A.M.Voxidov, M.R.Malikov, S.B.Abdullayeva, D.A.Voxidov

AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
SOG‘LIQNI SAQLASH VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT TIBBIYOT
UNIVERSITETI

A.M. VOXIDOV, M.R.MALIKOV,
S.B.ABDULLAYEVA, D.A.VOXIDOV

AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

(farmatsiya yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalarga mo‘ljallangan)

I - QISM

(o'quv qo'llanma)

O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2022-yil 19-iyuldagi 233-sonli buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan (Ro‘yxatga olish raqami 233-1193).

“Samarqand davlat chet tillar instituti” nashriyoti, 2022

UO‘K 372.862.378.14
KBK 74.202.22.16
V 74
A 11

"Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish" (farmatsiya yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalarga mo‘ljallangan). I – qism. O‘quv qo‘llanma - Samarqand: "SamDCHTI" nashriyoti, 2022. 136 bet.

Ushbu o'quv qo'llanma tibbiyot oily o'quv yurtlari uchun 2019 yilda O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi hamda O'zbekiston Respublikasi Oily va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan dastur asosida yozilgan. Qo'llanma "Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish" ning zamonoviy yutuqlari bilan boyitilgan.

Oquv qo'llanma "Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish" fanining o'qitish jarayonida talabalar zamonaviy axborot texnologiyalari asosida jarayonlarni matematik modellashtirishga doir bilimlarni o'zlashtirgan holda o'z mutaxassisligi bo'yicha yechiladigan masalalarga ularni tadbiq qilish ko'nikmasini hosil qiladi.

"Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish" fani talabalarni zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va matematik modellashtirishni farmatsevtika sohasida qo'llash tamoyillari haqida tasavvur hosil qiladi va farmatsevtika sohasini axborotlashtirish va matematik modellashtirish jarayonlari bilan tanishtiradi. Farmatsevtika sohasida qo'llaniladigan amaliy dasturlar paketlari bilan tanishadi. Sohaga oid turli hisoblash amallarini bajarilishini kompyuter dasturlari yordamida o'rganadi.

Qo'llanmaning har bir paragrafida, avvalo mavzuning nazariy qismidan qisqacha axborot berilgan, so'ngra mavzuga mos tipik misol va masalalar batafsil yechib ko'rsatilgan, hamda mustaqil ishlash uchun yetarli miqdorda misol va masalalar berilgan.

O'quv qo'llanma bakalavriatning farmatsiya yo'nalishida tahsil olayotgan "Axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish" dastur asosida o'qitiladigan talabalar hamda o'qituvchilar uchun mo'ljallangan.

Tuzuvchilar: **A.M.Voxidov, M.R.Malikov, S.B.Abdullayeva, D.A.Voxidov.**

Taqrizchilar: **R.Indiaminov.** - Toshkent axborot texnologiyalari universitetining Samarqand filiali «Tabiiy fanlar» kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori

N.O.Sodikov - Samarkand davlat tibbiyot universiteti «Fizika, biofizika va tibbiy fizika» kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

SO‘Z BOSHI

Fanni o‘qitishdan maqsad-talabalami farmatsiya mataxassisligi bo‘yicha o‘quv reja asosida bo‘lajak provizorlar va dori ishlab chiqarish korxonalar mutaxassislari uchun tibbiy biologik bilimini sifatini yaxshilashga qaratilgan.

Axborot texnologiyalari va texnologik jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish fani - dori vositalarini ishlab chiqarish jarayonlarni uchun ratsional texnologik jarayonlarni modellashtirish bilan bog'liq amaliy fandir. **Fanni o‘qitishning maqsadi** - talabalarga farmatsevtika sohasida axborot kommunikatsiya texnologiyalarini qo‘llashda va joriy etishda bilimlar berish bilan bir qatorda ularda tizimli yondashuvni shakllantirishdan, farmasevtik ishlab chiqarish sanoatidagi, xususan dori vositalarini ishlab chiqarish korxonalaridagi texnologik jarayonlarni tizimli tahlil qilish, texnologik jarayonlar haqidagi axborotni shakllantirish, jarayonni modellashtirish jaryonlari va usullarini orgatish, kompyuter texnologiyasidan foydalanib jarayonning optimallashtirish masalalarini yechish, ishlab chiqarishda mahsulot sifatini ta'minlash maqsadida yuqori malakali texnolog- muhandislarini tayyorlashdan iboratdir.

