного из лучей в интерферометре Жамена (рис. 5.11) поместили вакуумированную трубку длиной $l = 7$ см. По мере заполнения этой трубки азотом интерференционная картина сместилась на $N = 57$ полос. Найдите показатель преломления азота при этих условиях. Длина волны света $\lambda = 600$ нм.

5.35. На сколько необходимо переместить одно из зеркал (*1* или *2*) в интерферометре Майкельсона (рис. 5.12) для того, чтобы интерференционная картина сместилась на $N = 150$ полос? Длина волны света $\lambda = 500$ нм.



Опишите недостатки зрения у изображенных персонажей.

4—1680

§ 5.2. Дифракционные явления

Условия максимума в случае дифракции от одной щели при нормальном падении на нее параллельного пучка монохроматического света

$$a \sin \alpha = \pm (2k+1)\lambda/2 \quad (\alpha = 0); \tag{5.8}$$

условие минимума

$$a \sin \alpha = \pm k\lambda, \tag{5.9}$$

где a — ширина щели; $k = 1, 2, 3, \ldots$ — порядковый номер максимума или минимума; α — угол между нормалью к плоскости щели и направлением на максимум или минимум.

Основная формула дифракционной решетки (условие для главных максимумов):

$$c \sin \alpha = \pm k\lambda, \tag{5.10}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ — порядок главных максимумов, c — постоянная (период) дифракционной решетки.

Условие добавочных минимумов для дифракционной решетки

$$c \sin \alpha = \pm \frac{\lambda}{N}, \ \pm \frac{2\lambda}{N}, \ \ldots, \ (N-1)\frac{\lambda}{N}, \ \pm (N+1)\frac{\lambda}{N},$$

$$\pm (N+2)\frac{\lambda}{N}, \ \ldots, \ \pm (2N-1)\frac{\lambda}{N} \text{ и т. д.} \tag{5.11}$$

Угловая дисперсия

$$D = \frac{d\alpha}{d\lambda}. \tag{5.12}$$

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D = \frac{k}{c \cos \alpha}. \tag{5.13}$$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \tag{5.14}$$

где $\Delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)$ — разность предельно разрешимых (различимых) длин волн; N — число щелей решетки.

Условие главных максимумов при наклонном падении света на дифракционную решетку

$$c(\sin \beta - \sin \alpha) = \pm k\lambda, \tag{5.15}$$

где β — угол падения лучей на решетку.

Условие дифракционных максимумов при отражении рентгеновских лучей от кристалла (формула Вульфа—Брэггов):

$$2l \sin \theta = k\lambda, \tag{5.16}$$

где l — межплоскостное расстояние; θ — угол скольжения (угол между отражающей плоскостью и падающими лучами), $k = 1, 2, 3, \ldots$

Предел разрешения микроскопа (при отражении света от объекта) при наклонном падении света на объект

$$Z = 0{,}5\frac{\lambda}{n\sin(u/2)} = 0{,}5\frac{\lambda}{A}, \qquad (5.17)$$

где λ — длина волны в вакууме; n — показатель преломления среды, находящейся между предметом и линзой объектива; u — угловая апертура (угол между крайними лучами конического светового пучка, входящего в оптическую систему); $A = n\sin(u/2)$ — числовая апертура.

5.36. На щель шириной $a = 0{,}2$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}64$ мкм). Определите в угловых единицах ширину центральной светлой полосы. Считать, что границе светлой полосы соответствует минимум.

5.37. На щель падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму минимуму, равен $2°18'$. Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

5.38. Длина волны падающего на щель нормально монохроматического света укладывается в ширине щели 6 раз. Под каким углом будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

5.39. Щель шириной $a = 0{,}1$ мм освещена монохроматическим светом ($\lambda = 500$ нм), падающим нормально, и рассматривается наблюдателем, находящимся за щелью. Что видит глаз наблюдателя, если луч зрения образует с нормалью к поверхности щели угол $17'$? угол $43'$?

5.40. На дифракционную решетку с периодом $c = 0{,}004$ мм падает нормально монохроматический свет. При этом главному максимуму четвертого порядка соответствует отклонение от первоначального направления на угол $\alpha = 30°$. Определите длину волны света.

5.41. Длина волны красной линии кадмия равна 643,8 нм. Каков угол отклонения линии в спектре первого порядка, если дифракционная решетка имеет 5 684 штриха на 1 см? Сколько добавочных минимумов образуется между соседними главными максимумами? Ширина решетки $l = 5$ см.

5.42. Монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм) падает нормально на дифракционную решетку, содержащую 400 штрихов на 1 мм. Определите угол отклонения, соответствующий максимуму наивысшего порядка. Найдите общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка.

5.43. В задаче 5.13 было показано, как формируется голограмма точки. Голограмма состоит из концентрических темных и светлых окружностей с центром в точке O. С возрастанием радиуса расстояние между соседними окружностями уменьшается. Вырежем из голограммы узкую полоску вдоль одного из диаметров окружностей. Полученная часть подобна дифракционной решетке с переменным периодом (рис. 5.13). Освещая эту необычную решетку светом, падающим нормально, можно восстановить изображение. Найдите углы, соответствующие главному максимуму 1-го порядка, для x_5, x_{10} и x_{15}. За период решетки соответственно принимать: $\Delta x_{5.4}$, $\Delta x_{10.9}$ и $\Delta x_{15.14}$, $\lambda = 0{,}5$ мкм. Покажите условно графически тремя лучами, как формируется при этом изображение точки.

Рис. 5.13

5.44. На дифракционную решетку Д нормально к ее поверхности падает параллельный пучок лучей ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Помещенная вблизи решетки линза l проецирует дифракционную картину на плоский экран Э, удаленный от линзы на $l = 1$ м (рис. 5.14). Расстояние между двумя максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, $s = 20{,}2$ см. Определите: а) постоянную дифракционной решетки; б) число штрихов на 1 см; в) теоретически возможное число максимумов, которые способна дать решетка; г) угол отклонения лучей, соответствующий последнему дифракционному максимуму.

5.45. На дифракционную решетку падает нормально свет. При этом максимум второго порядка для линии $\lambda_1 = 0{,}65$ мкм соответствует углу $\alpha_1 = 45°$. Найдите угол, соответствующий максимуму третьего порядка для линии $\lambda_2 = 0{,}50$ мкм.

5.46. Имеется дифракционная решетка с 500 штрихами на 1 мм, освещаемая фиолетовым светом ($\lambda = 0{,}4$ мкм). Определите угловое расстояние между максимумами первого порядка.

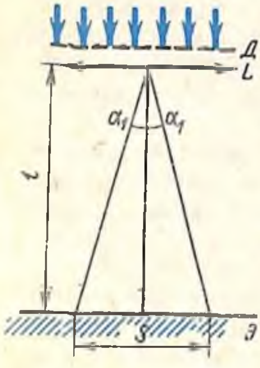


Рис. 5.14

5.47. Дифракционная решетка, имеющая 500 штрихов на 1 мм, дает на экране, отстоящем от линзы на $l = 1$ м, спектр. Определите, на каком расстоянии друг от друга будут находиться фиолетовые границы спектров второго порядка.

5.48. На решетку с постоянной $c = 0{,}006$ мм нормально падает монохроматический свет. Угол между соседними спектрами первого и второго порядков $\Delta\alpha = 4°36'$. Определите длину световой волны. При решении использовать приближенное равенство $\sin\alpha \approx \alpha$.

5.49. Найдите наибольший порядок дифракционного спектра желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм) в дифракционной решетке, содержащей 200 штрихов на 1 мм.

5.50. Могут ли перекрываться спектры первого и второго порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом ($\lambda_ф = 400$ нм и $\lambda_{кр} = 760$ нм)?

5.51. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda = 0{,}4$ мкм) спектра третьего порядка?

5.52. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от газоразрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре четвертого порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_{кр} = 6{,}7 \cdot 10^{-5}$ см) спектра третьего порядка?

5.53. На дифракционную решетку под углом $\beta = 20°$ падает монохроматический свет ($\lambda = 500$ нм). Постоянная дифракционной решетки $c = 2$ мкм. Под какими углами будут расположены главные максимумы второго порядка?

5.54. Определите угловую дисперсию дифракционной решетки для $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка. Постоянная решетки $c = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ см.

5.55. Используя условие задачи **5.53**, вычислите наибольшее, теоретически возможное, число образованных главных максимумов.

5.56. Постоянная дифракционной решетки $c = 0{,}02$ мм, ширина решетки $l = 1$ см. Можно ли, пользуясь этой решеткой, увидеть раздельно в спектре первого порядка дублет желтой линии ртути ($\lambda_1 = 576{,}96$ нм, $\lambda_2 = 579{,}06$ нм)?

5.57. Под углом $\alpha = 30°$ наблюдается четвертый максимум для красной линии кадмия ($\lambda_{кр} = 0{,}644$ мкм). Определите постоянную дифракционной решетки и ее ширину, если она позволяет различить $\Delta\lambda = 0{,}322$ нм.

5.58. Дифракционная решетка с постоянной $c = 3$ мкм имеет $n = 1000$ штрихов. Определите наибольшую разрешающую способность решетки для линии натрия с $\lambda = 589{,}6$ нм.

5.59. Длины волн дублета желтой линии в спектре натрия равны 588,995 и 589,592 нм. Какую ширину должна иметь решетка, содержащая 600 штрихов на 1 мм, чтобы различить эти линии в спектре первого порядка?

5.60. Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}163$ нм падает на кристалл каменной соли. Найдите межплоскостное расстояние кристаллической решетки каменной соли, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается при угле скольжения $\theta = 17°$.

5.61. Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}2$ нм падает на монокристалл. Чему равен угол скольжения, если в спектре второго порядка получен максимум? Межплоскостное расстояние $l = 0,3$ нм.

5.62. Определите предел разрешения микроскопа при наилучших условиях освещения для объектива: а) безыммерсионного с числовой апертурой $A = 0,9$; б) с масляной иммерсией ($n = 1,6$). Расчет произвести для длины волны в вакууме $\lambda = 550$ нм.

5.63. В современных оптических микроскопах апертурный угол достигает наибольшего значения $u = 140°$. Найдите предел разрешения такого микроскопа в двух случаях: а) для наиболее коротковолновой части видимого света; б) для $\lambda = 555$ нм, наиболее чувствительной к глазу. Объектив безыммерсионный (сухая система). Объект освещается наклонным пучком света.

5.64. Во сколько раз можно повысить разрешающую способность микроскопа, перейдя к фотографированию в ультрафиолетовых лучах ($\lambda_1 = 270$ нм) по сравнению с фотографированием в зеленых лучах ($\lambda_2 = 550$ нм)?

5.65. Нормальный глаз человека на расстоянии наилучшего зрения различает две точки, удаленные одна от другой на 70 мкм. Размер изображения на сетчатке в этом случае равен среднему расстоянию между двумя колбочками. Оцените, исходя из формулы (5.17), предел разрешения глаза, принимая диаметр зрачка $d = 2$ мм, а длину волны $\lambda = 555$ нм. Формула (5.17) получена из самых общих изображений дифракционной теории, поэтому ее можно использовать и для глаза.

5.66. В каком случае большую роль играет дифракция в глазу: при большей или меньшей яркости света? Чем объясняется нерезкость изображений в сумерках?

§ 5.3. Поляризация света

Интенсивность света, вышедшего из анализатора (закон Малюса)

$$I = I_0 \cos^2 \varphi , \tag{5.18}$$

где I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; φ — угол между плоскостью поляризации поляризованного света и главной плоскостью анализатора.

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_Б = n , \tag{5.19}$$

где n — относительный показатель преломления двух сред; $i_Б$ — угол полной поляризации.

Угол поворота плоскости поляризации:

в оптически активном веществе

$$\alpha = \alpha_0 l; \tag{5.20}$$

в растворе

$$\alpha = [\alpha_0] c l, \tag{5.21}$$

где α_0 — постоянная вращения (вращательная способность), $[\alpha_0]$ — удельное вращение, c — концентрация раствора оптически активного вещества, l — толщина слоя оптически активного вещества или раствора.

5.67. Два николя расположены так, что угол между их главными плоскостями составляет $\varphi = 60°$. Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении его: 1) через один николь; 2) через оба николя? При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение составляют 5%.

5.68. Чему равен угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через эти призмы, уменьшилась в 4 раза? Поглощением света пренебречь.

5.69. Главные плоскости двух призм Николя, поставленных на пути луча, образуют между собой угол $\varphi_1 = 60°$. Как изменится интенсивность света, прошедшего через эти призмы, если угол между их плоскостями поляризации станет равным $\varphi_2 = 30°$?

5.70. Во сколько раз ослабляется естественный свет, проходя через два николя, главные плоскости которых составляют угол $\varphi = 30°$, если в каждом из николей на отражение и поглощение теряется 10% падающего на него светового потока?

5.71. В фотометре одновременно рассматриваются две половины поля зрения: в одной видна эталонная светящаяся поверхность с освещенностью $E_1 = 100$ лк, в другой — испытуемая поверхность, свет от которой проходит через два николя. Граница между обеими половинами поля зрения исчезает, если второй николь повернуть относительно первого на угол $\lambda = 45°$. Найдите освещенность испытуемой поверхности, если известно, что в каждом из николей теряется 10% падающего на него света. Считать освещенность пропорциональной интенсивности света.

5.72. Между двумя скрещенными поляроидами размещается третий поляроид так, что его главная плоскость составляет угол $\varphi = 45°$ с главной плоскостью первого поляроида. Как изменится интенсивность естественного света, проходящего через такое устройство? Поглощением света в поляроидах пренебречь.

5.73. Пучок естественного света падает на систему из 4 николей, главная плоскость каждого из которых повернута на угол $\varphi = 60°$ относительно главной плоскости предыдущего николя. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, проходящего через эту систему? Поглощением света пренебречь.

5.74. Угол преломления луча в жидкости $r = 35°$. Определите показатель преломления жидкости, если известно, что отраженный луч максимально поляризован.

5.75. Свет падает под углом полной поляризации на границу раздела двух сред. Какой угол образуют между собой отраженный и преломленный лучи?

5.76. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности моря, были бы полностью поляризованы?

5.77. Предельный угол полного отражения для некоторого вещества равен $i_{пр} = 60°$. Чему равен для этого вещества угол полной поляризации? Какова скорость света в этом веществе?

5.78. При переходе луча света из стекла в воду предельный угол оказался равным $i_{пр} = 62°$. Под каким углом на поверхность стекла должен падать луч, идущий в воде, чтобы отраженный луч был полностью поляризован?

5.79. Пучок плоскополяризованного света, длина волны которого $\lambda = 650$ нм, падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно его оптической оси. Найдите длины волн обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_0 = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$.

5.80. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси кристалла. Толщина пластинки $l = 0{,}2$ мм. Показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_0 = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$. Определите, чему равна разность хода обоих лучей при выходе из пластинки.

5.81. Пучок монохроматического света падает нормально на пластинку кристаллического кварца, вырезанную параллельно оптической оси. Определить толщину пластинки, при которой произойдет сдвиг фаз обыкновенной и необыкновенной волн на 90°?

Для используемого света ($\lambda = 600$ нм) показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_0 = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$.

5.82. Определите толщину кварцевой пластинки, для которой угол поворота плоскости поляризации света с длиной волны $\lambda = 500$ нм равен $\alpha = 48°$. Постоянная вращения кварца для этой длины волны $\alpha_0 = 30°/мм$.

5.83. Между скрещенными николями поместили пластинку кварца толщиной $l = 3$ мм, в результате чего поле зрения стало максимально светлым. Определите постоянную вращения используемого в опыте кварца для монохроматического света.

5.84. Естественный свет проходит через систему из двух скрещенных поляроидов, между которыми расположена кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно оптической оси. Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет с длиной волны $\lambda_1 = 436$ нм будет полностью задерживаться этой системой, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 497$ нм пропускаться наполовину. Постоянная вращения кварца для этих длин волн равна $\alpha_0' = 41{,}5$ град/мм и $\alpha_0'' = 31{,}1$ град/мм.

5.85. Определите удельное вращение раствора сахара, концентрация которого $c = 0{,}33$ г/см^3, если при прохождении монохроматического света через трубку с раствором угол поворота плоскости поляризации $\alpha = 22°$. Длина трубки $l = 10$ см.

5.86. Определите угол поворота плоскости колебания светового луча для мочи больного диабетом при концентрации сахара $c = 0{,}05$ г/см^3. Длина трубки $l = 20$ см, удельное вращение сахара для используемого света $[\alpha_0] = 6{,}67$ град $\cdot$ см^2/г.

5.87. Раствор сахара, налитый в трубку длиной $l = 20$ см и помещенный между поляризатором и анализатором, поворачивает плоскость поляризации света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) на $\alpha = 30°$. Найдите (в граммах на кубический сантиметр) концентрацию сахара в растворе, если удельное вращение сахара для этой длины волны $[\alpha_0] = 6{,}67$ град $\cdot$ см^2/г.

5.88. При прохождении света через слой 10%-ного раствора сахара толщиной $l_1 = 10$ см плоскость поляризации света повернулась на угол $\alpha_1 = 16°30'$. В другом растворе сахара, взятом в слое толщиной $l_2 = 25$ см, плоскость поляризации повернулась на угол $\alpha_2 = 33°$. Найдите концентрацию второго раствора.

5.89. Между скрещенными поляризатором и анализатором находится стеклянная трубка длиной $l = 30$ см, заполненная раствором сахара. При каких концентрациях раствора сахара можно наблюдать максимальное просветление поля зрения анализатора? Удельное вращение раствора сахара для используемого света $[\alpha_0] = 6{,}82$ град $\cdot$ см^2/г, а максимальная концентрация сахара $c = 2$ г/см^3.

§ 5.4. Тепловое излучение тел. Фотоны

Спектральная плотность энергетической светимости

$$r_{e\lambda}=\frac{\mathrm{d}R_{e\lambda}}{\mathrm{d}\lambda} \text{ или } r_{e\nu}=\frac{\mathrm{d}R_{e\nu}}{\mathrm{d}\nu}, \qquad (5.22)$$

где $\mathrm{d}R_{e\lambda}$ (или $\mathrm{d}R_{e\nu}$) — энергетическая светимость, соответствующая небольшому интервалу длин волн $\mathrm{d}\lambda$ (или соответствующему интервалу частот $\mathrm{d}\nu$).

Энергетическая светимость тела

$$R_e=\int_0^\infty r_{e\lambda}\mathrm{d}\lambda \text{ или } R_e=\int_0^\infty r_{e\nu}\mathrm{d}\nu. \qquad (5.23)$$

Коэффициент поглощения

$$\alpha=\frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}}, \qquad (5.24)$$

где $\Phi_{\text{погл}}$ — поток излучения, поглощенного данным телом; $\Phi_{\text{пад}}$ — поток излучения, падающего на тело. Тело, для которого $\alpha=1$, называют черным. Тело, для которого $\alpha<1$ и не зависит от λ, называют серым.

Закон Кирхгофа

- $$\left(\frac{r_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)_1=\left(\frac{r_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)_2=\ldots=\varepsilon_\lambda, \qquad (5.25)$$

где индексы 1, 2 и т. д. означают различные тела, ε_λ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела.

Формула Планка

- $$\varepsilon_\lambda=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)}-1}, \text{ или } \varepsilon_\nu=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}, \qquad (5.26)$$

где h — постоянная Планка.

Закон Стефана — Больцмана

- $$R_e=\sigma T^4, \qquad (5.27)$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела, T — термодинамическая температура этого тела, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Закон Вина

- $$\lambda_{\max}=b/T, \qquad (5.28)$$

где $\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного (серого) тела; b — постоянная Вина.

Энергия, масса и импульс фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (5.29)$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}, \qquad (5.30)$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (5.31)$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + {}^1/_2 mv^2, \qquad (5.32)$$

где $h\nu$ — энергия фотона; ${}^1/_2 mv^2$ — максимальная кинетическая энергия электрона, вылетевшего из металла; A — работа выхода электрона из металла.

5.90. Спектральная плотность энергетической светимости черного тела в некотором интервале длин волн равна $\varepsilon_\lambda = 3 \times 10^4$ Вт/(м^2·нм). Определите соответствующую спектральную плотность энергетической светимости серого тела, имеющего ту же температуру и коэффициент поглощения $\alpha = 0{,}8$?

5.91. При какой температуре энергетическая светимость черного тела равна $R_e = 500$ Вт/м^2?

5.92. При какой температуре энергетическая светимость серого тела равна $R_e = 500$ Вт/м^2? Коэффициент поглощения $\alpha = 0{,}5$.

5.93. Определите энергию, излучаемую через смотровое окошко печи в течение $t = 1$ мин. Температура печи $T = 1\,500$ К, площадь смотрового окошка $S = 10$ см^2. Считать, что печь излучает как черное тело.

5.94. Найдите температуру печи, если известно, что из отверстия в ней площадью $S = 6$ см^2 излучается 7 кал в 1 с. Считать излучение близким к излучению черного тела.

5.95. Поверхность черного тела нагрета до температуры $T = 1\,000$ К. Во сколько раз изменится мощность излучения этого тела, если половину поверхности нагреть, а другую половину охладить на $\Delta T = 100$ К?

5.96. Определите энергетическую светимость тела человека при температуре $t = 36$°C, принимая его за серое тело с коэффициентом поглощения $\alpha = 0{,}9$.

5.97. Как объяснить, что железо при температуре 800°C светится, а кварц при той же температуре не светится?

5.98. Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров, равных $D = 1$ см, и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Отверстия расположены друг против друга, расстояние между ними $l = 10$ см. В одной полости поддерживается температура $T = 1\,700$ К. Вычислите установившуюся температуру в другой полости.

5.99. Считая Солнце черным телом с температурой поверхности $T = 5\,800$ К, найдите солнечную постоянную. Радиус Солнца $r = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, расстояние от Земли до Солнца $l = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

5.100. Используя данные задачи **5.99**, найдите энергию и массу, ежесекундно теряемые Солнцем при излучении.

5.101. Вычислите энергию, теряемую человеком ежесекундно при теплообмене лучеиспусканием (и поглощением) с окружающей средой. Рассмотрите два случая: а) раздетый человек; б) человек, одетый в костюм из шерстяной ткани. Принять коэффициент поглощения кожи человека $\alpha_1 = 0{,}9$, шерстяной ткани $\alpha_2 = 0{,}76$; температуры поверхности кожи $t_1 = 30°C$, поверхности ткани $t_2 = 20°C$ и окружающего воздуха $t_3 = 18°C$. Площадь поверхности, через которую осуществляется теплообмен лучистой энергией с окружающей средой, считать равной $S = 1{,}2$ м^2.

5.102. Найдите связь между относительным изменением температуры излучающего серого тела ($\mathrm{d}T/T$) и соответствующим относительным изменением его энергетической светимости ($\mathrm{d}R_e/R_e$). Считать $\mathrm{d}T \ll T$.

5.103. Температура черного тела $T = 1\,000$ К. На сколько процентов изменится его энергетическая светимость при повышении температуры на $\Delta T = 1$ К?

5.104. В медицине для диагностики ряда заболеваний получил распространение метод, называемый термографией. Он основан на регистрации различия теплового излучения здоровых и больных органов, обусловленного небольшим отличием их температур. Вычислите, во сколько раз отличаются термодинамические температуры и энергетические светимости участков поверхности тела человека, имеющих температуры 30,5 и 30,0°С соответственно.

5.105. На какую длину волны приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости следующих источников теплового излучения: а) тело человека с температурой поверхности кожи $t = 30°C$; б) спираль электрической лампочки ($T = 2\,000$ К); в) поверхность Солнца ($T = 5\,800$ К); г) атомная бомба, имеющая в момент взрыва температуру $T \approx 10^7$ К. Излучающие тела считать черными или серыми.

5.106. Вследствие изменения температуры серого тела максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился с $\lambda_1 = 2\,400$ нм на $\lambda_2 = 800$ нм. Во сколько раз изменится энергетическая светимость тела?

5.107. Из закона Вина (5.26) получите зависимости: а) между изменением температуры dT тела и изменением длины волны $d\lambda_{max}$, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости; б) между относительным изменением температуры тела (dT/T) и относительным изменением длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости ($d\lambda_{max}/\lambda_{max}$). Считать $dT \ll T$.

5.108. На сколько сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости при изменении температуры поверхности тела человека от $t_1 = 30$ и до $t_2 = 31\,°C$? Тело человека считать серым. При решении можно воспользоваться формулой, выведенной в задаче **5.107.**

5.109. Покажите, как можно из формулы Планка для ε_λ получить формулу для ε_ν.

5.110. Определите массу, энергию и импульс фотонов излучения: а) красного ($\lambda_1 = 700$ нм), б) фиолетового ($\lambda_2 = 400$ нм) и в) рентгеновского ($\lambda_3 = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м).

5.111. Подсчитайте число фотонов зеленого света ($\lambda = 550$ нм), энергия которых $E = 1$ Дж.

5.112. Какое количество фотонов света с длиной волны $\lambda = 500$ нм соответствует энергии $E = 10$ эВ?

5.113. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью $v = 10^4$ км/с.

5.114. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

5.115. Электрон движется со скоростью $v = 10^8$ см/с. В результате торможения электрона в электрическом поле атома он останавливается и испускает один фотон. Определите длину волны испускаемого света.

5.116. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 500$ нм?

5.117. Определите число фотонов, излучаемых в 1 с Солнцем в интервале длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм с 1 м^2 вблизи максимума спектральной плотности энергетической светимости. Температура поверхности Солнца равна 5 800 K.

5.118. При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы равна энергии фотона красного излучения ($\lambda = 700$ нм)?

5.119. Покажите с помощью законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может поглотить фотон.

5.120. Определите красную границу фотоэффекта для цинка и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Работа выхода для цинка $A = 3{,}74$ эВ.

5.121. Пригоден ли барий для использования в фотоэлементе при облучении видимым светом, если работа выхода для бария $A = 2{,}5$ эВ?

5.122. Определите (в электронвольтах) работу выхода электрона из рубидия, если красная граница фотоэффекта для рубидия $\lambda_{кр} = 0{,}81$ мкм.

5.123. Работа выхода электрона из лития $A = 2{,}5$ эВ. Будет ли фотоэффект при освещении лития монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 50$ нм?

5.124. Красная граница фотоэффекта у вольфрама $\lambda_{кр} = 230$ нм. Определите кинетическую энергию электронов, вырываемых из вольфрама ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 150$ нм.

5.125. Красная граница фотоэффекта для калия $\lambda_{кр} = 620$ нм. Чему равна минимальная энергия фотона, вызывающего фотоэффект?

5.126. Найдите красную границу фотоэффекта для лития, если работа выхода $A = 2{,}4$ эВ.

5.127. Определите частоту света, вырывающего с поверхности металла электроны, полностью задерживающиеся при разности потенциала $U = 5$ В. Красная граница фотоэффекта $\nu_{кр} = 10^{15}$ с$^{-1}$. Найдите работу выхода электрона из этого металла.

Физика атомов и молекул. Элементы квантовой биофизики

Глава шестая

§ 6.1. Волновые свойства частиц. Энергетические уровни атомов и молекул

Длина волны, связанная с частицей, обладающей импульсом $p=mv$, (длина волны де Бройля)

$$\lambda = h/(mv), \tag{6.1}$$

где m — масса частицы, v — ее скорость, h — постоянная Планка.

Предел разрешения электронного микроскопа

$$z = 0{,}5 \frac{h}{\sqrt{2emU}\sin(u/2)}, \tag{6.2}$$

где U — ускоряющее напряжение, u — угловая апертура, m и e — масса и заряд электрона.

Соотношения неопределенностей:

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h/(2\pi),\ \Delta y \Delta p_y \geqslant h/(2\pi),\ \Delta z \Delta p_z \geqslant h/(2\pi), \tag{6.3}$$

где Δx, Δy, Δz — неопределенность (неточность) координаты; Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенность в определении проекции импульса частицы на соответствующую ось координат;

$$\Delta E \Delta t \geqslant h/(2\pi), \tag{6.4}$$

где ΔE — неопределенность энергии некоторого состояния системы, Δt — время его существования.

Уравнение Шредингера для стационарного состояния (одномерный случай)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_p)\psi = 0, \tag{6.5}$$

где ψ — волновая функция, для уравнения (6.5) ψ зависит от x; E и E_p — полная и потенциальная энергии частицы.

Энергия электрона, соответствующая состоянию с главным квантовым числом n ($n = 1, 2, 3, \ldots$),

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2}. \qquad (6.6)$$

где e — заряд электрона; Z — порядковый номер элемента в периодической системе элементов Менделеева.

Момент импульса электрона относительно ядра

$$L_l = \frac{h}{2\pi}\sqrt{l(l+1)}, \qquad (6.7)$$

где l — орбитальное квантовое число ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Проекция момента импульса электрона на некоторое произвольно выбранное направление z (обычно направление индукции магнитного поля)

$$L_{lz} = \frac{h}{2\pi} m_l, \qquad (6.8)$$

где m_l — магнитное квантовое число ($m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$).

Проекция спина электрона на направление индукции магнитного поля

$$L_{sz} = \frac{h}{2\pi} m_s, \qquad (6.9)$$

где m_s — спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$).

Частота света, излучаемого (поглощаемого) атомом водорода,

$$\nu = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right), \qquad (6.10)$$

где i и k — порядковые номера уровней, между которыми происходит квантовый переход. При $n_k = 1$, $n_i = 2, 3, 4, \ldots$ формула соответствует линиям серии Лаймана; при $n_k = 2$, $n_i = 3, 4, 5, \ldots$ — серии Бальмера; при $n_k = 3$, $n_i = 4, 5, 6, \ldots$ — серии Пашена.

Расстояние между подуровнями энергии атома, помещенного в магнитное поле с индукцией B,

$$\Delta E = g\mu_Б B, \qquad (6.11)$$

где g — множитель Ланде; $\mu_Б$ — магнетон Бора.

6.1. Чему равна длина волны де Бройля для электрона, имеющего скорость $v = 1\,000$ км/с?

6.2. Сравните длины волн де Бройля для электрона и шарика массой $m = 1$ г, если их скорость одинакова и равна $v = 100$ м/с.

6.3. Найдите длину волны де Бройля для нейтрона, находящегося в термодинамическом равновесии в среде с температурой $t = 20°С$.

6.4. В трубке цветного телевизора ускоряющее напряжение $U = 20$ кВ. Чему равна длина волны де Бройля для электрона в конце процесса ускорения?

6.5. Найдите предел разрешения электронного микроскопа, принимая, что ускоряющее напряжение $U = 100$ кВ, а угловая апертура $u = 10^{-2}$ рад. Расчет произвести для двух случаев: а) без учета релятивистского изменения массы электрона; б) с учетом его.

6.6. Электрон пролетает через щель шириной $l = 1$ мкм. С какой наименьшей погрешностью в момент пролета щели может быть определена составляющая импульса электрона на ось Ox?

6.7. Проекция скорости электрона на некоторое направление может быть определена с наименьшей погрешностью $\Delta v = 10$ м/с. Какова (принципиально) неточность соответствующей координаты электрона?

6.8. Длительность возбужденного состояния атома водорода соответствует примерно $\Delta t = 10^{-8}$ с. Чему равна неопределенность ΔE энергетического уровня при этом?

6.9. Метастабильными состояниями квантовых систем называются такие возбужденные состояния атомов, молекул и атомных ядер, которые могут существовать длительное время. Чему равна неопределенность энергии в метастабильном состоянии, если время жизни для атома в этом состоянии $\Delta t = 0{,}5$ с?

6.10. Покажите, что решение уравнения Шредингера для электрона в потенциальной яме приводит к дискретным значениям энергии. Рассмотрите одномерный случай, электрон движется вдоль оси Ox. Потенциальная энергия электрона равна нулю в области $0 \leqslant x \leqslant l$, вне этой области она должна быть бесконечно большой, поэтому электрона там нет.

6.11. Найдите энергию и момент импульса электрона в атоме водорода, соответствующие состоянию $1s$, $2s$, $2p$.

6.12. Найдите проекции момента импульса электрона на направление индукции магнитного поля, соответствующие $l = 2$.

6.13. Найдите проекции спина электрона на направление индукции магнитного поля.

6.14. Найдите границы серии Лаймана (в частотах и длинах волн). Сопоставьте эти данные с интервалом частот и длин волн видимого света.

6.15. Найдите границы серии Бальмера (в частотах и длинах волн). Сопоставьте эти данные с интервалом частот и длин волн видимого света.

6.16. Интенсивность монохроматического света, обусловленного переходом атома со второго уровня на первый в серии Лаймана равна 1 нВт. Сколько фотонов в секунду создают такую интенсивность? Тот же вопрос для линии серии Бальмера, соответствующей переходу с третьего уровня на второй.

6.17. Считая, что в возбужденном состоянии атом находится время $\Delta t = 10^{-8}$ с, вычислите ширину линий (в $\Delta\lambda$) серий Лаймана и Бальмера, указанных в условии задачи 6.16.

6.18. Найдите расстояние между подуровнями энергии атома, помещенного в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл; фактор g принять равным двум. Какой частоте и длине волны электромагнитного излучения соответствует переход с одного подуровня на другой?

6.19. В радиоспектрометре электронного парамагнитного резонанса поглощаемая высокочастотная электромагнитная энергия соответствует длине волны $\lambda = 3$ см. При какой индукции постоянного магнитного поля будет наблюдаться электронный парамагнитный резонанс? Принять $g = 2$.

§ 6.2. Взаимодействие света с веществом. Люминесценция

Интенсивность света, вышедшего из слоя вещества толщиной l после поглощения (закон Бугера),

● $I_l = I_0 e^{-\chi l}$, **(6.12)**

где I_0 — интенсивность света, падающего на слой поглощающего вещества; χ — натуральный показатель поглощения.

Если закон (6.12) записывается для монохроматического света, то коэффициент χ называют монохроматическим натуральным показателем поглощения.

Закон Бугера

● $I_l = I_0 \cdot 10^{-\chi' l}$, **(6.13)**

где $\chi' \approx 0{,}43\chi$ — показатель поглощения.

Закон Бугера — Ламберта — Бера

● $I_l = I_0 e^{-\chi_1 c l}$, **(6.14)**

или

$I_l = I_0 \cdot 10^{-\chi_1' c l}$, **(6.15)**

или

$I_l = I_0 e^{-\varepsilon C l}$, **(6.16)**

где χ_1 и χ_1' — натуральный (или монохроматический натуральный) показатель поглощения и показатель поглощения света на единицу концентрации вещества, c — концентрация растворенного вещества, ε — молярный показатель поглощения, C — молярная концентрация.

Коэффициент пропускания τ равен отношению интенсивностей света, прошедшего сквозь данное тело (или раствор) и упавшего на это тело,

$$\tau = I_l / I_0. \qquad (6.17)$$

Оптическая плотность раствора

$$D = \lg\left(\frac{1}{\tau}\right) = \lg\left(\frac{I_0}{I_l}\right) = \chi_1' c l. \qquad (6.18)$$

Закон ослабления интенсивности света вследствие рассеяния

$$I_l = I_0 \cdot 10^{-k'l}, \qquad (6.19)$$

где k' — показатель рассеяния.

Закон ослабления интенсивности света вследствие совместного действия поглощения и рассеяния

$$I_l = I_0 \cdot 10^{-\mu'l}, \qquad (6.20)$$

где $\mu' = \chi' + k'$ — показатель ослабления.

Формула Хиски

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{s_0}{s_1}\right)^r. \qquad (6.21)$$

Здесь I_0 и I_1 — интенсивности излучения, прошедшего через раствор сравнения и исследуемый раствор; s_0 и s_1 — ширина щели монохроматора при исследовании раствора сравнения и изучаемого раствора соответственно; r — чувствительность спектрофотометра.

Интенсивность люминесценции вещества

$$I_л = 2{,}3 I_0 \varphi D, \qquad (6.22)$$

где I_0 — интенсивность возбуждающего света, φ — квантовый выход люминесценции, D — оптическая плотность образца.

Время жизни молекулы в возбужденном состоянии

$$\ln \frac{I_{л0}}{I_{лt}} = \frac{t}{\tau}, \qquad (6.23)$$

где $I_{л0}$ — интенсивность люминесценции в начальный момент времени и $I_{лt}$ в момент времени t после начала измерения.

Формула Штерна — Фольмера

$$\frac{U}{U_т} = 1 + k\tau C_т \qquad (6.24)$$

где U и $U_т$ — наблюдаемая величина при отсутствии тушителя флуоресценции и вместе с ним; $C_т$ — молярная концентрация тушителя; τ — время жизни молекулы в возбужденном состоянии; $k = 10^9$ М$^{-1}\cdot$с$^{-1}$. Если $r \approx 1$ нс, то наблюдается синглетный механизм тушения флуоресценции, если $\tau \approx 1$ мкс, то тушение флуоресценции происходит по триплетному механизму.

6.20. Пучок монохроматического света проходит через стеклянную пластинку толщиной $l = 1$ см. Определите монохроматический натуральный показатель поглощения и монохроматический показатель поглощения стекла, если при этом поглощается 0,1 падающего света. Какой толщины должна быть стеклянная пластинка, чтобы поглотилась половина падающего света?

6.21. При прохождении света с длиной волны λ_1 через слой вещества его интенсивность уменьшается вследствие поглощения в 4 раза. Интенсивность света с длиной волны λ_2 по той же причине ослабляется в 3 раза. Найдите толщину слоя вещества и показатель поглощения для света с длиной волны λ_2, если для света с длиной волны λ_1 он равен $\chi_1' = 0{,}02\ см^{-1}$.

6.22. Через пластинку из прозрачного вещества толщиной $l = 4{,}2$ см проходит половина падающего на нее светового потока. Определите натуральный показатель поглощения данного вещества. Рассеянием света в пластинке пренебречь; считать, что 10% падающей энергии отражается на поверхности пластинки.

6.23. В 4%-ном растворе вещества в прозрачном растворителе интенсивность света на глубине $l_1 = 20$ мм ослабляется в 2 раза. Во сколько раз ослабляется интенсивность света на глубине $l_2 = 30$ мм в 8%-ном растворе того же вещества?

6.24. Какова концентрация раствора, если одинаковая освещенность фотометрических полей была получена при толщине $l_1 = 8$ мм у эталонного 3%-ного раствора и $l_2 = 24$ мм — у исследуемого раствора?

6.25. Коэффициент пропускания раствора $\tau = 0{,}3$. Чему равна его оптическая плотность?

6.26. Оптическая плотность раствора $D = 0{,}08$. Найдите его коэффициент пропускания.

6.27. При прохождении света через слой раствора поглощается $^1/_3$ первоначальной световой энергии. Определите коэффициент пропускания и оптическую плотность раствора.

6.28. При прохождении монохроматического света через слой вещества толщиной $l = 15$ см его интенсивность убывает в 4 раза. Определите показатель рассеяния, если показатель поглощения $\chi' = 0{,}025\ см^{-1}$.

Что общего в этих рисунках?

6.29. Вычислите толщину слоя половинного ослабления параллельного пучка γ-излучения для воды, если натуральный показатель ослабления $\mu' = 0{,}053\ \text{см}^{-1}$.

6.30. Интенсивность света, прошедшего через раствор, уменьшилась в 10 раз. Известно, что данное вещество имеет молярный показатель поглощения на данной длине волны, равный 500. Длина кюветы с раствором 1 см. Найдите концентрацию вещества в растворе.

6.31. Чему равен молярный показатель поглощения вещества, на длине волны 400 нм, если при прохождении света через раствор с концентрацией 0,5 М интенсивность света уменьшилась в 10 раз? Длина кювета 0,3 см.