Mualliflar mazkur qo‘llanmani yozishda o‘z oldilariga talabalarda ko‘rsatilgan bo‘limlarga oid nazariy, misol va masalalarni samarali yo‘l bilan yechish ko‘nikmalari hosil qilishni maqsad qilib qo‘yishdi va qo‘llanma talabalar uchun doimiy maslahatchi bo‘lib qolishiga ishonadilar.

O‘quv qo‘llanmada asosiy nazariy ma’ruza mashg'ulotlari texnologik tizimlar va ulami modellashtirish usullari, modellashtirishda dasturiy-apparat vositalari, matematik modellashtirish jarayonida aniqlanadigan, matritsa, matritsalar ustida amallar,.matematik modellashtirish jarayonida aniqlanadigan tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli, matematik modellashtirish jarayonida aniqlanadigan boshlang‘ich shartli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish usullari, chegaraviy shartli oddiy differensial tenglamalarni yechish uchun oddiy progonka va differensial progonka usullari, chegaraviy shartli oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun chekli ayirmalar usuli, matematik modellashtirishdagi integrallashninig sonli usullai, matematik model inerpolyasiyasi va approksimatsiyasi, texnologik jarayonlar matematik modelini aniqlash tajribastatistik usuli, statistik gipotezalarni tekshirish, dispersion taxiil, regressiya tengiamalarini tanlash va baholovchi koeffisientlarini aniqlash keltirilgan.

O'z navbatida har bir ma'ruza tegishli paragraflarga bo'lingan bo'lib, har bir paragraf mavzuga talluqli asosiy tasdiqlar va misollarni o'z ichiga oladi, shuningdek, ularning har biri an'anaviy misollarni batafsil tahlil yordamida yechish orqali namoyish qilingan.

Hozirgi vaqtda amaliyotda bir necha yaxshi rivojlangan matematik dasturlar (Mathcad, Maple, Mathematica, Mathlab va h.k.) matematik masalalarni kompyuter imkoniyatlaridan foydalanib yechishda samarali natijalar bermoqda. Shu an'anadan chetda qolmaslik uchun, qo'llanmada ba'zi bo'limlar bo'yicha misol va masalalar yechishda «Mathcad» tizimining qo'llanilishi va uning qulayliklari namoyish etilgan.

O'ylaymizki, qo'llanma o'z o'quvchilarini topadi va boshqa mavjud o'quv adabiyotlari qatorida axborot texnologiyalari va jarayonlarni matematik modellashtirish fanining aytib o'tilgan bo'limlari bo'yicha ularga bilimlarini oshirishga ko'mak beradi.

O'quv qo'llanmadan tibbiyot institutida farmatsevtika yo'nalishida tahsil olayotgan talabalari, dorixona amaliyoti xodimlari, shuningdek, dori vositalari va boshqa farmatsevtik tovarlar ishlab chiqaruvchi korxonalar, firmalar mutaxassislari, malaka oshirish kurslarida tahsil olayotgan tinglovchilar ham foydalanishlari mumkin.

O'quv qo'llanma haqidagi fikr mulohazalar, undagi mavjud kamchiliklar bo'yicha takliflarni mamnuniyat bilan qabul qilamiz

1-§. Texnologik tizimlar va ularni modellashtirish usullari. Modellashtirishda dasturiy-apparat vositalari

1.1. Fanni o‘qitishdan maqsad va uning vazifalari

Fanni o‘qitishdan maqsad-talabalami farmatsiya mataxassisligi bo‘yicha o‘quv reja asosida bo‘lajak provizorlar va dori ishlab chiqarish korxonalar mutaxassislari uchun tibbiy biologik bilimini sifatini yaxshilashga qaratilgan.