6.32. При использовании метода дифференциальной спектрофотометрии оказалось, что интенсивности света, прошедшего через исследуемый раствор и раствор сравнения, относятся как 1 : 2. Ширина щели монохроматора, через которую проходил луч в кювету с исследуемым раствором, равна 0,052 см. Определите ширину щели монохроматора, через которую шел свет в кювету с раствором сравнения, если чувствительность спектрофотометра равна 2,0.

6.33. Ширина щели монохроматора для раствора сравнения равна 0,1 мм, для исследуемого раствора — 0,038 мм. Чувствительность спектрофотометра 2,0. Чему равна оптическая плотность исследуемого раствора?

6.34. Определите квантовый выход люминесценции вещества, если его оптическая плотность равна 0,06, а интенсивность люминесценции в 5 раз меньше интенсивности возбуждающего света.

6.35. Активность фермента уменьшилась в 10 раз при добавлении в раствор инкубации тушителя флуоресценции с конечной концентрацией 10^{-4} М. Определите, каким был механизм тушения флуоресценции (триплетным или синглетным), если константа тушения $k = 10^9\ \text{М}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$.

6.36. Во сколько раз уменьшится интенсивность флуоресценции триптофана в сывороточном альбумине человека, если в раствор был добавлен тушитель флуоресценции в концент-

рации 10^{-3} M, а реакция тушения идет по синглетному типу.

6.37. Активность АТФ-азы уменьшилась в 2 раза. Какова концентрация тушителя флуоресценции в растворе инкубации, если реакция тушения идет по триплетному типу?

6.38. Интенсивность флуоресценции триптофана в 10^{-6} M растворе сывороточного альбумина человека, содержащего 17 остатков тирозина на молекулу, составляет 10 единиц. Чему равна интенсивность флуоресценции триптофана при увеличении концентрации альбумина на порядок, если люминесценция возбуждается при 280 нм, при этом молярный показатель поглощения тирозина равен 5000 л/(моль·см), а толщина кюветы составляет 1 см?

6.39. Как изменится интенсивность люминесценции при увеличении оптической плотности образца при длине волны возбуждающего света с 1 до 100?

Ионизирующее излучение. Основы дозиметрии

Глава седьмая

§ 7.1. Рентгеновское излучение

Граница спектра тормозного рентгеновского излучения

$$\lambda_{min} = 1{,}23/U, \tag{7.1}$$

где U — напряжение в рентгеновской трубке, кВ; λ_{min} в нм.

Поток рентгеновского излучения

$$\Phi = kIU^2Z, \tag{7.2}$$

где I и U — сила тока и напряжение в рентгеновской трубке, Z — порядковый номер элемента вещества анода, $k = 10^{-9}\ \text{В}^{-1}$.

Массовый коэффициент ослабления рентгеновского излучения

$$\mu_m = k\lambda^3Z^3, \tag{7.3}$$

где k — коэффициент пропорциональности, λ — длина волны, Z — порядковый номер элемента вещества-поглотителя.

Линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения

$$\mu = \mu_m\rho, \tag{7.4}$$

где ρ — плотность вещества.

7.1. Найдите границу тормозного рентгеновского излучения (частоту и длину волны) для напряжений $U_1 = 2$ кВ и $U_2 = 20$ кВ. Во сколько раз энергия фотонов этих излучений больше энергии фотона, соответствующего $\lambda = 760$ нм (красный цвет)?

7.2. В каком случае произойдет большее увеличение потока рентгеновского излучения: при увеличении вдвое силы тока, но сохранении напряжения или, наоборот, при увеличении вдвое напряжения, но сохранении силы тока? Как можно увеличить силу тока, не изменяя напряжения в рентгеновской трубке? Проанализируйте процессы, которые происходят при изменении силы тока, при изменении напряжения.

7.3. Найдите поток рентгеновского излучения при $U = 10$ кВ, $I = 1$ мА. Анод изготовлен из вольфрама. Скольким фотонам в секунду соответствует этот поток, если допустить, что излучается электромагнитная волна, длина которой равна $^3/_2$ от длины волны, соответствующей границе спектра тормозного рентгеновского излучения.

7.4. Считая, что поглощение рентгеновского излучения не зависит от того, в каком соединении атом представлен в веществе, определите, во сколько раз массовый коэффициент ослабления кости ($Ca(PO_4)_2$) больше массового коэффициента ослабления воды?

7.5. Для рентгенодиагностики мягких тканей применяют контрастные вещества. Например, желудок и кишечник заполняют кашеобразной массой сульфата бария $BaSO_4$. Сравните массовые коэффициенты ослабления сульфата бария и мягких тканей (воды).

§ 7.2. Ядро. Радиоактивность

Энергия связи ядра

$$\Delta E_{св} = 931{,}5[Zm_н + (A - Z)m_n - m_а], \quad (7.5)$$

где $m_Н$, m_n, $m_а$ — массы соответственно изотопа водорода ^1H, нейтрона и атома, а. е. м.; Z — число протонов в ядре (порядковый номер элемента), A — число нуклонов в ядре (массовое число); $\Delta E_{св}$ выражается в мегаэлектрон-вольтах.

Основной закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (7.6)$$

где N_0 — начальное число радиоактивных ядер, N — их число к моменту времени t,

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2} \quad (7.7)$$

— постоянная распада, $T_{1/2}$ — период полураспада.

Изменение активности препарата со временем

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (7.8)$$

7.6. Найдите энергию связи ядра урана $^{238}_{92}U$ и энергию связи, приходящуюся на один нуклон.

7.7. Найдите энергию связи ядер изотопа водорода, дейтерия и трития. Чему равна энергия связи, приходящаяся на один нуклон?

7.8. Запишите реакции образования радиоактивного азота $^{13}_{7}N$ из устойчивого изотопа бора $^{10}_{5}B$ при искусственной β-радиоактивности. Каким превращениям будет подвергаться $^{13}_{7}N$?

7.9. Вычислите число ядер $^{130}_{53}I$, распавшихся в течение первых суток, если первоначальное число ядер $N_0 = 10^{22}$.

7.10. Каким образом искусственная β-радиоактивность приводит к образованию $^{30}_{14}Si$ из алюминия $^{27}_{13}Al$?

7.11. Как получить из ртути золото?

7.12. Почему α-частицы, испускаемые радиоактивными препаратами, не могут вызвать ядерных реакций в тяжелых элементах?

7.13. Сколько ядер урана $^{238}_{92}U$ распалось в течение года, если первоначальная масса урана $m = 1$ г?

7.14. Сколько ядер из одного моля радиоактивного кобальта $^{60}_{27}Co$ распадается за первый месяц, второй, третий?

7.15. Выразите через постоянную распада λ или период полураспада $T_{1/2}$: а) вероятность того, что радиоактивное ядро распадается за время от 0 до t; вероятность того, что радиоактивное ядро распадается за время от t до бесконечности; б) среднее время жизни радиоактивного ядра.

7.16. Какова активность препарата, если в течение 10 мин распадается 10 000 ядер этого вещества?

7.17. Найдите удельную массовую активность урана $^{238}_{92}U$.

7.18. Найдите удельную массовую активность кобальта $^{60}_{27}Co$.

7.19. Возраст древних деревянных предметов можно приближенно определить по удельной массовой активности изотопа $^{14}_{6}C$ в них. Сколько лет тому назад было срублено дерево, которое пошло на изготовление предмета, если удельная массовая активность углерода в нем составляет $^3/_4$ от удельной массы активности растущего дерева?

§ 7.3. Основы дозиметрии

Удельная активность источника

$$A_m = \frac{A}{m}, \tag{7.9}$$

где m — масса препарата.

Связь поглощенной и экспозиционной доз

$$D = fX, \tag{7.10}$$

где f — переходный коэффициент (для воды и мягких тканей человека $f = 1$).

Связь эквивалентной и поглощенной доз

$$H = kD, \tag{7.11}$$

где k — коэффициент качества.

7.20. Телом массой $m = 60$ кг в течение $t = 6$ ч была поглощена энергия $E = 1$ Дж. Найдите поглощенную дозу и мощность поглощенной дозы в единицах СИ и во внесистемных единицах.

7.21. В $m = 10$ г ткани поглощается 10^9 α-частиц с энергией около $E = 5$ МэВ. Найдите поглощенную и эквивалентную дозы. Коэффициент качества k для α-частиц равен 20.

7.22. Мощность экспозиционной дозы γ-излучения на расстоянии $r=1$ м от точечного источника составляет $P=2{,}15\times\times10^{-7}$ Кл/кг. Определите минимальное расстояние от источника, на котором можно ежедневно работать по 6 ч без защиты. Предельно допустимой эквивалентной дозой при профессиональном облучении считать $5\cdot10^{-2}$ Дж/кг в течение года. Поглощение γ-излучения воздухом не учитывать.

7.23. Средняя мощность экспозиционной дозы облучения в рентгеновском кабинете равна $6{,}45\cdot10^{-12}$ Кл/(кг·с). Врач находится в течение дня 5 ч в этом кабинете. Какова его доза облучения за 6 рабочих дней?

Что пытается установить изображенный персонаж?

Приложения

СВЕДЕНИЯ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

1. Латинский алфавит

Печатная буква	*Название*	*Печатная буква*	*Название*	*Печатная буква*	*Название*
Aa	а	Kk	ка	Uu	у
Bb	бе	Ll	эль	Vv	ве
Cc	це	Mm	эм	Ww	дубль-ве
Dd	де	Nn	эн	Xx	икс
Ee	е	Oo	о	Yy	игрек
Ff	эф	Pp	пэ	Zz	зет
Gg	ге	Qq	ку		
Hh	аш	Rr	эр		
Ii	и	Ss	эс		
Jj	йот	Tt	тэ		

2. Греческий алфавит

Печатная буква	*Название*	*Печатная буква*	*Название*	*Печатная буква*	*Название*
Αα	альфа	Μμ	мю	Χχ	хи
Ββ	бета	Νν	ню	Ψψ	пси
Γγ	гамма	Ξξ	кси	Ωω	омега
Δδ	дельта	Οο	омикрон		
Εε	эпсилон	Ππ	пи		
Ζς	дзэта	Ρρ	ро		
Ηη	эта	Σσς	сигма		
Θϑ	тэта	Ττ	тау		
Ιι	йота	Υυ	ипсилон		
Κϰ	каппа	Φφ	фи		
Λλ	ламбда				

3. Приставки для образования наименований кратных и дольных единиц

Кратность и дольность	Наименование	Обозначение русское	Обозначение международное
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	Т	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	гига	Г	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	мега	М	M
$1\,000 = 10^{3}$	кило	к	k
$100 = 10^{2}$	гекто	г	h
$10 = 10^{1}$	дека	да	da
$0{,}1 = 10^{-1}$	деци	д	d
$0{,}01 = 10^{-2}$	санти	с	c
$0{,}001 = 10^{-3}$	милли	м	m
$0{,}000\,001 = 10^{-6}$	микро	мк	μ
$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$	нано	н	n
$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	пико	п	p
$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	фемто	ф	f
$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	атто	а	a

4. Основные физические и математические константы

Скорость света в вакууме	$c = 299792458$ м/с
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная . . .	$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}601892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}007276470$ а. е. м.
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}008665012$ а. е. м.
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ Ф/м $\approx 8{,}84$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $\approx 12{,}57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана — Больцмана . .	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная смещения Вина	$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Число «пи»	$\pi = 3{,}14159...$
Основание натуральных логарифмов	$e = 2{,}71828...$
Связь десятичного и натурального логарифмов	$\ln a \approx 2{,}3 \lg a$ $\lg a \approx 0{,}43 \ln a$

5. Значения тригонометрических функций

Угол	sin	tg	ctg	cos	
0°	0,0000	0,0000		1,0000	90°
1	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7322	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	cos	ctg	tg	sin	*Угол*

6. Значение функции Φ(t) для решения задач на нормальный закон распределения

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,1	0,9821	3,1	0,9990
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,2	0,9861	3,2	0,9993
0,2	0,5793	1,2	0,8840	2,3	0,9893	3,3	0,9995
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,4	0,9918	3,4	0,9997
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,5	0,9938	3,5	0,9998
0,5	0,6915	1,5	0,9332	2,6	0,9953	3,6	0,9998
0,6	0,7257	1,6	0,9452	2,7	0,9965	3,7	0,9999
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,8	0,9974	3,8	0,9999
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,9	0,9981	3,9	1,000
0,9	0,8159	1,9	0,9713	3,0	0,9986		
		2,0	0,9772				

7. Коэффициенты Стьюдента

n	P												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	13	27	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,0
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,9	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	13	25	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	13	25	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	13	25	39	52	67	84	1,1	1,3	1,7	2,0	2,3	2,6	3,3

СВЕДЕНИЯ ПО ЯЗЫКАМ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

8. Знаки арифметических операций

Операция	*Паскаль*	*Бейсик*	*Фортран*	*Искра*-1256
Положить равным	:=	=	=	=>
Сложить	+	+	+	+
Вычесть	—	—	—	—
Умножить	*	*	*	*
Разделить	/	/	/	/
Изменить знак	—	—	—	ЗН
Возвести в степень	нет	↑	**	↑
Разделить целые числа с отбрасыванием дробной части	DIV	нет	/ *	нет
Получить остаток от деления	MOD	нет	AMOD	нет

* Выполняется при условии, что делимое и делитель описаны как целые.

9. Знаки операций отношения

Операция	*Паскаль, Бейсик, Искра*-1256	*Фортран*
Равно	=	.EQ.
Не равно	< >	.NE.
Больше	>	.GT.
Больше или равно	> =	.GE.
Меньше	<	.LT.
Меньше или равно	< =	.LE.

10. Специальные (встроенные) функции

Название (назначение) функций	*Паскаль*	*Бейсик*	*Фортран*	*Искра-1256*
Синус	SIN (X)	SIN (X)	SIN (X)	(X) SIN
Косинус	COS (X)	COS (X)	COS (X)	(X) COS
Тангенс		TAN (X)	TAN (X)	(X) TAN
Котангенс			COTAN (X)	
Арксинус		ASN (X)	ARSIN (X)	(X) ARCSIN
Арккосинус		ACS (X)	ARCOS (X)	(X) ARCCOS
Арктангенс	ARCTAN (X)	ATN (X)	ATAN (X)	(X) ARCTAN
Натуральный логарифм	LN (X)	LOG (X)	ALOG (X)	(X) LN
Десятичный логарифм		LGT (X)	ALOG1Ø (X)	
Гиперболический синус		HSN (X)	SINH (X)	
Гиперболический тангенс			TANH (X)	

Название (назначение) функций	*Паскаль*	*Бейсик*	*Фортран*	*Искра-1256*
Экспонента	EXP (X)	EXP (X)	EXP (X)	(X) EXP
Десять в степени *x*		EXT (X)		
Абсолютная величина	ABS (X)	ABS (X)	ABS (X)	(X) ABS
Квадрат *x*	SQP (X)			
Квадратный корень	SQRT (X)	SQR (X)	SQRT (X)	(X) SQR
Отбросить дробную часть	TRUNC (X)	INT (X)	AINT (X)	(X) INT
Округлить	ROUND (X)			
Найти порядковый номер	ORD(X)			
Символ алфавита с данным номером	CHR (X)			
Нечетность	ODD (X)			
Следующее значение элемента массива	SUCC (X)			
Предыдущее значение элемента массива	PRED (X)			
Число π		PI		PI
Датчик случайных чисел		RND (1)		
Значение наибольшей переменной			AMAX1 (X1...XN)	
Значение наименьшей переменной			AMIN1 (X1...XN)	
Преобразовать целое число в действительное			FLOAT (X)	
Преобразовать действительное число в целое			IFIX (X)	
Перевести радианы в градусы				(X) РГ
Перевести градусы в радианы				(X) ГР

* Некоторые типы ЭВМ предусматривают для этих же алгоритмических языков дополнительные функции.

11. Стандартные типы переменных

Тип	*Паскаль*	*Фортран*	*Искра-1256*
Целая	INTEGER	INTEGER	И00—И15
Действительная	REAL	REAL	А00—А31
Логическая	BOOLEAN	LOGICAL	
Символьная	CHAR		СА00—СА95
Комплексная		COMPLEX	
С удвоенной точностью мантиссы		DOUBLE PRECISION	

ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

12. Основные и дополнительные единицы СИ

Величина	*Наименование*	*Обозначение*
	Основные	
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила электрического тока	ампер	А
Термодинамическая температура	кельвин	К
Сила света	кандела	кд
Количество вещества	моль	моль
	Дополнительные	
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср

13. Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	*Единица*		*Выражение производной единицы*	
	наименование	*обозначение*	*через другие единицы СИ*	*через основные единицы СИ*
Частота	герц	Гц	—	$с^{-1}$
Сила	ньютон	Н	—	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$Н/м^2$	$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж	$Н \cdot м$	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Количество электричества, электрический заряд	кулон	Кл	$А \cdot с$	$с \cdot А$
Электрическое напряжение, электрический потенциал	вольт	В	Вт/А	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	Ф	Кл/В	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot А^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	В/А	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	См	А/В	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^3 \cdot А^2$
Поток магнитной индукции	вебер	Вб	$В \cdot с$	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	Тл	$Вб/м^2$	$кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Индуктивность	генри	Гн	Вб/А	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Световой поток	люмен	лм	—	$кд \cdot ср$
Освещенность	люкс	лк	—	$м^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность радионуклида	беккерель	Бк	распад/с	$с^{-1}$
Доза излучения (поглощенная доза излучения)	грей	Гй	Дж/кг	$м^2 \cdot с^{-2}$

5—1680

14. Внесистемные единицы физических величин и их соотношение с единицами СИ

Величина	*Внесистемная единица*	*Обозначение*	*Размер единицы в единицах СИ*
Длина	ангстрем	Å	10^{-10} м
	икс-единица	X	10^{-13} м
Объем	литр	л	10^{-3} м^3
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	сутки средние	сут	86400 с
	час	ч	3600 с
	минута	мин	60 с
Скорость	километр в час	км/ч	$2{,}78 \cdot 10^{-1}$ м/с
Плоский угол	градус	°	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	′	$2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	″	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
Частота вращения	оборот в секунду	об/с	с$^{-1}$
	оборот в минуту	об/мин	$1/60$ с$^{-1}$
Давление	бар	бар	10^5 Па
	техническая атмосфера	кгс/см^2	$9{,}81 \cdot 10^4$ Па
	физическая атмосфера	атм	$1{,}01 \cdot 10^5$ Па
	миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	$1{,}33 \cdot 10^2$ Па
Динамическая вязкость	пуаз	П	0,1 Па·с
Кинематическая вязкость	стокс	Ст	10^{-4} м^2/с
Энергия, работа, количество теплоты	ватт-час	Вт·ч	3600 Дж
	калория	кал	4,19 Дж
	эрг	эрг	10^{-7} Дж
	электронвольт	эВ	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Мощность	лошадиная сила	л.с.	735,5 Вт
Количество электричества	единица количества электричества СГС	СГС$_q$	$3{,}34 \cdot 10^{-10}$ Кл
Электрический потенциал, напряжение	единица напряжения СГС	СГС$_\varphi$	300 В
Электрическая емкость	сантиметр электрической емкости	см	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$ Ф
Электрический момент диполя	дебай	Д	$3{,}343 \cdot 10^{-30}$ Кл·м
Удельное электрическое сопротивление		Ом·мм^2/м	10^{-6} Ом·м
Магнитная индукция	гаусс	Гс	10^{-4} Тл
Напряженность магнитного поля	эрстед	Э	79,6 А/м
Магнитный поток	максвелл	Мкс	10^{-8} Вб
Магнитный момент	магнетон Бора	—	$9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл (или А·м^2)
	ядерный магнетон	—	$5{,}05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл (или А·м^2)

Величина	*Внесистемная единица*	*Обозначение*	*Размер единицы в единицах СИ*
Индуктивность, взаимная индуктивность	сантиметр индуктивности	см	10^{-9} Гн
Активность радиоактивного препарата	кюри	Ки	$3{,}7\cdot10^{10}$ Бк
Эффективное поперечное сечение ядерных процессов	барн	б	10^{-28} м^2
Доза ионизирующего излучения:			
поглощенная	рад	рад	10^{-12} Гр
экспозиционная	рентген	Р	$2{,}58\cdot10^{-4}$ Кл/кг
эквивалентная	бэр	бэр	10^{-2} Дж/кг
Мощность дозы:			
поглощенной	рад в секунду	рад/с	10^{-2} Гр/с
экспозиционной	рентген в секунду	Р/с	$2{,}58\cdot10^{-4}$ А/кг

ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

15. Плотность веществ, кг/м^3

Алюминий	2700
Бензин	680—720
Бензол при 0°С	899
Бром жидкий	3120
Вода при 4°С	1000
Воздух при нормальных условиях	1,29
Дерево сухое:	
береза	600—800
дуб	700—1000
тополь	300—500
Железо	7870
Золото	19300
Керосин	820
Кожа сухая	860
Кровь	1050
Лед при 0°С	917
Масло касторовое	960
Медь	8930
Молоко снятое	1032
—»— цельное	1028
Ртуть	13546
Свинец	11342
Смола	1020
Спирт этиловый	789
Сталь	7700—7900
Ткань костная	1700—2000

16. Модуль упругости материалов, ГПа

Дуб (вдоль волокна)	14
Кожа	$1{,}3\cdot10^{-5}$
Коллаген	1
Костная ткань	~10
Лед при 0°С	3
Нить шелковая	6,5
Паутина	3
Сталь	195÷206

17. Поверхностное натяжение различных жидкостей на границе «жидкость — воздух» при 20°С, мН/м

Белок куриного яйца	53
Бензол	30
Вода при 0°	75,6
—»— 20°С	72,6
Бром	44,2
Кровь	58
Масло касторовое	36,4
Молоко	42—46
Раствор мыла	40
Ртуть	50
Скипидар	26
Спирт этиловый	22

18. Динамическая вязкость некоторых веществ, мкПа·с

Вода (0°С)	1787
—»— (20°С)	1005
—»— (100°С)	280
Воздух (0°С)	18,1
Глицерин (0°С)	$12{,}1\cdot10^6$
—»—* (20°С)	$1{,}48\cdot10^6$
Жир рыбий (20°С)	$4{,}6\cdot10^4$
Кислород (0°С)	$19{,}1\cdot10^6$
Кровь (20°С)	5000
Масло касторовое (20°С)	$970\cdot10^3$
Молоко (20°С)	1800
Спирт этиловый (0°С)	1773
—»— —»— (20°С)	1200

* В скобках указана температура, при которой приводится данное значение вязкости.

19. Скорость звука в разных веществах, м/с

Вода при 0°С	1402
—»— 20°С	1482
Водород	1284
Воздух	331
Глицерин при 20°С	1923
Кислород	316
Лед при —4°С	3980
Спирт этиловый при 20°С	1165
Углекислый газ	259

* Скорость звука для газов дана при нормальных условиях.

20. Интенсивность различных звуков для частоты 1 кГц, Вт/м²

Порог слышимости	10^{-12}
Сердечные тоны через стетоскоп	10^{-11}
Шепот, тиканье часов	10^{-10}
Шуршание бумаги	10^{-9}
Разговор тихий	10^{-8}
—»— нормальный	10^{-7}
—»— громкий	10^{-6}
Шум на оживленной улице	10^{-5}
Крик	10^{-4}
Шум в поезде метро	10^{-3}
—»— мотоцикла (максимальный)	10^{-2}
—»— вблизи проходящего на большой скорости поезда	10^{-1}
Реактивный двигатель, гром	1
Порог болевого ощущения	10

21. Связь калорического коэффициента 1 л кислорода с дыхательным коэффициентом

Дыхательный коэффициент	К.К. кДж	*Дыхательный коэффициент*	К.К. кДж	*Дыхательный коэффициент*	К.К. кДж	*Дыхательный коэффициент*	кДж
0,70	19,619	0,78	19,996	0,86	20,411	0,94	20,821
0,71	19,636	0,79	20,051	0,87	20,461	0,95	20,871
0,72	19,686	0,80	20,101	0,88	20,515	0,96	20,921
0,73	19,737	0,81	20,151	0,89	20,566	0,97	20,976
0,74	19,791	0,82	20,201	0,90	20,616	0,98	21,026
0,75	19,841	0,83	20,256	0,91	20,666	0,99	21,076
0,76	19,896	0,84	20,306	0,92	20,716	1,00	21,131
0,77	19,946	0,85	20,360	0,93	20,767	—	—

22. Объем потребляемого O_2 и выделенного CO_2 при окислении 1 г питательного вещества

Вещество	*Потребляется* O_2, *л*	*Выделяется* CO_2, *л*	*Дыхательный коэффициент*
Белок	0,97	0,77	0,8
Жир	2,0	1,4	0,7
Углевод	0,83	0,83	1,0

23. Относительная диэлектрическая проницаемость

Вода	81
Воск	2,8—2,9
Глицерин	43
Кровь	85
Масло касторовое	4,5—4,8
Парафин	2
Слюда	7,5
Спирт	26

24. Удельное электрическое сопротивление при 20°С, Ом·м

Алюминий	$2{,}8\cdot10^{-8}$
Вода	10^3—10^4
Жидкость спинномозговая	0,55
Кожа сухая	10^5
Кость без надкостницы	10^7
Кровь	1,66
Ртуть	$0{,}958\cdot10^{-6}$
Спирт этиловый	10^4—10^5
Ткань жировая	33,3
—»— мозговая и нервная	14,3
—»— мышечная	2

25. Показатель преломления

Алмаз	2,417
Вода	1,333
Водород	1,000138
Воздух	1,000292
Кислород	1,000272
Лед	1,31
Оксид углерода	1,000334
Сахар	1,56
Спирт этиловый	1,362
Стекло:	
легкий крон	1,51
тяжелый флинт	1,77
Углекислый газ	1,000450

* Данные относятся к желтой линии D натрия ($\lambda = 589{,}3$ нм), для газов они указаны при нормальных условиях.

26. Предельный угол внутреннего отражения, град

Вода	49
Глицерин	43
Этиловый спирт	47

27. Приближенное значение интервала длин волн для основных цветов видимого спектра, нм

Красный	760—620
Оранжевый	620—590
Желтый	590—560
Зеленый	560—500
Голубой	500—480
Синий	480—450
Фиолетовый	450—380

28. Массы некоторых атомов, а. е. м.

^{1}H	1,00783
^{2}H	2,01410
^{3}H	3,01605
^{3}He	3,01603
^{4}He	4,00260
^{12}C	12,00000
^{16}O	15,99491
^{56}Co	55,93991
^{235}U	235,04277
^{238}U	238,04808

29. Периоды полураспада некоторых радиоактивных ядер

^{3}H	12,262 года
^{14}C	5730 лет
^{60}Co	5,263 года
^{130}J	12,3 часа
^{131}J	8,05 суток
^{238}U	$4{,}51 \cdot 10^{9}$ лет

30. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева

Периоды	*Ряды*	*Группы* I	II	III	IV	V
I	1	(H)				
II	2	3 Li 6,941	4 Be 9,01218	5 B 10,81	6 C 12,011	7 N 14,0007
III	3	11 Na 22,98977	12 Mg 24,305	13 Al 26,98154	14 Si 28,086	15 P 30,97376
IV	4	19 K 39,098	20 Ca 40,08	21 Sc 44,9559	22 Ti 47,90	23 V 50,9414
	5	29 Cu 63,546	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9256
V	6	37 Rb 85,4678	38 Sr 87,62	39 Y 88,9059	40 Zr 91,22	41 Nb 92,9064
	7	47 Ag 107,868	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75
VI	8	55 Cs 132,9054	56 Ba 137,34	57 La 138,9055	72 Hf 178,49	73 Ta 180,9479
	9	79 Au 196,9665	80 Hg 200,59	81 Tl 204,59	82 Pb 207,2	83 Bi 208,9804
VII	10	87 Fr 223	88 Ra 226,2544	89 Ac 227	104 Ku 261	105 Ns

элементов

VI	VII	VIII			
	1 H 1,0079				2 He 4,00260
8 O 15,9994	9 F 18,9984				10 Ne 20,179
16 S 32,06	17 Cl 35,453				18 Ar 39,948
24 Cr 51,996	25 Mn 54,9390	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,70	
34 Se 78,96	35 Br 79,904				36 Kr 83,80
42 Mo 95,94	43 Tc 98,9062	44 Ru 101,7	45 Rh 102,9055	46 Pd 106,4	
52 Te 127,60	53 I 126,045				54 Xe 131,30
74 W 183,85	75 Re 186,207	76 Os 190,2	77 Ir 192,22	78 Pt 195,09	
84 Po [209]	85 At [210]				86 Rn [222]

Лантано

58 **Ce** 140,12	59 **Pr** 140,9077	60 **Nd** 144,24	61 **Pm** [145]	62 **Sm** 150,4	63 **Eu** 151,96	64 **Gd** 157,25

Актино

90 **Th** 232,0381	91 **Pa** 231,0359	92 **U** 238,29	93 **Np** 237,0482	94 **Pu** [244]	95 **Am** [243]	96 **Cm** [247]

* Названия и символы некоторых элементов, завершающих таблицу, не являются общепринятыми. Атомные массы приведены по углеродной шкале. В квадратных скобках указаны массовые числа наиболее устойчивых элементов.

иды 58—71

65 **Tb** 158,9254	66 **Dy** 162,50	67 **Ho** 164,9304	68 **Er** 167,26	69 **Tm** 168,9342	70 **Yb** 173,04	71 **Lu** 174,97

иды 90—103

97 **Bk** [247]	98 **Cf** [251]	99 **Es** [254]	100 **Fm** [257]	101 **Md** [258]	102 **No** [255]	103 **Lr** [256]

Ответы и решения

1.1. 1) 4; 2) 100; 3) $\pi/3$; 4) 1; 5) 0; 6) 6; 7) 1; 8) 1; 9) -7; 10) 0. **1.2.** 1) 4/3; 2) 3; 3) 4; 4) 0,25; 5) $-0{,}5$; 6) 1; 7) 1,5; 8) 0,3; 9) ∞; 10) -2; 11) ∞; 12) -1; 13) -32; 14) $-4a$; 15) 5. **1.3.** 1) 2; 2) 2/3; 3) 0; 4) $-2{,}5$; 5) 0,5; 6) 1; 7) $-2/7$; 8) 0; 9) 0,6; 10) 2; 11) $-0{,}5$; 12) 0; 13) ∞; 14) 0; 15) 0; 16) 0,5; 17) -1; 18) 2. **1.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 2/3; 4) 0,25; 5) $-1/56$; 6) 4/3; 7) 9/4; 8) 1/4; 9) $1/2\sqrt{a}$; 10) $1/\sqrt{a}$; 11) $-1/16$; 12) 0; 13) 0; 14) 0; 15) 2,4; 16) 1/144; 17) -2; 18) 0; 19) 2/3; 20) 4; 21) 2; 22) $-16/3$, 23) $-1/3$; 24) 4; 25) 2/3. **1.5.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 0,5; 4) 2/3; 5) 0,5; 6) 1; 7) 1; 8) 4; 9) ∞; 10) 1/3; 11) 1; 12) 2; 13) 0,5. **1.10.** 1) 0,13; 2) 0,04; 3) 0,01; 4) 0,042; 5) 0,0015. **1.11.** 0,2 см^2. **1.12.** 2,14 см^2. **1.13.** 2,6 м. **1.14.** 3 Кл. **1.15.** $4{,}6\times10^{-4}$ Дж. **1.16.** 1) 2,009; 2) 32,44; 3) 0,7529; 4) 8,2; 5) 0,794; 6) 0,327; 7) 2,02; 8) 3,64. **1.17.** 10,88 м. **1.18.** 498 Дж. **1.19.** $2{,}4\cdot10^{-4}$ Н. **1.20.** 32,8 м/с^2.

1.23. $\dfrac{\Delta E_к}{E_к} = \dfrac{\Delta m}{m} + 2\dfrac{\Delta l}{l} + 2\dfrac{\Delta t}{t}$.

1.24. $\dfrac{\Delta R_x}{R_x} = \dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{\Delta l_1}{l_1} + \dfrac{\Delta l_2}{l_2}$.

1.25. $\dfrac{\Delta I}{I} = 0{,}04$. **1.26.** $\Delta V = 56$ см^3; $\Delta V/V = 0{,}05$. **1.31.** 1) 38/3; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,5; 5) 1,5; 6) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$; 7) $\frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}$; 8) $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$; 9) 1/3; 10) $-1/48$; 11) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; 12) 1/3; 13) $\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$; 14) 0; 15) $-2\frac{2}{3}$; 16) $\frac{31}{15}$; 17) 1; 18) $\ln\frac{e+1}{2}$; 19) $2\frac{1}{3}$; 20) 2; 21) $\ln 3$; 22) 0,24; 23) 0,25; 24) 1; 25) 1/9; 26) 0,5; 27) 5/16; 28) $\ln\frac{e+5}{6}$; 29) 0,5; 30) e^2; 31) 0,5; 32) 1/3; 33) $\frac{1}{4}\ln^4 10$; 34) $32\frac{2}{3}$; 35) 9; 36) $-2/9$; 37) 0,24; 38) $\frac{(\sqrt{e}-1)}{2}$. **1.32.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) $21\frac{1}{3}$; 5) $2\ln 4$; 6) $2\frac{2}{3}$; 7) $20\frac{5}{6}$; 8) 36; 9) 12; 10) $2-1/\ln 2$; 11) 10; 12) 16; 13) 2; 14) 3; 15) 2/3; 16) $37\frac{1}{3}$; 17) $10\frac{2}{3}$; 18) 1/6; 19) 18; 20) $\sqrt{2}$; 21) 15; 22) 19,5; 23) 16,25; 24) 1/6; 25) 2; 26) $\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **1.33.** 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) да; 8) нет; 9) да; 10) да. **1.34.**

1) $y = -\dfrac{1}{2x+C}$;

2) $y = \frac{2}{3}x^3 + x + C$; 3) $y = Ce^{5x}$;

4) $y = \sin x - \cos x + C$;

5) $y = \sqrt{\ln x + C}$; 6) $y = C\sqrt[3]{x^2}$;

7) $y = \sqrt{x - \ln x + C}$; 8) $y = \sqrt[3]{2x^2 + C}$;

9) $y = \ln(x+1) + C$; 10) $y = \sqrt{x^2 + C}$;

11) $y = Ce^{\sin x}$; 12) $y = Ce^{x^2}$;

13) $y = Ce^{-3x}$; 14) $y = \ln(x + C)$;

15) $y = C - e^{-x}$; 16) $y = \ln x + e^x + C$.

1.35. 1) $y = \sqrt{2x + x^2 - 8}$;

2) $y = \ln x + \frac{x^3}{3}$; 3) $y = 2\sqrt{x}$;

4) $y = \cos x + {}^1/_2$; 5) $y = \sqrt[3]{9e^x - 1}$;

6) $y = e^x - 2e^{-x} + 4$; 7) $y = 4(x + 1)$.

1.36. $ds = v dt = (v_0 + at)dt$;

$s = v_0 t + at^2/2 = 10200$ м.

1.37. $dE = dA = kx dx$; $E = kx^2/2$.

1.38. Решение: $-\frac{dt}{d\tau} = k(t - \langle t \rangle)$;

$\frac{dt}{t - \langle t \rangle} = k d\tau$, откуда $\ln(t - \langle t \rangle) = -k\tau + \ln C$, $t - \langle t \rangle = Ce^{-k\tau}$. При $\tau = 0$ имеем $t = 100°C$ и $C = 80$; при $\tau = 10$ мин имеем $t = 60°C$ и $60 - 20 = 80e^{-10k}$, откуда $k = \frac{\ln 2}{10}$; при $\tau = 30$ мин имеем $t = 80°C$ и

$e^{-\frac{\ln 2}{10}30 + \langle t \rangle} = 80e^{\frac{1}{\ln 8}} + \langle t \rangle = 30°C$.

1.39. Решение: $dI = -kI dl$; $\frac{dI}{I} = -k dl$; $\ln I = -kl + \ln C$, откуда $I = Ce^{-kl}$. При $l = 0$ имеем $I = I_0 = C$;

$I = I_0 e^{-kl}$; $\frac{I_0}{I} = 2 = e^{0,5k}$; $\ln 2 = 0,5k$.

Отсюда $k = 2\ln 2 = 1,38$ $I = I_0 e^{-1,38l}$.

1.40. 2,5 мг. **1.41.** $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l} y = 0$.

1.42. 0,28. **1.43.** 0,54; 0,46. **1.44.** ${}^1/_4$. **1.45.** ${}^1/_4$. **1.46.** ${}^1/_8$. **1.47.** 0. **1.48.** ${}^1/_2$. **1.49.** 0,43; 0,7; **1.50.** ${}^2/_3$; ${}^1/_3$. **1.51.** ${}^7/_9$; ${}^2/_9$. **1.52.** 0,7. **1.53.** 300 больных. **1.54.** 7,6%. 92,4%. **1.55.** ${}^5/_6$; 35 белых шаров. **1.56.** ${}^1/_6$ и ${}^5/_6$. **1.57.** а) ${}^1/_5$; ${}^1/_4$, ${}^1/_3$, ${}^1/_2$, 1; б) ${}^1/_5$, ${}^1/_4$, ${}^1/_3$, 0,0. **1.58.** 0,16 и 0,36. **1.59.** $(1,6)^6 = 0,000021$. **1.60.** $({}^1/_6)^6$. **1.61.** $({}^1/_2)^6 = 0,015625$. **1.62.** а) 0,265; б) 0,235; в) 0,5. **1.63.** Вероятность того, что ни один из опрошенных не имеет дня рождения, совпадающего с днем рождения первого, равна ${}^{364}/_{365} \approx 0,997$. Вероятность для 199 человек равна $({}^{364}/_{365})^{199}$, а вероятность того, что хотя бы у одного из 199 человек день рождения совпал с днем рождения первого, $P = 1 - ({}^{364}/_{365})^{199} = 1 - 0,579 = 0,421$. **1.64.** В обоих случаях 7/30. **1.65.** 20/56 и 6/56. **1.66.** 0,336. **1.67.** Из условия задачи следует, что вероятность выигрыша для отдельной облигации равна 0,1. Вероятность того, что из 20 облигаций выигрывает одна, представляет собой вероятность биномиального распределения ($n = 20$, $l = 1$):

$$P_{ln} = \frac{n(n-1)...(n-l+1)}{l!} \times$$
$$\times P^l(1-P)^{n-l} = 0,27.$$

1.68. 0,387. **1.69** а) 0,2916; б) 0,3439. **1.70.** 0,0000224. **1.73.** 2,5; 1,25; 1,12. **1.74.** 5,6; 3,64; 1,9. **1.75.** $M(x) = 1 \times 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 5 \times 0,2 = 3,3$; $D(x) = M[x - M(x)]^2 = (1 - 3,3)^2 0,2 + (2 - 3,3)^2 0,1 + (3 - 3,3)^2 0,1 + (4 - 3,3)^2 0,4 + (5 - 3,3)^2 0,2 = 2,01$; $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 12,9 - 10,89 = 2,01$; $\sigma = \sqrt{D(x)} = 1,42$. **1.76.** $ab = 1$. **1.77.** $ab = 2$.

1.78. $\int_0^\pi a \sin x dx = 1$, отсюда $a = 0,5$.