Axborot texnologiyalari va texnologik jarayonlami modellashtirish va optimallashtirish fani - dori vositalarini ishlab chiqarish jarayonlari uchun ratsional texnologik jarayonlarni modellashtirish bilan bog'liq amaliy fandir. Fanni o‘qitishning maqsadi - talabalarga farmatsevtika sohasida axborot kommunikatsiya texnologiyalarini qo‘llashda va joriy etishda bilimlar berish bilan bir qatorda ularda tizimli yondashuvni shakllantirishdan, farmasevtik ishlab chiqarish sanoatidagi, xususan dori vositalarini ishlab chiqarish korxonalaridagi texnologik jarayonlami tizimli tahlil qilish, texnologik jarayonlar haqidagi axborotni shakllantirish, jarayonni modellashtirish printsiplari va usullarini orgatish, kompyuter texnologiyasidan foydalanib jarayonning optimallashtirish masalalarini yechish, ishlab chiqarishda mahsulot sifatini ta'minlash maqsadida yuqori malakali texnolog-muhandislarining tayyorlashdan iboratdir. Dastur 1 va 2 semestrlarga mo‘ljallangan.

Fanning vazifasi:

-talabalarni zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini va matematik dasturiy ta’minot paketlarini farmatsevtika sohasida qo‘llash;

-dori vositalarini ishlab chiqarishdagi kimyoviy texnologiya jarayonlari va qurilmalarini modellashtirish bilimlarini o'zlashtirish, jarayon matematik modellarni qurish va optimallashtirish;

-zamonaviy matematik dasturiy ta’minot paketlarini modellashtirishda qo'llash;

-dori vositalarini ishlab chiqarishdagi kimyoviy-texnologik jarayonlami modellashtirish uchun tajribani tashkil etish va o'tkazish, zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalangan holda ma'lumotlami tahlil qilish va qayta ishlash bo'yicha ko'nikmalarini shakllantirish.

Talaba:

-microsoft office dasturlar paketi va uning tarkibi;

-farmatsevtika sohasida axborot texnologiyalari va tarmoq texnologiyalari;

-zamonaviy matematik dasturiy ta'minot paketlari;

-farmatsevtiк jarayonlarni matematik modellashtirish;

-farmatsevtika sohasida axborot havfsizligini ta'minlash;

-matematik tahlilning asosiy tushunchalari va usullari;

-axborot texnologiyalari texnik va dasturiy ta'minoti, mahalliy va global tarmoqlarda ishlash asoslari;

-matematik muammolami hal qilishning odatdagi sonli usullari va ularni amalga oshirish uchun algoritmlari;

-kimyoviy-texnologik jarayonlarning empirik (statistik) va fizika-kimyoviy (nazariy) modellarini qurish;

-eksperimental ma'lumotlarga asoslangan texnologik jarayonlarning matematik tavsiflarini aniqlash;

-empirik modellar yordamida kimyoviy-texnologik jarayonlarni optimal- lashtirish usullari;

-matematik modellarni shakllantirish tamoyillari va matematik modellami hisoblash uchun matematik usullarning metodik mohiyati haqida;

-matematik modellarni kompyuterda hisoblash dasturlarini qo'llash;

-suyuq jism oqimlari xarakati, issiqlik va massa almashish nazariyasi asoslari;

-kimyoviy termodinamikaning asosiy tenglamalarini;

-kimyoviy-texnologik jarayonlami fizik modellashtirish tamoyillari haqida tasavvurga ega bo'lishi;

-jarayonning matematik modelini aniqlashda ehtimollik nazariyasi va matematik statistika usullarini qo'llashni;

-jarayonlami hisoblash, loyihalashtirish, simulyatsiya qilish, identifi katsiyalash va optimallashtirishning muayyan muammolarini hal qilish uchun hisoblash matematikasi va matematik statistika usullarini qo'llashni;

-differensial tenglamalar va tenglamalar sistemalarini yechishni;

-jarayonning matematik modelini aniqlashda hisoblash matematikasining sonli **3D MAX** dasturi elementlari va uning imkoniyatlari.