1.79. $R = \sqrt{2/\pi} \approx 0,8$. **1.80.**

К1.76: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ bx, & 0 < x < a; \\ ba = 1, & a < x; \end{cases}$

к1.77: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^2, & 0 < x < a; \\ \frac{1}{2}ba = 1, & a \leqslant x; \end{cases}$

к1.78: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ a(1 - \cos x), & 0 < x < \pi; \\ 2a = 1, & \pi \leqslant x. \end{cases}$

1.81. $M = \int_0^a xb dx = b\frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}$;

$$D = \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 b dx = \frac{a^3 b}{12} = \frac{a^2}{12}.$$

1.82. $M = \int_0^a x \frac{b}{a} x dx = \frac{ba^2}{3} = \frac{2}{3}a$;

$$D = \int_0^a \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 \frac{b}{a} x dx = \frac{a^3 b}{36} = \frac{a^2}{18}.$$

1.83. $M = 0$; $D = \int\limits_{-a}^{0} x^2 f(x)\mathrm{d}x +$

$+ \int\limits_{0}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{0} x^2\left(b + \frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x +$

$+ \int\limits_{0}^{a} x^2\left(b - \frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x =$

$= -\left(-\frac{a^3}{3}b + \frac{a^4}{4}\frac{b}{a}\right) + \frac{a^3}{3}b -$

$- \frac{a^4}{4}\frac{b}{a} = \frac{a^3 b}{6} = \frac{a^2}{6}$;

$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$. **1.84.** В обоих случаях 0,5. **1.85.** В обоих случаях 0,5. **1.86.** На основании (1.74) имеем $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \Phi\left(\frac{x-2}{4}\right)$. Из табл. 6 находим $(x-2)/4 = 0{,}7$; $x = 4{,}8$. **1.87.** Из (1.74) $F(\sigma) = \Phi(1)$; $P = F(\sigma) - F(-\sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$;

а) $P = 2\Phi(1) - 1 = 2\cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$;

б) $P = 2\Phi(2) - 1 = 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$;

в) $P = 2\Phi(3) - 1 = 2\cdot 0{,}9986 - 1 = 0{,}9972$.

Функцию Φ находим из табл. 6. **1.89.** 484 м/с. **1.90.** 517,5 м/с; 458,6 м/с. **1.91.** 402,9 K. **1.92.** 342,9 K. **1.93.** 1933,8 м/с; 1781,6 м/с; 1578,9 м/с. **1.94.** $T = \frac{(v_{\text{кв}} - v_{\text{в}})^2 M}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 R} = 333$ K (M — молярная масса азота). **1.95.** $N_x = nf(v)\mathrm{d}v$, где n — концентрация молекул при нормальных условиях;

а) $N_x = n\cdot 4\pi\left(\frac{m_0}{4\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m_0 v^2/(2kT)} \times \mathrm{d}v = 1{,}7\cdot 10^{18}$ м$^{-3}$; б) $4\cdot 10^{17}$ м$^{-3}$ **1.96.** $3{,}9\cdot 10^{-3}$. **1.97.** $p_{\text{д}}/p_{0\text{д}} = \mathrm{e}^{-Mgh/(RT)} = 0{,}08$. **1.98.** Решение. $p'_{\text{д}}/p''_{\text{д}} = 0{,}99 = \mathrm{e}^{mg\Delta h/(kT)}$; $mg\Delta h/(kT) = \ln 0{,}99 = -0{,}01$, откуда $\Delta h = 79{,}5$ м. **1.99.** 5510 м для O_2; 6297 м для N_2. **1.100.** $g = 62{,}0$ м/с^2 (при движении вверх); $g = 42{,}4$ м/с^2 (при движении вниз). **1.111.** Блок-схема соответствующего алгоритма приведена на рис. 1. **1.112.** Блок-схема приведена на рис. 2. **1.115.** 1), 2), 4), 9), 13), 15) — да; 3), 5), 6), 7), 8), 10), 11), 12), 14) — нет. **1.116.** 2), 5), 6), 7) — да; 1), 3), 4), 8), 9), — нет. **1.117.** 1) 3.ØØE8; 2) 1.38E-23; 3) 2.72; 4) 1.26E-6.

1.118.

```
1Ø  READ TØ,PØ,VØ
2Ø  DATA 273,1.ØE5,1.Ø
3Ø  PRINT 'ВВЕДИТЕ ТЕМПЕРАТУРУ'
35  INPUT T1
4Ø  T1=T1+273
5Ø  PRINT 'ВВЕДИТЕ ДАВЛЕНИЕ'
55  INPUT P1
6Ø  V1=PØ*VØ*T1/(TØ*P1)
7Ø  PRINT'VРАВНО 'V1'КУБ.М'
8Ø  END
```

1.119.

```
1Ø  PRINT'ВВЕДИТЕ ТРИ ЧИСЛА: A, B И C'
 15 INPUT A, B, C
2Ø  IF B>A THEN 6Ø
3Ø  X=B
4Ø  B=A
```

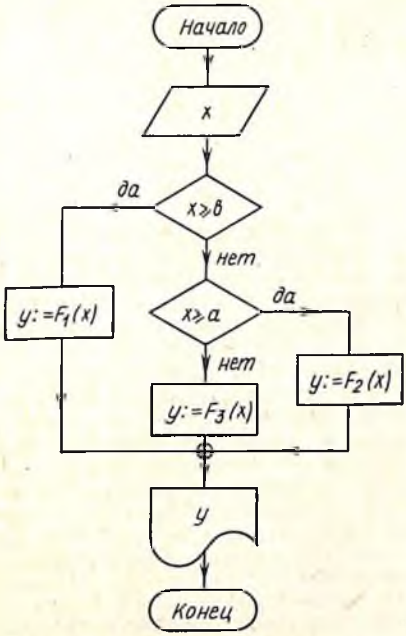


Рис. 1

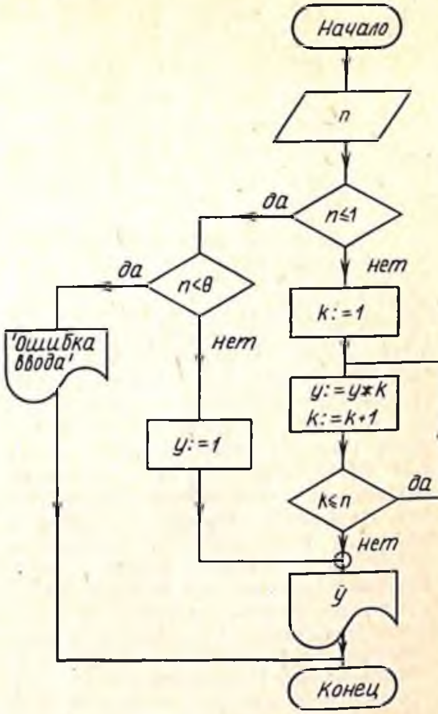


Рис. 2

```
5∅   A=X
6∅   IF B>C THEN 1∅∅
7∅   X=C
8∅   C=B
9∅   B=X
1∅∅  IF B>A THEN 14∅
11∅  X=B
12∅  B=A
13∅  A=X
14∅  PRINT'ЧИСЛА В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ'
15∅  PRINT A
16∅  PRINT B
17∅  PRINT C
18∅  END
```

1.120.

```
1∅   PRINT'ВВЕДИТЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ'
15   INPUT A∅,A1,A2,A3
2∅   PRINT'ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ'
3∅   PRINT' X   Y   Y1   Y2'
```

```
40  X=0
50  X2=X*X
60  X3=X*X2
70  Y=A0+A1*X+A2*X2+A3*X3
80  Y1=A1+2*A2*X+3*A3*X2
90  Y2=2*A2+6*A3*X
100 PRINT X'  'Y'  'Y1'  'Y2
110 X=X+0.1
120 IF X<-1.0 XTHEN 50
130 END
```

1.121. 1), 4), 8), 10), 12), 15) — да; 2), 3), 5), 6), 7), 9), 11), 13), 14) — нет. **1.122.** 1), 3), 4), 6), 7) — вещественный; 2), 5), 8), 9) — целый. **1.123.** 1) 6.02E23; 2) 8.31; 3) 6.67E—11; 4) 3.14. **1.124.** 1) 3 позиции на перфокарте (или на экране дисплея) содержат целое число; 2) на 8 позициях содержится вещественное число, из них 4 правых позиции — дробная часть; 3) на 12 позициях содержится вещественное число в форме с десятичным порядком, под дробную часть мантиссы отведено 4 позиции; 4) 6 позиций пропустить; 5) перейти к следующей перфокарте (на следующую строку на экране дисплея или другого носителя информации); 6) трижды подряд прочесть числа по спецификации F 6.2; 7) вещественное число записано на 10 позициях, на 5 — дробная часть; 8) на 5 позициях записано целое число; 9) дважды прочитать число по спецификации E12.3, пропуская в промежутке две позиции. **1.125.** 1) В 3 позициях на листе бумаги АЦПУ (или на экране дисплея) записать целое число; 2) на 8 позициях записать вещественное число, из них 3 правых позиции — дробная часть; 3) на 10 позициях записать вещественное число в форме с десятичным порядком, под дробную часть мантиссы отведено 2 позиции; 4) оставить 10 пробелов; 5) перейти на следующую строку; 6) трижды повторить вывод чисел со спецификации F6.2, оставляя по 2 пробела между ними; 7) напечатать 7 символов, примыкающих справа к 7H, в данном случае слово «таблица»; 8) напечатать заголовок «решение задачи»; 9) написать комментарий "$x=$" и число по спецификации E12.3.

1.126.

```
      DATA EPS0,PI/8.85E-12,3.14159/
      REAL EPS0,PI,Q,EPS,R,COEF,E
      WRITE(5,1)
    1 FORMAT ('ВВЕДИТЕ Q,EPS И R')
      READ (5,2) Q,EPS,R
    2 FORMAT (E10.3,F5.2,E10.3)
      COEF=1.0/(4.0*PI*EPS0)
      E=COEF*Q/(EPS*R**2)
      WRITE (6,3) E
    3 FORMAT ('НАПРЯЖЕННОСТЬ',2X,E12.3,' В/М')
      STOP
      END
```

1.127.

Основная программа.

```
      DIMENSION C (2,2),D(2),X(100),Y(100)
      REAL B,D,X,Y,SUMX,SUMY,SUMX2,SUMXY,A0,A1
      INTEGER N,I,J,K
      READ(5,1) N
```

```
 1 FORMAT(I3)
   READ(5,2) (X(I),I=1,N)
 2 FORMAT(16F5.3)
   READ(5,3) (Y(I),I=1,N)
 3 FORMAT(8E1Ø.4)
   SUMX=Ø.Ø
   SUMY=Ø.Ø
   SUMX2=Ø.Ø
   SUMXY=Ø.Ø
   DO 4 K=1,N
   SUMX=SUMX+X(K)
   SUMY=SUMY+Y(K)
   SUMX2=SUMX2+X(K)*X(K)
 4 SUMXY=SUMXY+X(K)*Y(K)
   C(1,1)=FLOAT(N)
   C(1,2)=SUMX
   C(2,1)=C(1,2)
   C(2,2)=SUMX2
   D(1)=SUMY
   D(2)=SUMXY
   CALL SYSTEM(C,D,AØ,A1)
   WRITE(6,5)
 5 FORMAT ('ПАРАМЕТРЫ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ')
   WRITE(6,6) AØ,A1
 6 FORMAT ('AØ=',E12.3,2X,'A1=',E12.3)
   STOP
   END
```

Подпрограмма-процедура.

```
   SUBROUTINE SYSTEM (A,B,X,Y)
   DIMENSION A(2,2),B(2)
   REAL A,B,DEL,DELX,DELY,X,Y
   DEL=A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)
   DELX=B(1)*A(2,2)-A(1,2)*B(2)
   DELY=A(1,1)*B(1)-B(2)*A(2,1)
   X=DELX/DEL
   Y=DELY/DEL
   RETURN
   END
```

Для краткости и простоты в программе отсутствуют входные комментарии типа «введите данные», а в подпрограмме не предусмотрен случай вырождения системы. **1.128.** 1), 4), 5), 8), 9) — да, 2), 3), 6), 7) — нет. **1.129.** Записаны верно: 1), 2), 4), 6), 9), 10), 11) и 14). Записаны с ошибкой (приведен правильный вариант); 3) —1E12; 5) 124.162772; 7) Ø.65; 8) —5.ØEØ2; 12) 5 или 5.Ø; 13) 1E—Ø5; 15) 3.14159. **1.130.** 1) считываются значения переменных и присваиваются именам X и Y, значения расположены на одной строке; 2) перевод строки при чтении; 3) считывание значения переменной *Z* и переход к следующей строке информации; 4) печать значений *X*, *Y* и *Z* в одну строку; 5) перевод строки при печати; 6) печать значения *Q* и переход к следующей строке; 7) печать переменной *A* на 8 позициях; 8) печать переменной *D* на 10 позициях, под дробную часть отведено 3 позиции; 9) печать комментария «искомое число» и значения переменной Y на M позициях, под дробную часть отведено N позиций (N и M должны быть предварительно определены при выполнении программы).

1.131.

```
PROGRAM OMEGA;
VAR
      WMIN,WMAX,DELW,WØ,F,BETA,A,B,W:REAL;
BEGIN
      WRITELN ('ВВЕДИТЕ WMIN,WMAX,DELW');
      READL (WMIN,WMAX,DELW);
      WRITELN ('ВВЕДИТЕ WØ,F,BETA');
      READLN (WØ,F,BETA);
      WRITELN ('ТАБЛИЦА');
      WRITELN ('ЧАСТОТА АМПЛИТУДА');
      W:=WMIN;
      WHILE W<=WMAX DO
            BEGIN
            B:=SQRT(SQR(SQR(WØ)-SQR(W))+SQR(BETA*W)*4);
            A:=F/B;
            WRITELN(W:8:4,'   ',A:1Ø:3);
            W:=W+DELW;
            END;
END.
```

1.132.

```
      PROGRAM EINSTN;
      TYPE
            METALL=ARRAY[1..7] OF CHAR;
      VAR
            LAMBDA,B,A,D,V:REAL;
      CONST
            C=3.ØE8;
            H=6.63E-34;
            E=1.6E-19;
            M=9.1E-31;
      BEGIN
      WRITELN ('ВВЕДИТЕ МАТЕРИАЛ');
      READLN (METALL);
      WRITELN ('ВВЕДИТЕ ДЛИНУ ВОЛНЫ');
      READLN (LAMBDA);
      LAMBDA:=LAMBDA*1.ØE-9;
      B:=H*C/LAMBDA;
            CASE METALL OF
                  РУБИДИЙ:A:=1.53;
                  ЛИТИЙ  :A:=2.4Ø;
                  ЦИНК   :A:=3.74;
            END;
      A:=A*E;
      D:=B-A;
```

```
IF D<=Ø.Ø
THEN
    WRITELN ('V=Ø.Ø')
ELSE
    BEGIN
        V:=SQRT (2.Ø*D/M);
        WRITELN ('V=',V)
    END;
END.
```

1.133. 1), 3), 5), 6), 9) — верно; 2), 4), 7), 8) — неверно. 1.134. 1) задание паузы индикации 3 с; 2) назначение вывода данных на АЦПУ, длина строки 80 символов; 3) задание 12 символьных переменных длиной 20 позиций; 4) задание 32 числовых переменных разрядностью 8; 5) задание паузы индикации 1 с; 6) назначение вывода данных на экран дисплея, длина строки 64 символа.

1.135.

```
 1 СЕЛЕКТ (3,5,64)
 2 ПЕЧАТЬ ("ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ЦИЛИНДРА",)
 3 ПЕЧАТЬ ("ВВЕДИТЕ РАДИУС",)
 4 Н=>АØ1
 5 ПЕЧАТЬ ("ВВЕДИТЕ ВЫСОТУ",)
 6 Н=>АØ2
 7 PI*АØ1↑2*АØ2=>АØ3
 8 СЕЛЕКТ (3,12,8Ø)
 9 ПЕЧАТЬ ("V=",АØ3,)
```

1.136.

```
 1 СЕЛЕКТ (3,5,64)
 2 ПЕЧАТЬ ("ВВЕДИТЕ ОТНОШЕНИЕ ЧАСТОТ",)
 3 Н=>АØ1
 4 ПЕЧАТЬ ("ВВЕДИТЕ СДВИГ ФАЗ В ГРАДУСАХ",)
 5 Н=>АØ2
 6 (АØ2) ГР=>АØ2
 7 СЕЛЕКТ (3,12,8Ø)
 8 ПЕЧАТЬ ("КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ФИГУРЫ",)
 9 ПЕЧАТЬ ("  X  Y",)
1Ø Ø=>АØ3
11 PI/5Ø=>АØ4
12 МØ5
13 (АØ3) SIN=>АØ5
14 (АØ3*АØ1+АØ2) SIN=>АØ6
15 ПЕЧАТЬ (АØ5,"  ",АØ6,)
16 АØ3+АØ4=>АØ3
17 АØ3<2*PIПЕРЕХ МØ5
```

2.1. 4,36 $с^{-2}$; $\varphi = \mathscr{E}t^2/2 = 2{,}18t^2$. 2.2. 1) $\varphi_1 = 6$ рад, $\omega_1 = 6$ рад/с; $\mathscr{E}_1 = 6$ рад/$с^2$; $\varphi_2 = 78$ рад, $\omega_2 = 51$ рад/с, $\mathscr{E}_2 = 24$ рад/$с^2$. 2.3. 34 рад. 2.4. 5×10^{-2} кг·$м^2$. 2.6. $5 \cdot 10^{-4}$ кг·$м^2$; $7{,}2 \times 10^{-4}$ кг·$м^2$. 2.7. $j = ml^2/9$. Указание: момент инерции проволоки равен сумме моментов инерции двух ее частей длиной $l/3$ и $2l/3$ **2.8.** 1,4 кг·м²; 16,9 кг·м².

2.9. $J = \frac{m(R^4 r^4 - 2r^2 l^2)}{2R^2} = 4,75$ кг·м².

2.10. $J = \frac{m(R^4 + 2R^2 l^2 - r^4)}{2R^2} = 7,95$ кг·м². **2.11.** 0,36 Н·м; 0,144 рад/с². **2.12**

$$T_1 = \frac{m_1(4m_2 + M)}{2m_1 + 2m_2 + M} g = 17,6 \text{ Н};$$

$$T_2 = \frac{m_2(4m_1 + M)}{2m_1 + 2m_2 + m} g = 13,7 \text{ Н};$$

$$a = \frac{2(T_1 - T_2)}{M} = 3,9 \text{ м/с}^2.$$

2.13. $\frac{M_1}{M_2} = \frac{2N_2}{nt_1} = \frac{3}{4}$. **2.14.** 6 Н. **2.15.** $M = 1,44t - 0,16$; $M = 4,16$ Н·м. **2.16.** 0,38 Н·м. **2.17.** $E_к = mgr = 14$ Дж; $v = 8$ м/с. **2.18.** 666 Дж. **2.19.** $s = 5gkt^2/4 = 180$ м. **2.20.** 30°. **2.21.** Работа за один шаг:

$$A = \frac{J\omega^2_{max}}{2} \cdot 2 = J\omega^2_{max}.$$

Средняя угловая скорость за полшага $\langle\omega\rangle = \omega_{max}/2$, откуда $\omega_{max} = 2\langle\omega\rangle = 2\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Средняя мощность

$$\langle N\rangle = \frac{A}{2\Delta t} = \frac{2J\Delta\varphi^2}{t^3} = 14,8 \text{ Вт}.$$

2.22. 1497 Н. **2.23.** $A = 2J\omega^2_{max} = 2J\left(\frac{4\Delta\varphi}{T}\right)^2 = \frac{32J\Delta\varphi^2}{T^2} = 35\cdot10^{-4}$ Дж, $\Delta\varphi = 30°$ (см. решение задачи 2.21). **2.24.** Уменьшится в 3 раза. **2.25.** 3 кг. **2.26.** Уменьшилась в 4 раза. **2.27.** 12 об/мин. **2.28.** Из закона сохранения момента импульса $J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = 0$, где $J_1 = m_1R_1^2$,

$$J_2 = \frac{m_2R_2^2}{2};$$

$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$, $\omega_2 = 2\pi n_2$, а скорость человека относительно оси вращения $v_1 = v - v_2 = v - \omega_2 R = v - 2\pi n_2 R_1$. Отсюда

$$n_2 = \frac{m_1R_1v}{\pi(2m_1R_1^2 + m_2R_2^2)} = 0,38 \text{ мин}^{-1}.$$

2.29. $E_к = \frac{J_1\mathcal{E}t_2^2}{2t_1} = 120$ Дж.

2.30. $n = \frac{3m_1v}{\pi(m + 3m_1)l} = 3,7$ с⁻¹.

2.31. ≈0,64 кВт. **2.32.** Перегрузки: $\frac{a_1 + g}{g} \approx 5,5$; $\frac{a_2 + g}{g} \approx 2$; $\Delta t' = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,4$ с.

Указание: $v_{max} = \sqrt{2gh}$, $a = \frac{v_{max}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t}$.

2.33. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)$ (рис. 3). Перегрузки $\frac{\sqrt{g^2 + (\omega^2R^2)}}{g} \approx 4$. **2.34.** $\sqrt{2}$.

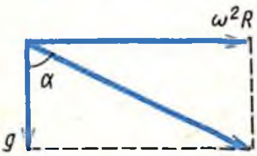


Рис. 3

2.35. 634 нН. **2.36.** 332·10³ рад/с. **2.37.** $x = 0,05\cos(\pi t + \pi/3)$ [x в м]; $v_{max} = 0,16$ м/с. **2.38.** $x = 0,1\cos(2\pi t + \pi/2)$ [x в м]; $a_{max} = 3,96$ м/с²; $\nu = 1$ Гц. **2.39.** 0,5 с. **2.40.** 4 рад/с; 1,57 с; $\pi/4$ рад; $7\cdot10^{-2}$ м; $0,8\cdot10^{-4}$ Дж. **2.41.** $t_1 = 1/6$ с; $t_2 = 1/12$ с; $t_3 = 1/6$ с. **2.42.** 2 мН; 0,1 мкДж. **2.43.** 3,14 с; 2 рад/с. **2.44.** 2,5 Гц. **2.45.** 0,4 с.

2.46. $\rho_ц hSg = \frac{2}{3}\rho_ж hSg$; $\rho_ц = \frac{2}{3}\rho_ж$, где $\rho_ц$ и $\rho_ж$ — плотности вещества цилиндра и жидкости. Составим дифференциальное уравнение вертикальных колебаний цилиндра:

$$\rho_ц hS\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_ж Sgx,$$

или $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3g}{2h}x = 0$, откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2h}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}} = 0,94 \text{ с}.$$

2.47. 0,6 Гц. **2.48.** $T = 2\pi\sqrt{l/(2g)} = 1$ с.

2.49. 0,2 м. **2.50.** $E_к = 0{,}04$ Дж; $E_п = 0{,}12$ Дж. **2.51.** $\frac{d^2x}{dt^2} + 50x = 0$;
$x = 0{,}2\cos(\sqrt{50}\,t + \pi/4)$ [x в м].
2.52. $E_к = 0$; $E_п = 5\cdot 10^{-7}$ Дж; $E = 5\cdot 10^{-7}$ Дж. **2.53.** Из закона сохранения импульса $mv = (M + m)u$, откуда $u = mv/(M + m)$. Максимальная кинетическая энергия шара с пулей

$$E_к = \frac{kA^2}{2} = \frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{(m + M)m^2v^2}{2(M + m)^2} = \frac{m^2v^2}{2(M + m)}.$$

Отсюда $A = mv(k/(M + m))^{-1/2}$. Так как $\omega = \sqrt{k/(M + m)}$, то
$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(M + m)/k}$.
Тогда $v_{max} = A\omega = mv/(M + m)$;
$a_{max} = A\omega^2 = mv\sqrt{k}/\sqrt{(M + m)^3}$.
2.55. 49 кг·м². **2.56.** 0,8 Гц. **2.57.** $x = 5{,}83\cos 5(t - 0{,}09\pi)$. **2.58.** $x_1 = 8\cos(6t + 0{,}1\pi)$;
$x_2 = 4\cos(6t + 0{,}5\pi)$. **2.59.** $\pi/3$. **2.60.** 1) прямая, проходящая под углом 45° к оси Ox; 2) точка на экране осциллографа. **2.61.** $u_1^2 + u_2^2 = 4$. **2.62.** $u_1 = 0{,}6u_2$. **2.63.** 0,223; 6,3 с. **2.64.** 0,1 $с^{-1}$. **2.65.** 23 с. **2.66.** В e раз. **2.67.** 20,9 с. **2.68** $\lambda = 0{,}023$; $n = 43{,}5$. **2.69.** 0,25 $с^{-1}$; 4 рад/с. **2.70.** $\lambda = 0{,}01$; $\beta = 0{,}025$ $с^{-1}$;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}05\frac{dx}{dt} + 246x = 0.$$ **2.71.**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}4\frac{dx}{dt} + 196x = 0;$$

$x = 0{,}10e^{-0{,}2t}\cos 14t$ [x в м]. **2.72.** $\eta = \frac{4}{9}\rho R^2\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} = 543$ Па·с, где ρ — плотность стали. **2.73.** $\omega = 3\,с^{-1}$; $\omega_0 = 2\,с^{-1}$; $\omega_{рез} = 1{,}8\,с^{-1}$. **2.74.** 1.67 с. **2.75.** 4 $с^{-1}$. **2.76.** $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$; $\omega_0^2 = k/m$; $A = 5\cdot 10^{-2}$ м.
2.77. $s = \sin 2000\pi(t - 0{,}3)$. **2.78.** $3{,}5\pi$. **2.79.** 300 Гц. **2.80.** 2 м. **2.81.** $x = 0$; $v = 1{,}57\cdot 10^4$ м/с; $a = 0$. **2.82.** $0{,}4\pi$. **2.83.** $0{,}048\pi$. **2.84.** $\pi/17$. **2.85.** $A_1 = 5$ нм, $A_2 = 0{,}1$ нм, $A_3 = 0{,}005$ нм; $w_1 = w_2 = w_3 \approx 3\cdot 10^{-13}$ Дж/м³. **2.86.** Для воздуха: $\lambda_1 = 17$ м, $\lambda_2 = 0{,}017$ м; для воды: $\lambda_1 = 70$ м, $\lambda_2 = 0{,}07$ м. **2.87.** $A = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}}$;
а) $A \approx 0{,}01$ нм; б) $A \approx 0{,}32$ мкм.
2.88. $F = s\sqrt{2I\rho v}$; а) $F \approx 1{,}95$ нН; б) $F \approx 6{,}17$ мН. **2.89.** а) 874 Гц; б) 733 Гц. **2.90.** а) 680 Гц; б) 670 Гц.
2.91. На кривой равной громкости (см. рис. 2.1), соответствующей порогу слышимости, абсцисса 100 Гц соответствует уровню интенсивности звука 40 дБ. Увеличение интенсивности звука происходит в 1000 раз, т. е. на $\Delta L_{дБ} = 10\lg 1\,000 = 30$ дБ. Таким образом, создается уровень интенсивности звука, равный $40 + 30 = 70$ (дБ). Этот уровень интенсивности звука на частоте 100 Гц соответствует кривой равной громкости 45 фон. Следовательно, уровень громкости возрос от 0 до 45 фон; б) для 1000 Гц громкость звука увеличилась на $\Delta E_ф = \Delta L_{дБ} = 10\lg 1000 = 30$ фон. **2.92.** В 100 раз. **2.93.** $p_1/p_2 = 32$. **2.94.** 10^{-5} Вт/м². **2.95.** $150 = 10\lg(I/I_0)$, т. е. $I/I_0 = 10^{15}$, откуда $I = 10^{15}I_0 = 1$ кВт/м²; $p = \sqrt{2\rho v I} \approx 937$ Па, так как $I = \omega_\rho v = 2\pi^2\nu^2\rho v A^2$,

$$A = \frac{1}{\pi\nu}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}} \approx 3{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$ **2.96.**

$$\begin{cases} 50 = 10\lg(I/I_0), \\ E_2 = 10\lg(3I/I_0); \end{cases}$$

$5 - 0{,}1E_2 = \lg[I/(3I)] = -0{,}48$, откуда $E_2 = 54{,}8$ фон.

2.97.

$$\begin{cases} 70 = \lg(I/I_0), \\ 80 = 10\lg(I/I_0), \end{cases}$$

$$x = 10\lg\frac{I_1 + I_2}{I_0};$$

$$\begin{cases} I_1 = 10^7 I_0, \\ I_2 = 10^8 I_0, \end{cases}$$

$I_1 + I_2 = 1{,}1\cdot 10^8 I_0$;

$0{,}1E = \lg 1{,}1\cdot 10^8 = 8{,}04$; $E = 80{,}4$ фон.
2.98. 1.25. **2.99.** 100. **2.100.** 10^{-7} Вт/м². **2.101.** 15 фон; 55 фон. **2.102.** На 50 фон. **2.103.** 10^{-5} Вт/м²; 10^{-7} Вт/м²; 10^{-8} Вт/м². Указание: задачи **2.100** — **2.103** решаются с использованием кривых равной громкости. **2.104.** 0,2 м/с; 0,1 м/с. **2.105.** $S_к/S_а \approx 800$. **2.106.** $p_1 + \rho v_1^2/2 =$

$= p\rho v^2/2$, где p_1 и v_1 — давление и скорость в сечении поршня, а p и v — в сечении иглы. Из условия неразрывности струи имеем $S_1 v_1 = Sv$. Так как $S_1 \gg S$, то $v_1 \ll v$ можно считать, что $v_1 \approx 0$. Тогда $p_1 = p + \rho v^2/2$, где p — атмосферное давление, $p_1 > p$ на F/S, поэтому $p_1 - p = F/S = \rho v^2/2$, откуда $v = \sqrt{2F/(S\rho)} \approx 10{,}5$ м/с. **2.107.** 4,9 кПа; а) $\Delta p = 0$; б) перегрузка, равная 3, соответствует движению с ускорением $a = 2g$ в поле тяготения, поэтому $\Delta p = 2\rho g \Delta h + \rho g \Delta h = 14{,}7$ кПа. **2.108.** 1,7 м/с. **2.109.** 5,2 м/с. **2.110.** 4,4 м/с. **2.111.** $p_0 + \rho v_0^2/2 = p_1 + \rho v_1^2/2$; $S_{x_0} v_0 = S_{x_1} v_1$, откуда $v_1 = \left(\frac{S_{x_0}}{S_{x_1}}\right) v_0$. Тогда

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v_1^2) = p_0 + \frac{\rho v^2}{2} \times \left(1 - \frac{S_{x_0}^2}{S_{x_1}^2}\right) = 0{,}9 \text{ Па};$$

$$p_д = \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_0^2 S_{x_0}^2}{2S_{x_1}^2} = 0{,}2 \text{ Па}.$$

2.112. На участке $x < 0$ сечение трубки одинаково, следовательно, $p = \text{const}$. На участке $x > 0$ имеем

$$p_0 + \rho v_0^2/2 = p(x) + \rho v^2(x)/2;$$

так как $S_0 v_0 = Sv$, то $v = r^2 v_0/(x+r)^2$. Тогда

$$p(x) = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \times \left(1 - \frac{r^4}{(x+r)^4}\right).$$

Зависимость $p(x)$ изображена на рис. 4. **2.113.** На участке $x > 0$ имеем

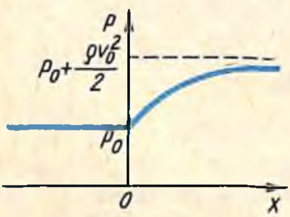


Рис. 4

$$\frac{dp}{dx} = \frac{Q8\eta}{\pi(x+r)^4}; \qquad dp = \frac{8Q\eta}{\pi(x+r)^4}\, dx.$$

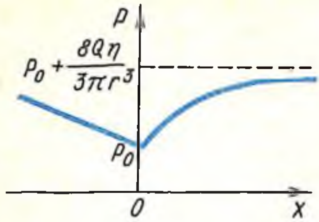


Рис. 5

Интегрируя, получаем

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_0^x \frac{8Q\eta}{\pi} \frac{dx}{(x+r)^4};$$

$$p(x) = p_0 - \frac{8Q\eta}{3\pi}\left[\frac{1}{(x+r)^3} - \frac{1}{r^3}\right].$$

На участке $x < 0$ имеем $p(x) = p_0 - \frac{8Q\eta}{\pi R} x$. Зависимость $p(x)$ изображена на рис. 5. **2.115.** 0,315 мН. **2.116.** $M = Fr = \eta \frac{dv}{dr} Sr = \eta \frac{dv}{dr} h\pi D \times \frac{D}{2} = \frac{\pi\eta}{2} D^2 h \frac{dv}{dr} = 7{,}9 \cdot 10^{-7}$ Н·м. **2.117.** $\Delta t = h/v_0 \approx 161$ мин. Указание: из формулы (2.71) найти v_0. **2.118.** а) из закона Стокса $v = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_ж) r^2 g}{\eta} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ м/с, тогда $t = 2{,}3 \cdot 10^3$ с; б) в закон Стокса вместо g следует подставить $\omega^2 R = (2\pi n)^2 R$ и тогда $v = 1{,}3$ м/с и $t = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$ с. **2.119.** $m = v\rho S = v\rho\pi D^2/4$, где ρ — плотность крови, $\mathrm{Re} = \rho v D/\eta$, тогда $v = \mathrm{Re}\eta/(\rho D)$ и $m = \mathrm{Re}\eta\pi D/4 = 0{,}18$ кг. **2.120.** $\approx 2{,}2$ мм. **2.121.** Увеличится приблизительно на 3%. **2.122.** 96 кПа. **2.123.** 0,1 мм. **2.124.** 6,5. **2.125.** 500 кПа. **2.127.** 5 кПа. **2.128.** $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Па. **2.129.** $1{,}5 \cdot 10^{26}$ П/м³. **2.130.** $0{,}4 \cdot 10^{-2}$ м³/с. **2.134.** 4,1 МПа. **2.135.** 88,3 Па.

3.1. 2640 Дж. **3.2.** $23{,}12 \cdot 10^{-3}$ м³. **3.3.** В данном случае происходит изотермическое испарение жидкости при постоянном давлении. Во-первых, в систему поступает теплота для нагревания жидкости, во-вторых, образовавшийся пар расширяется против атмосферного давления, совершая работу. Количество воды в системе равно 1 моль, при этом теплота равна молярной теплоте испарения. Совершаемую при этом работу можно определить по формуле (3.3.). Поскольку испаряется 1 моль воды и первоначально газ не присутствует в системе, изменение числа молекул равно 1. Таким образом, $Q=40{,}62$ кДж, $A=3{,}1$ кДж, $\Delta U = a - A = 37{,}5$ кДж. **3.4.** Используя формулу (3.4), находим ΔU. При этом учитываем, что $C_V \approx 3$ для идеального одноатомного газа. В данном процессе $A = -\Delta U = 27{,}8 \cdot 10^2$ $м^3 \cdot$Па ($C_V = 5$ для двухатомного газа). **3.5.** $21 \times \times 10^2$ $м^3 \cdot$Па. **3.6.** 1) 5 749 Дж; 2) 1 978 Дж. **3.7.** Величину V_1 рассчитываем по закону идеальных газов: $V_1 = nRI/p_1$, $V_1 = 11{,}3$ л. Конечный объем газа при обратимом адиабатном расширении находим из уравнения $p_1V_1^{7/5} = p_2V_2^{7/5}$, учитывая, что $C_p/C_V = 7/5$ для двухатомного газа. При этом $V_2 = 12{,}7$ л. **3.8.** В атмосферном воздухе содержится около 21% кислорода и 0,03% углекислого газа. Следовательно, из каждых 100 мл воздуха, прошедших через легкие человека, организмом поглощается $21 - 15 = 6$ мл O_2. При этом выделяется 5 мл CO_2. Минутный объем дыхания человека равен 60 л : 10 = 6 л. Для расчета количества кислорода, поглощаемого человеком за минуту, составляем пропорцию: из 100 мл воздуха потребляется 6 мл O_2, из 6 000 мл — x, следовательно $x = 360$ мл O_2. Дыхательный коэффициент определяем, исходя из данных задачи, ДК $= CO_2/O_2 = 5/6 = 0{,}83$. Из табл. 21 находим калорический коэффициент при данном дыхательном. Он равен 20,26 кДж. Расход энергии человека в минуту в состоянии мышечного покоя составляет $0{,}360 \times \times 20{,}26 = 7{,}29$ кДж. За 10 мин энергетический расход составляет 72,9 кДж. **3.9.** 832,8 кДж. **3.10.** 21,14 кДж. **3.11.** 41 К. **3.12.** 4,1 л O_2. **3.13.** В сутки кролик потребляет 36 л O_2 (1,5·24). Расход энергии кролика за сутки составляет 738,55 кДж с учетом калорического эквивалента кислорода. **3.14.** 20 л. **3.15.** Изменение энтропии в системе происходит в два этапа: I этап — плавление льда при 273 К. Для 1 моль воды $\Delta S_1 = Q/T = 21{,}77$ Дж/К; II этап — нагревание от 232 до 373 К: $\Delta S_2 = 2{,}303 \ C_p \lg(T_2/T_1) = 23{,}45$ Дж/К; $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 45{,}2$ Дж/К. **3.16.** 108,86 Дж/К. **3.17.** 319 К. **3.18.** 39,6 Дж/(М·К). **3.20.** 5,86 Дж/К. **3.21.** 854 кДж. **3.24.** 121,4 кДж/М. **3.25.** —2870 кДж. **3.26.** 447 К. **3.27.** $\langle x_1 \rangle = 4{,}38 \cdot 10^{-2}$ см; $\langle x_2 \rangle = 1{,}9 \times \times 10^{-2}$ см. **3.28.** $-3{,}2 \cdot 10^{-6}$ М·см/с. **3.29.** 2,4 $см^2$/с. **3.30.** $8 \cdot 10^{-6}$ $см^2$/с. **3.31.** 16 см/с. **3.32.** 1) $9{,}6 \cdot 10^{-8}$ м; 2) $0{,}3 \cdot 10^{-8}$ м. **3.33.** 4,2 мм, для Ca^{2+} $3{,}04 \cdot 10^{-8}$ м. **3.37.** 6,7 мВ. **3.39.** 1) 0; 2) 67,3 мВ; 3) 134,7 мВ. **3.43.** 134,7 мВ. **3.44.** 10^{-7} Кл·$см^{-1}$. **3.45.** 55,3 мВ. **3.46.** 410 мМ. **3.47.** 0,09 с. **3.48.** $1{,}85 \times \times 10^{-3}$ см/с.

4.1. 10^7 В/м. **4.2.** Так как $C/S = \varepsilon_r\varepsilon_0/l$, то получим 0,44 мкФ/$см^2$ для мембраны, 2,7 пФ/$см^2$ для конденсатора. **4.3.** $1{,}6 \cdot 10^{-29}$ Кл·м $\approx 4{,}8$ Д. **4.4.** $3 \times \times 10^{-15}$ Кл·м. **4.5.** $1{,}25 \cdot 10^{-25}$ Н·м. **4.6.**

$$F = p\frac{dE}{dx} = p\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\right) = -\frac{pq}{2\pi\varepsilon_0 x^3} = 2{,}16 \text{ мН}.$$

4.7. $5{,}4 \times \times 10^{-28}$ Н·м. **4.8.** $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{pE}{J}\alpha = 0$; $T = 2\pi\sqrt{J/(pE)}$. **4.9.** 0,38 В. **4.10.** 0,44 В. У к а з а н и е: использовать формулы (4.4) и (4.5). **4.11.** $E = p/(2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^3)$. **4.12.** $3{,}4 \cdot 10^{-18}$ Н; $2{,}25 \cdot 10^{-19}$ Н·м. **4.15.** 10^{-11} Кл·м. У к а з а н и е: в формуле (4.5) следует применять $\gamma = 120°$, $\beta = 0$. **4.16.** $P_l \approx 6{,}2$ мКл/$м^2$. У к а з а н и е. Следует суммировать электрические моменты упорядоченно ориентированных молекул в 1 $м^3$ воды. **4.17.** $p_l = \sigma_{св} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Кл/$м^2$. **4.18.** а) напряженности электрического поля в диэлектриках различны, поэтому пользуемся формулой $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \times \times E_0/E_r$, где E_0 — напряженность поля, которое создавалось бы в вакууме свободными зарядами. Искомое отношение равно $\sigma_{св}$ (в воде)/$\sigma_{св}$ (в глицерине) = 1,01; б) напряженность электрического поля в обоих диэлектриках одинакова. Используя формулу (4.7), получаем отношение поверхностных плотностей связанных зарядов, равное 1,9. **4.19.** $C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi\varepsilon_0\sqrt[3]{3m/(4\pi\rho)} = 9$ пФ. **4.20.** 74 Дж/$м^3$. **4.21.** Уменьшилась на 7 мДж. **4.22.** а) $A_1 =$

$$= \int_0^{\alpha_1} M d\alpha = \int_0^{\alpha_1} Ep \sin\alpha d\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж};$$

б) $A_2 = 2A_1$. **4.23.** $\Delta E = 69$ нДж; $\Delta E = A$. **4.24.** Изменение энергии конденсатора: $\Delta E_к=\frac{C_2U^2}{2}-\frac{C_1U^2}{2}=\frac{U^2}{2}\times$ $\times(C_2-C_1)=\frac{U^2C_1}{2}\left(\frac{C_2}{C_1}-1\right)=$ $=\frac{U^2\varepsilon_0 S}{2l_1}\left(\frac{l_1}{l_2}-1\right)=-20{,}6$ нДж; изменение энергии источника тока: $\Delta E_и=$ $=U\Delta q=UU\Delta C=U^2(C_1-C_2)=U^2\times$ $\times C_1\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)=(U^2\varepsilon_0 S/l_1)(1-l_1/l_2)=$ $=41{,}2$ нДж; работа по раздвижению пластин конденсатора $A=\Delta E_и+\Delta E_к=$ $=(4{,}12-2{,}06)\cdot 10^{-8}$ Дж $=20{,}6$ нДж. **4.25.** $2{,}4\cdot 10^4$ А/м²; 7,3 мА. **4.26.** 1,76 мА/м²; $1{,}76\cdot 10^{-14}$ А. **4.27.** $j=$ $=U/(2\rho_1 l_1+\rho_2 l_2)=0{,}599$ А/м²; $U_1=$ $=j2\rho_1 l_1=35{,}9$ В; $U_2=j\rho_2 l_2=0{,}0113$ В (здесь ρ_1 и ρ_2 — удельные сопротивления кожи и мышечной ткани). **4.28.** $n=I/(2qV)=j/(2ql)\approx 1{,}3\cdot 10^{15}$ м$^{-1}$. **4.29.** $U=IV/(nq(b_+ + b_-)S^2)\approx 3$ кВ. **4.30.** Из условия задачи $\beta=3$ мкВ/К, тогда $\mathcal{E}_т=\beta\Delta T=3\cdot 0{,}5=1{,}5$ мкВ. Следовательно, можно установить повышение температуры тела человека. **4.31.** Увеличится в $2{,}5\cdot 10^4$ раз. **4.32.** Уменьшится в 2,9 раза. **4.33.** 0,7 эВ. **4.34.** 1,1 эВ. **4.35.** $\alpha=-\frac{\Delta E_3}{2kT^2}$. **4.36.** $-0{,}0067$ К$^{-1}$. **4.37.** $H_A=63{,}7$ А/м, $B_A=9\cdot 10^{-5}$ Тл; $H_B=73{,}4$ А/м, $B_B=$ $=9{,}3\cdot 10^{-5}$ Тл. **4.38.** Искомые точки лежат на прямой, параллельной проводникам, на расстоянии 5 см слева от проводника с током силой I_1. **4.39.** ≈ 85 А/м. **4.40.** $H=[16I/(\pi l)]\sin 45°\approx$ ≈ 90 А/м; $B\approx 0{,}22$ мТл. **4.41.** ≈ 11 А/м. **4.42.** $H=I/(4\pi b)\approx 32$ А/м. **4.43.** $N=$ $=2rH/I=7$. **4.44.** 13,2 А/м; $1{,}65\times$ $\times 10^{-5}$ Тл. **4.45.** $B=I\mu_0/(4r)=2\times$ $\times 10^{-5}$ Тл. **4.46.** 5 мН/см. **4.47.** $F_1=0$; $F_2=F_3=0{,}087$ Н. **4.48.** $F_{AB}=I_2 l\times$ $\times\frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}=2$ мкН;

$$F_{CD}=I_2 l\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(b+l)}=0{,}67 \text{ мкН};$$

$$F_{BC}=F_{AD}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_b^{b+l}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\times$$

$\times\ln\frac{b+l}{b}=1{,}1$ мкН; равнодействующая $F=F_{AB}+F_{CD}+F_{BC}+F_{AD}$; $F=$ $=1{,}36$ мкН. **4.49.** $\Phi=\int_S B_n dS=$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln 2=0{,}69 \text{ Вб}.$$

4.50. $1{,}8\cdot 10^{-4}$ Вб. **4.51.** 0,7 Дж. **4.52.** 0,3 А·м². **4.53.** $p_m=evr/2=$ $=0{,}93\cdot 10^{-25}$ А·м². **4.54.** 8 мкН·м. **4.55.** 1,25 мН·м. **4.56.** 0,04 А·м²; 6,8 мН·м. **4.57.** На рамку с током в однородном магнитном поле действует вращающий момент $M=p_m B$. В положении устойчивого равновесия $p_m\uparrow\uparrow B$ и $M=0$. Малые свободные колебания рамки будут совершаться около устойчивого положения равновесия. Запишем второй закон Ньютона для рамки: $J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-p_m B\varphi$ или $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{p_m B}{J}\varphi=$ $=0$. Решением этого уравнения будет

$\varphi=\varphi_0\cos\omega t$, где $\omega=\sqrt{\frac{p_m B}{J}}=$ $=\sqrt{\frac{ISB}{J}}=\frac{2\pi}{T}$. Отсюда $B=\frac{4\pi^2 J}{T^2 IS}=$ $=8$ Тл. **4.58.** 0,05 В. **4.59.** ≈ 3 мВ. **4.60.** Магнитный поток через рамку $\Phi=Bl^2\cos(90°-\alpha)=0{,}1l^2\times$ $\times\cos(90°-\alpha)\sin\pi t$.

Э. д. с. в рамке изменяется по закону

$$|\mathcal{E}_i|=\frac{d\Phi}{dt}=0{,}1\pi l^2\cos(90°-\alpha)\cos\pi t=$$
$$=15{,}7\cdot 10^{-4}\cos\pi t.$$

В момент $t=4$ с э. д. с. в рамке равна $\mathcal{E}_i=15{,}7\cdot 10^{-4}$ В. **4.61.** 1,51 В. **4.62.** 0,5 В. **4.63.** 0,08 Кл. **4.64.** $1{,}9\times$ $\times 10^{-4}$ Ом. **4.65.** 10^{-5} Кл. **4.66.** $6{,}28\times$ $\times 10^{-2}$ В. **4.67.** 500 витков. **4.68.** 0,2 м. **4.69.** 0,5 м. **4.70.** 5 Гн. **4.71.** 37,7 В. **4.72.** 60 В. **4.73.** 150 В. **4.74.** $1{,}6\times$ $\times 10^{-7}$ Дж; 10^{-5} Дж/м³. **4.75.** 1,5 Дж. **4.76.** 400. **4.77.** Возросла в 10 раз. **4.78.** Плотность энергии магнитного поля $w_м=\mu_r\mu_0 H^2/2$; для прямого тока $H=I/(2\pi b)$, где b — расстояние от тока. Тогда $w_м=\mu_r\mu_0 I^2/(8\pi^2 x^2)$, т. е. плотность энергии магнитного поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от тока. На расстоянии $x=r$, т. е. при $r=5$ см $w_м=$ $=1{,}1\cdot 10^{-4}$ Дж/м³. **4.79.** $0{,}96\cdot 10^8$ Кл/кг. **4.80.** Радиус кривизны траектории будет в 43 раза больше у протона. **4.81.** Электрон, пройдя разность потенциалов U, приобретает кинетическую энергию: $mv^2/2=eU$, откуда $v=$ $=\sqrt{2Ue/m}$. В магнитном поле на

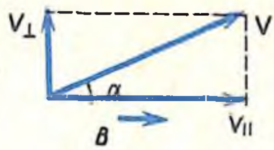


Рис. 6

электрон действует сила Лоренца $f_л = evB = ev\mu_0 H$, которая вызовет центростремительное ускорение, и по второму закону Ньютона $ev\mu_0 H = mv^2/r$, откуда $r = \frac{v}{\mu_0 He/m}$, или $r = \frac{1}{\mu_0 H} \times \sqrt{\frac{2U}{e/m}} = 5{,}8$ мм. **4.82.** Протон влетает в магнитное поле со скоростью **v**, направленной под углом α к вектору индукции **B** (рис. 6). Из рисунка имеем $v_\perp = v\sin\alpha$, $v_\parallel = v\cos\alpha$; $v_\perp qB = m \times v_\perp^2/r$. Отсюда $v_\perp = Brq/m$. Шаг винтовой линии: $h = v_\parallel T$, где T — период обращения протона, равный $T = 2\pi r/v_\perp$. Тогда

$$h = \frac{v_\parallel}{v_\perp}2\pi r = v_\parallel \frac{2\pi}{Bq/m}.$$

Отсюда

$$v_\parallel = \frac{hB}{2\pi}\frac{q}{m};$$

$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2 = B^2\left(\frac{q}{m}\right)^2\left[\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2\right].$$

Вычислив v, находим $E_к = mv^2/2 = 7\cdot10^{-15}$ Дж. **4.83.** $v = \frac{rB}{\sin\alpha}\frac{e}{m} = 6{,}34\cdot10^6$ м/с; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi r}{h} = 0{,}58$ ($\alpha = 30°$). **4.84.** $T = \frac{2\pi}{Be/m} = 2\cdot10^{-10}$ с.

5.1. а) 0; б) 72°; в) 180°; г) 360°; д) 432°. **5.2.** а) 0; б) $\lambda/6$; в) $\lambda/4$; г) $\lambda/2$; д) λ; е) $1{,}5\lambda$. **5.3.** $\Delta\delta = nl - l = l(n-1) = 0{,}5$ мм. **5.4.** 0; 56 см. **5.5.** а) минимум; б) максимум; в) частичное гашение. **5.6.** Из формулы (5.2) следует $k = \delta/\lambda$, где k — целое число, удовлетворяющее условию: $\frac{2{,}5\ мкм}{0{,}4\ мкм} \geqslant k \geqslant \frac{2{,}5\ мкм}{0{,}76\ мкм}$, или $6{,}25 \geqslant k \geqslant 3{,}29$. Отсюда $k = 4$, 5, 6 и тогда $\lambda_1 = 2{,}5/4 = 0{,}625$ мкм; $\lambda_2 = 2{,}5/5 = 0{,}5$ мкм; $\lambda_3 = 2{,}5/6 = 0{,}416$ мкм. **5.7.** $\lambda_1 = 0{,}57$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}44$ мкм (см. решение задачи 5.6). **5.8.** Темнота. **5.9.** $\delta = 0{,}6$ см; $k = \delta/\lambda = 1\,000$, так как k равно целому числу, то результатом интерференции будет максимум. **5.10.** Возрастет в 1,3 раза. **5.11.** Уменьшится в 1,33 раза. **5.12.** Рассмотрим некоторую произвольную точку A экрана (см. рис. 5.5). Введем обозначения: $AO = x$, $AS_1 = l_1$, $AS_2 = l_2$. На основании теоремы Пифагора запишем: $l_1^2 = l^2 + (x - b/2)^2$, $l_2^2 = l^2 + (x + b/2)^2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $l_1^2 - l_2^2 = 2xb$, или $(l_1 - l_2)(l_1 + l_2) = 2xb$. Так как $l \gg b$, то $l_1 + l_2 \approx 2l$; $l_1 - l_2 = \delta$ и тогда имеем приближенное равенство: $\delta\cdot 2l = 2xb$ или $\delta = xb/l$. **5.13.** Расстояние AO выразим в длинах волн: $AO = k_0\lambda$, расстояние от A до n-й линии голограммы $k_n\lambda$, где $k_n = k_0 + n$. Искомое расстояние

$$x_n = \sqrt{(k_n\lambda)^2 - (k_0\lambda)^2} = \lambda\sqrt{k_n^2 - k_0^2} = \lambda\sqrt{n^2 + 2k_0 n}.$$

Находим: $x_4 = 1{,}41$ мм, $x_5 = 1{,}58$ мм, $\Delta x_{5,4} = 0{,}17$ мм; $x_9 = 2{,}12$ мм, $x_{10} = 2{,}24$ мм, $\Delta x_{10,9} = 0{,}12$ мм; $x_{14} = 2{,}65$ мм, $x_{15} = 2{,}74$ мм, $\Delta x_{15,14} = 0{,}09$ мм. **5.14.** $\lambda = 0{,}5$ мкм. **5.15.** Найдем, на сколько длин волн (λ) или полудлин ($\lambda/2$) изменилась оптическая разность хода при внесении пластинки:

$$k = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\lambda} = \frac{n_2 l - n_1 l}{\lambda} = 10{,}5,$$

где n_1 — показатель преломления воздуха. Полученное значение k означает, что оптическая разность хода изменилась на нечетное число полуволн. Откуда можно заключить, что интерференционная картина изменилась на противоположную: на месте темных полос оказались светлые, а на месте светлых — темные. **5.16.** $2ln\cos r = (2k+1)\lambda/2$ (максимум); $2ln\cos r = k\lambda$ (минимум). **5.19.** $l_{min} = 1{,}33\times10^{-5}$ см. **5.20.** Из (5.4) выразим длину волны: $\lambda = \frac{4l\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{2k+1}$; для $i = 0$ имеем $\lambda = 4ln/(2k+1)$; подставляя значения l и n получаем: $\lambda_1 = 1{,}6$ мкм для $k_1 = 0$; $\lambda_2 = 0{,}53$ мкм для $k_2 = 1$; $\lambda_3 = 0{,}32$ мкм для $k_3 = 2$. Если сопоставить эти данные с длинами волн видимого диапазона, то следует выбрать $\lambda_2 = 0{,}53$ мкм, что соответствует зеленому цвету. **5.21.** 120 нм. **5.22.** 0,1 мкм, в этом случае нет потери полуволны. **5.24.** Так как $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$ (стекло), то $n = \sqrt{n_2} = 1{,}22$. Из условия минимума интерференции в отраженном свете (без потери полуволны) находим $l_{\min} = \lambda/(4n) = 113{,}7$ нм. **5.25.** Интерференционные полосы (темные и светлые) возникают вследствие отражения света на поверхностях воздушного клина, образованного между стеклянными пластинками. Первая от точки A темная полоса (с учетом потери полуволны) возникает при толщине воздушного слоя $\lambda/2$ (разность хода λ), вторая — при толщине λ и т. д. Общее число светлых или темных полос на расстоянии l равно ml, где m — число светлых или темных полос, приходящихся на единицу длины клина. Из предыдущего рассуждения должно быть ясно, что максимальная толщина воздушного промежутка, т. е. толщина проволочки,

$$D = (\lambda/2)\,ml = \frac{0{,}6\cdot 10^{-6}}{2}\,2\,000\cdot 5 \times 10^{-2} \text{ м} = 3\cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

5.26. По пяти темных и светлых полос на 1 см. **5.27.** Оптическая разность хода интерферирующих лучей зависит от ширины воздушного промежутка, например $AD = x$ (см. рис. 5.9) и потери полуволны, которая имеет место для луча, отраженного от поверхности δ:

$$\delta = 2x + \lambda/2.$$

Для светлых полос (максимум) в отраженном свете имеем

$$\delta = 2x + \lambda/2 = k\lambda;\quad x = (2k-1)\ \lambda/4, \quad (1)$$

для темных полос (минимум):

$$\delta = 2x + \lambda/2 = (2k+1)\lambda/2;\quad x = k\lambda/2, \quad (2)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Введем обозначение: $|AO| = |OC| = R$, $|AB| = r_k$, $|OB| = R - x$. В $\triangle ABO$: $R^2 = r_k^2 + (R-x)^2 = r^2 + R^2 - 2Rx + x^2$.
Так как x мало, то пренебрегаем x^2 по сравнению с другими членами уравнения. Тогда $r_k = \sqrt{2Rx}$. Сопоставляя (3) с (2) и (1), получаем выражения для радиусов темных колец Ньютона $r_k = \sqrt{kR\lambda}$ и светлых $r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda/2}$. **5.28.** Темное. **5.29.** 0,72 мкм. **5.30.** Так как $r_{k+1}^2 = (k+1)R\lambda$, $r_k^2 = kR\lambda$ (см. решение задачи 5.27), то $r_{k+1}^2 - r_k^2 = R\lambda$, откуда $\lambda = (r_{k+1}^2 - r_k^2)/R = 0{,}497$ мкм; $k = r_k^2/(R\lambda) = 5$; $k+1 = 6$. **5.31.** 0,153 мм. **5.32.** Запишем условие (5.4) для двух длин волн ($\sin i = 0$):

$$2\,ln = (2k_1+1)\,\lambda_1/2, \quad (1)$$

$$2ln = (2k+1)\,\frac{\lambda_1 + \Delta\lambda}{2}, \quad (2)$$

где $k_1 = k+1$, $\lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_2$. Приравнивая правые части (1) и (2), имеем

$$\lambda_1 = (2k+1)\,\Delta\lambda/2. \quad (3)$$

Решая совместно (2) и (3), получаем $\lambda_1 = 2ln\,\Delta\lambda/(\lambda_1 + \Delta\lambda)$. Так как $\lambda_1 \gg \Delta\lambda$, то $l = \lambda_1^2/(\Delta\lambda\cdot 2n) = 0{,}6$ мм. **5.33.** $l(n_1 - n) = N\lambda$, $n_1 = n + N\lambda/l = 1{,}000346$. **5.34.** 1,000489. **5.35.** 0,037 мм. **5.36.** Из (5.8) следует $\sin\alpha = \pm\lambda/a = 3{,}2\cdot 10^{-3}$. Отсюда $\arcsin 3{,}2\cdot 10^{-3} \geqslant \alpha \geqslant -\arcsin 3{,}2 \times 10^{-3}$. Так как угол мал, то можно записать: $3{,}2\cdot 10^{-3}$ рад $\geqslant \alpha \geqslant -3{,}2\times 10^{-3}$ рад. **5.37.** 50λ. **5.38.** 30°. **5.39.** Найдем, четному или нечетному числу полуволн равно произведение $a\sin\alpha$:

$$\frac{2a\sin\alpha}{\lambda} = \frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\sin 17'}{500\cdot 10^{-9}} = 2;$$

$$\frac{2a\sin\alpha}{\lambda} = \frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\sin 43'}{500\cdot 10^{-3}} = 5.$$

Следовательно, в первом случае наблюдается минимум, во втором — максимум. **5.40.** 0,5 мкм. **5.41.** 21°28′; 28419. **5.42.** Теоретически возможное значение $\alpha = 90°$. При этом $k\lambda = c$, отсюда $k \leqslant c/\lambda = 4\cdot 16$, т. е. k (целое число) $= 4$. С учетом того, что максимумы расположены попарно симметрично относительно центрального, а также учитывая и центральный максимум, получаем $k = 4 + 4 + 1 = 9$. **5.43.** $\alpha = \arcsin(\lambda/c)$; $\alpha_5 = \arcsin\dfrac{0{,}0005}{0{,}17} = 10'$, $\alpha_{10} = \arcsin\dfrac{0{,}0005}{0{,}12} = 14'$, $a_{15} = \arcsin\dfrac{0{,}0005}{0{,}09} = 19'$ (построения даны на рис. 7). **5.44.** а) Линза формирует дифракционную картину в фокальной плоскости. Для максимумов

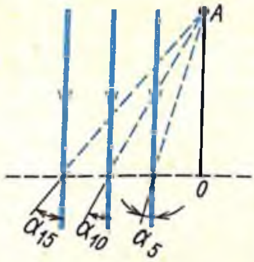


Рис. 7

первого порядка выполняется условие $\sin\alpha_1 = \lambda/c$, откуда $c = \lambda\sin\alpha_1$. Приближенно можно считать (см. рис. 5.14): $\sin\alpha_1 = m/(2l)$. Отсюда $c = 2\lambda l/m = 4{,}95$ мкм; б) $n = 1/c = 2020$ см$^{-1}$; в) $k = 9+9+1 = 19$; г) 65°24′. **5.45.** $\alpha_2 = 54°40'$. **5.46.** 23°6′. **5.47.** 0,87 м. **5.48.** 0,48 мкм. **5.49.** 8. **5.50.** Не могут. **5.51.** Так как $k_2\lambda_x = k_3\lambda$, то $\lambda_x = k_3\lambda/k_2 = 0{,}6$ мкм. **5.52.** $\lambda = 5{,}02\cdot 10^{-5}$ см. **5.53.** Из формулы (5.14) следует:

$$\sin\alpha = \sin\beta \pm k\lambda/c = \sin 20° \pm \frac{2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}};$$

$$\alpha_1 = 57°21'; \ \alpha_2 = -9°5'.$$

5.54. $D = 4{,}16\cdot 10^5$ рад/м. У к а з а н и е: используем формулу (5.12); угол α находим из (5.9). **5.55.** В (5.14) следует подставить значение $\alpha_1 = 90°$ и $\alpha_2 = -90°$. Так как k — целое число, то получаем для максимумов, расположенных по разные стороны от центрального: $k_1 = 2$ и $k_2 = 5$. Всего имеем $k = 5+2+1 = 8$ главных максимумов. **5.56.** Можно. **5.57.** $c = 5{,}15$ мкм; $l = 2{,}57$ мм. **5.58.** Как видно из (5.13), наибольшая разрешающая способность дифракционной решетки будет при максимальном значении k. При условии $\sin\alpha = 1$ из (5.9) следует $k_{max} \leqslant \frac{c}{\lambda} = 5{,}088$, т. е. $k_{max} = 5$ и $R = kN = 5\cdot 1\,000 = 5\,000$. **5.59.** 1,65 мм. **5.60.** 0,279 нм. **5.61.** $\theta = 41°49'$. **5.62.** а) 0,3 мкм; б) 0,19 мкм. **5.63.** а) 213 нм; б) 295 нм. **5.64.** Приблизительно в 2 раза. **5.65.** Апертурный угол u равен отношению диаметра зрачка к расстоянию до предмета (расстояние наилучшего зрения): $u = d/L$; $\sin(u/2) \approx d/(2L)$. Среда между предметом и глазом — воздух ($n = 1$). Имеем $z = \frac{0{,}5\lambda}{n\sin(u/2)} = \frac{0{,}5\lambda\cdot 2L}{d} = \frac{\lambda L}{d} = \frac{0{,}555\cdot 250}{2} \approx 70$ мкм (здесь L — расстояние наилучшего зрения). **5.66.** Дифракция играет бо́льшую роль при меньшем диаметре зрачка, что имеет место в случае меньшей яркости света (адаптация). В сумерках зрачок максимально увеличен и нерезкость изображения объясняется не дифракцией. Это явление обусловлено увеличением сферической абберации при расширении зрачка. **5.67.** 1) приблизительно в 2 раза ($I = 0{,}457I_0$); 2) приблизительно в 9 раз ($I = 0{,}11I_0$). **5.68.** $\alpha = 45°$. **5.69.** Увеличится в 3 раза. **5.70.** Приблизительно в 3 раза. **5.71.** $E_2 = 500$ лк. **5.72.** Уменьшится в 8 раз. **5.73.** В 128 раз. **5.74.** 1,4. **5.75.** 90°. **5.76.** 37°. **5.77.** 49°6′; $2{,}6\cdot 10^8$ м/с. **5.78.** 48°30′. **5.79.** $3{,}92\cdot 10^{-7}$ м; $4{,}36\times 10^{-7}$ м. **5.80.** 0,034 мм. **5.81.** 0,0167 мм. **5.82.** 1,6 мм. **5.83.** 30 град/мм. **5.84.** 8,6 мм. **5.85.** 6,67 град·см^2/г. **5.86.** 6°40′. **5.87.** 0,22 г/см^3. **5.88.** 2%. **5.89.** 0,44 г/см^3, 1,32 г/см^3. **5.90.** 24 кВт/(м^2·нм). **5.91.** 306 К. **5.92.** 352 К. **5.93.** $E = \sigma T^4 S\Delta t \approx 17{,}2$ кДж. **5.94.** 969 К. **5.95.** Увеличится в 1,06 раза. **5.96.** 465 Вт/м^2. **5.98.** Первая полость излучает мощность $P_1 = (\pi D/4)\sigma T_1^4$, где T_1 — термодинамическая температура этой полости. Во вторую полость через отверстие попадает лишь часть этой мощности, равная $P_2 = P_1 D^2/(8l^2)$. При установившейся температуре T_2 вторая полость будет излучать такую же мощность, которая согласно закону Стефана — Больцмана равна $P_2 = \frac{\pi D^2}{4}\sigma T_2^4$. Из полученных уравнений имеем $T_2 = T_1\sqrt{D^2/(8l^2)} \approx 188$К. **5.99.** $a\cdot = (r/l)^2\sigma T^4 \approx 1\,377$ Вт/м^2. **5.100.** $\frac{dE}{dt} = \pi r^2\sigma T^4 \approx 9{,}74\cdot 10^{25}$ Дж/с; $\frac{dm}{dt} \approx 1{,}08\times 10^5$ кг/с. **5.101.** а) $P = S\alpha_1\sigma(T_1^4 - T_0^4) \approx 77$ Дж/с; б) $P = S\alpha_2\sigma(T_2^4 - T_0^4) \approx 10{,}3$ Дж/с. **5.103.** 0,4%. У к азание: воспользоваться соотношением, полученным в задаче 5.102. **5.104.** $T_2/T_1 \approx 1{,}0017$; $R_2/R_1 \approx 1{,}0066$. **5.105.** а) 9,5 мкм; б) 1,4 мкм; в) 0,5 мкм; г) 0,29 нм. **5.106.** Увеличится в 81 раз. **5.108.** На 0,032 мкм в сторону более коротких волн. **5.110.** а) $3{,}2\cdot10^{-36}$ кг; $2{,}8\cdot10^{-19}$ Дж; $9{,}5\times\times10^{-28}$ кг·м/с; б) $5{,}5\cdot10^{-36}$ кг; $5\cdot10^{-19}$ Дж; $16{,}6\cdot10^{-28}$ кг·м/с; в) $4{,}4\cdot10^{-32}$ кг; $4\cdot10^{-15}$ Дж, $13{,}3\times\times10^{-24}$ кг·м/с. **5.111.** $2{,}77\cdot10^{18}$. **5.112.** 4 фотона. **5.113.** $7{,}4\cdot10^{-11}$ м. **5.114.** 0,51 МэВ. **5.115.** 0,44 мкм. **5.116.** $1{,}5\cdot10^3$ м/с. **5.117.**

$$N = \frac{\varepsilon_\lambda \Delta\lambda}{h\lambda_{max}/c} = \frac{2\pi c T^4 \Delta\lambda}{b^4} \frac{1}{e^{hc/(k\lambda)} - 1} \approx$$

$\approx 1{,}48\cdot10^{23}$ фотонов/(с·м^2).

5.118. $T = \dfrac{2}{3}\dfrac{hc}{\lambda k} = 1{,}4\cdot10^4$ К. **5.120.** 330 нм; $9{,}4\cdot10^5$ м/с. **5.121.** Пригоден. **5.122.** 1,53 эВ. **5.123.** Нет. **5.124.** $4{,}6\times\times10^{-19}$ Дж. **5.125.** $3{,}2\cdot10^{-19}$ Дж. **5.126.** 517 нм. **5.127.** $2{,}2\cdot10^{15}$ с$^{-1}$; $6{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

6.1. $7{,}3\cdot10^{-10}$ м. **6.2.** $7{,}27\cdot10^{-6}$ м и $6{,}63\cdot10^{-33}$ м. **6.3.** $\lambda = h/\sqrt{3kTm_n} \approx \approx 1{,}47\cdot10^{-10}$ м. **6.4.** $\lambda = h\sqrt{2eUm_e} \approx \approx 8{,}86$ пм. **6.5.** а) 0,194 нм; б) находим скорость электрона с учетом релятивистского изменения массы со скоростью:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = eU,$$

откуда $v = c\sqrt{1 - \dfrac{m_0^2c^4}{(eU + m_0c^2)^2}} =$

$= 1{,}64\cdot10^8$ м/с;

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$= m_0cv/\sqrt{c^2 - v^2} = 1{,}79\cdot10^{-22}$ кг·м/с;

$$z = 0{,}5\frac{h}{p\sin(u/2)} = 0{,}185 \text{ нм}.$$

6.6. $\Delta p_x \geqslant h/(2\pi\Delta x) \approx 1{,}05\cdot10^{-20}$ кг$\times\times$м/с. **6.7.** $\Delta x > h/(2\pi m\Delta v) \approx 1{,}15\times\times10^{-5}$ м. **6.8.** $\Delta E = h/(2\pi\Delta t) \approx \approx 6{,}55\cdot10^{-8}$ эВ. **6.9.** $\approx 13{,}1\cdot10^{-16}$ эВ. **6.11.** $E = -2\pi^2me^4/(h^2n^2)$; отсюда имеем 13,4 эВ; 3,4 эВ; 3,4 эВ; $L_l = \dfrac{h}{2\pi}\sqrt{l(l+1)}$; отсюда получим 0, 0, $1{,}5\cdot10^{-34}$ м^2·кг/с. **6.12.** $L_{lz} = hm_l/(2\pi)$; отсюда имеем $0{,}1 \pm 1{,}05\cdot10^{-34}$ м^2·кг/с, $\pm2{,}11\cdot10^{-34}$ м^2·кг/с. **6.13.** $L_{sz} = = hm_s/(2\pi)$; $\pm0{,}53\cdot10^{-34}$ м^2·кг/с. **6.14.** $3{,}3\cdot10^{15}$ Гц; $2{,}5\cdot10^{15}$ Гц; 90 нм; 120 нм. **6.15.** $0{,}82\cdot10^{15}$ Гц; $0{,}46\cdot10^{15}$ Гц; 366 нм; 652 нм. **6.16.** $6{,}0\cdot10^8$ и $3{,}3\times\times10^8$ фотонов в секунду. **6.17.** 0,76 фм; 22,6 фм. **6.18.** $9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж; $1{,}4\times\times10^{10}$ Гц; 2,1 см. **6.19.** 0,36 Тл. **6.20.** $\chi = 0{,}1$ см$^{-1}$; $\chi' = 0{,}043$ см$^{-1}$; $l_{1/2} = 6{,}9$ см. **6.21.** Для света с длиной волны λ_1 имеем: $I_0/4 = I_0 10^{-\chi'_1 l}$, откуда $l = \lg 4/0{,}02 = 30{,}1$ см; для другой длины волны: $I_0/3 = I_0\cdot10^{-\chi'_2 l}$, откуда $\chi'_2 = \lg 3/30{,}1 = 0{,}016$ см$^{-1}$. **6.22.** $I_l = = 0{,}9I_0e^{-\chi l}$; $I_l = 0{,}5I_0$, отсюда

$$\chi = \frac{1}{l}\ln 0{,}9\frac{I_0}{I_l} = \frac{1}{4{,}2}\ln 1{,}8 =$$

$= 0{,}14$ см$^{-1}$.

6.23. $I_1 = I_0\cdot10^{-\chi'_1 c_1 l_1}$, $I_0/I_1 = 2 = = 10^{\chi'_1 c_1 l_1}$;

$$I_2 = I_0\cdot10^{-\chi'_1 c_2 l_2}, \quad I_0/I_2 = n = 10^{\chi'_1 c_2 l_2}.$$

Учитывая, что $c_2l_2 = 3c_1l_1$, находим $n = 10^{\chi'_1\cdot 3c_1 l_1} = 2^3 = 8$. **6.24.** 1%. **6.25.** 0,52. **6.26.** 0,83. **6.27.** 0,67; 0,18. **6.28.** $I_0\cdot10^{-\mu' l}$, откуда $\mu' = 0{,}04$ см$^{-1}$. Но $\mu' = \chi' + k'$; $k' = (0{,}04 - -0{,}025)$ см$^{-1} = 0{,}015$ см$^{-1}$. **6.29.** 13,1 см. **6.30.** 0,46 М. **6.31.** 1500 л/(М·м). **6.32.** 0,037 см. **6.33.** 0,84. **6.34.** 1,45. **6.35.** Механизм тушения флуоресценции триплетный. **6.36.** В 1000 раз. **6.37.** 10^{-3} М. **6.38.** 9,9.

7.1. $\lambda_{min} = hc/(eU)$; $6\cdot10^{-10}$ м и $0{,}6\times\times10^{-10}$ м; $5\cdot10^{17}$ Гц и $5\cdot10^{18}$ Гц; в $1{,}27\cdot10^{12}$ и $1{,}27\cdot10^{13}$ раза. **7.3.** $h\nu_{max} = = eU$; $h\nu = \dfrac{2}{3}h\nu_{max} = \dfrac{2}{3}eU$;

$$N = \frac{\Phi}{h\nu} = \frac{3}{2}\frac{kIUz}{l} \approx 6{,}9\cdot10^{12}$$ фотон/с. **7.4.** В 68 раз. **7.5.** Массовый коэффициент ослабления больше в 354 раз у сульфата бария. **7.6.** $1{,}8\times\times10^3$ МэВ/нуклон. **7.7.** 2,2 мЭВ; 8,5 МэВ; 1,1 МэВ/нуклон; 2,8 мЭВ/нуклон.

7.8. $^{10}_{5}B + ^{4}_{2}He \to ^{13}_{7}N + ^{1}_{0}n$;

$^{13}_{7}N \to ^{12}_{2}C + ^{0}_{1}e + ^{0}_{0}\nu_e$.

7.9. $N_x = N_0 - N =$

$= N_0 - N_0 e^{-\ln 2 \cdot t/T} \approx 0{,}736 \cdot 10^{22}$.

7.10. $^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}He \to ^{30}_{15}P + ^{1}_{0}n$;

$^{30}_{15}P \to ^{30}_{15}Si + ^{0}_{1}e + ^{0}_{0}\nu_e$.

7.11. $^{198}_{80}Hg + ^{1}_{0}n \to ^{199}_{80}Hg \to ^{198}_{79}Au + ^{1}_{1}H$.

Так как нейтроны редко попадают в ядра ртути, затраты энергии в этом процессе очень велики. Таким образом, процесс получения золота бомбардировкой ртути нейтронами экономически невыгоден. **7.12.** Энергия α-частиц недостаточна, чтобы преодолеть силу отталкивания ядра тяжелого элемента и проникнуть в него **7.13.** $N_0 = N_A/A$; $dN = -\lambda N_0 dt \approx 0{,}4 \cdot 10^{12}$. **7.14.** Так как период полураспада значительно больше трех месяцев, то можно приближенно считать, что каждый месяц распадается одно и то же количество ядер: $dN = -\lambda N_0 dt \approx 0{,}065 \cdot 10^{23}$. **7.15.** а) обозначим искомую вероятность P, тогда $1 - P$ есть вероятность того, что ядро не распадается к моменту t. Вероятность распада ядра за время от t до $t + dt$ будет, по теореме умножения вероятностей, равна

$$dp = (1 - P)\frac{dN}{N}, \qquad (1)$$

ибо $\frac{dN}{N}$ доля распадающихся за время dt радиоактивных ядер равна вероятности распада отдельного такого же ядра за это же время. Так как $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$, то из (1) получаем $dP = (1 - P)\lambda dt$ (вероятность положительна), поэтому подставляем модуль $\frac{dN}{N}$. Интегрируя последнее равенство, получаем искомую вероятность: $P = 1 - e^{-\lambda t}$. Вероятность распада ядер за время от t до ∞ равна $1 - P = e^{-\lambda t}$. Ядро, которое распалось за время от t до $t + dt$ с учетом малости dt, «прожило» время t. Таких ядер dN, их общее время жизни: $t dN = -tN\lambda dt$. Подставляя сюда $N = N_0 e^{-\lambda t}$, имеем

$$t dN = -tN_0 e^{-\lambda t}\lambda dt. \qquad (2)$$

Искомое τ получим, проинтегрировав абсолютное значение (2) и разделив на N_0:

$$\tau = \frac{\lambda N_0 \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda}.$$

7.16. 16,6 Бк. **7.17.**

$$-\frac{dN}{dt \cdot m} = \lambda \frac{N_A}{A} = \frac{\ln 2 N_A}{TA} \approx$$

$\approx 12 \cdot 10^6$ Бк/кг.

7.18. $-\frac{dN}{dt \cdot m} = 4{,}2 \cdot 10^{16}$ Бк/кг.

7.19. $t = \frac{\ln(4/3)}{\lambda} = \frac{\ln(4/3)}{\ln 2} \approx$

≈ 2312 лет. **7.20.** 0,017 Гр; $7{,}7 \times 10^{-7}$ Гр/с; 1,7 рад; $7{,}7 \cdot 10^{-5}$ рад/с. **7.21.** 8 рад; $160 \cdot 10^{-2}$ Дж/кг. **7.22.** ≈ 36 м. **7.23.** $69{,}66 \cdot 10^{-8}$ Кл/(кг·с).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава первая **Математика. Элементы программирования** 4

Предел 4
Производная. Применение производных для исследования функций . . . 7
Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях 12
Неопределенный интеграл 15
Определенный интеграл 18
Дифференциальные уравнения 21
Теория вероятностей. Математическая статистика 23
Алгоритмизация и программирование 33

Глава вторая **Механика. Акустика** 44

Вращательное движение. Законы биомеханики 44
Механические колебания и волны. Звук 51
Течение жидкости. Биореология 62

Глава третья **Термодинамика. Физические процессы в биологических мембранах** 68

Термодинамика 68
Физические процессы в биологических мембранах 72

Глава четвертая **Электродинамика. Электроника** . . . 76

Электрическое поле 76
Магнитное поле. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях 82

Глава пятая **Оптика** 91

Интерференция 91
Дифракционные явления 98
Поляризация света 102
Тепловое излучение тел. Фотоны 106

Глава шестая **Физика атомов и молекул. Элементы квантовой биофизики** 111

Волновые свойства частиц. Энергетические уровни атомов и молекул . . . 111
Взаимодействие света с веществом. Люминесценция 114

Глава седьмая **Ионизирующее излучение. Основы дозиметрии** 119

Рентгеновское излучение 119
Ядро. Радиоактивность 120
Основы дозиметрии 121

Приложения 123

Ответы и решения 140

Гаджар.
157 гр. 6Б.

Х. Сидор
117 гр 1 курс (Д)
6-поток

Учебное издание

Александр Николаевич Ремизов
Нина Харитоновна Исакова
Александра Генриховна Максина

Сборник задач по медицинской и биологической физике

Зав. редакцией **Е. С. Гридасова**
Редактор **Г. Н. Чернышева**
Мл. редакторы **Г. В. Вятоха, Н. П. Майкова**
Художественный редактор **В. И. Пономаренко**
Иллюстрации художника **Р. Р. Витковского**
Технический редактор **Л. А. Муравьева**
Корректор **Г. И. Кострикова**

ИБ № 6165

Изд. № ФМ-878. Сдано в набор 24.11.86. Подп. в печать 06.07.87. Формат $60 \times 90/_{16}$. Бум. офс. № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 10 усл. печ. л. 20,25 усл. кр.-отт. 8,65 уч.-изд. л. Тираж 45 000 экз. Зак. № 1680. Цена 30 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

30 к.