1.2. Kimyo-farmatsevtik texnologiya tizimlari

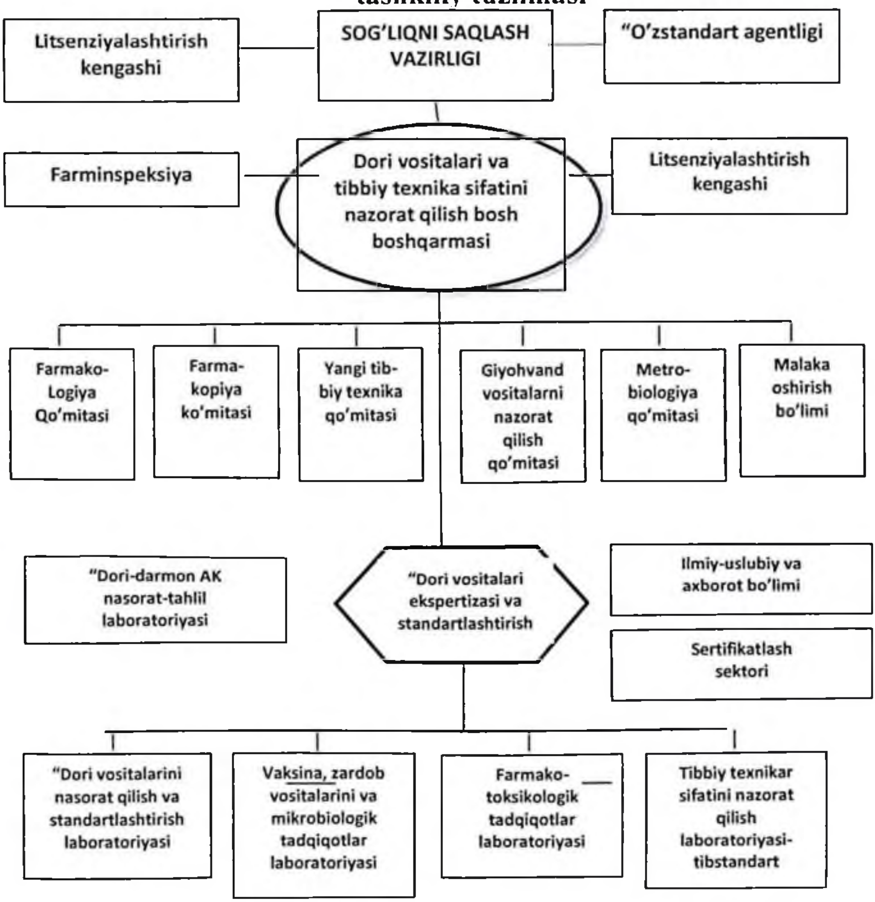
O'zbekiston Respublikasi farmatsevtika xizmatining nazorat ruxsatnoma tizimi - dori vositalari, tibbiyot buyumlari, tibbiy texnika, tibbiy-profilaktik va tibbiy-kosmetik vositalarning sifatini ta'minlash bo'yicha chora - tadbirlar majmuyini belgilovchi tashkiliy tuzilmadir.

Nazorat-ruxsatnoma tizimining asosiy vazifasi - dori vositalarini tibbiyot amaliyotida ishlatish uchun ruxsat berish va tadbiq etish bosqichida to'laqonli o'rganilishini ta'minlash, korxonalar tomonidan sifatsiz tovarning ishlab chiqarilishi yoki mamlakatga xorijdan olib kelinishi, saqlanish va sotish (tarqatish) sharoitining buzilishi bilan bog'liq noxush oqibatlardan iste'molchilarni himoya qilishdir.

Dori vositalarini yaratish, ishlab chiqarish va sotish jarayonlarida ularning sifatini ta'minlashga bo'lgan talablarni doimiy ravishda o'sib borishining asosiy sababi ushbu vositalarning sifati ularning xavfsizligi va samaradorligi bilan uzviy ravishda bog'liqligi bilan belgilanadi.

Shu bilan birga, dori vositalari sifatining ta'minlanishi har bir bemor va butun bir jamiyatning xavfsizligi ta'minlanishining kafolatidir.

O'zbekiston Respublikasining dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish davlat tizimining tashkiliy tuzilmasi



O‘zbekiston Respublikasi farmatsevtika xizmati nazorat - ruxsatnoma tizimining shakllanish bosqichlari

1992-yil 6-mart	O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining «Sog‘liqni saqlash vazirligining farmakologiya va farmakopeya qo‘mitalarini tashkil etish to‘g‘risida»gi farmoyishi.
1995-yil 25-may	O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining «Sog‘liqni saqlash vazirligi qoshida Dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish bosh boshqarmasini tashkil etish to‘g‘risida»gi 181-qarori
1995-yil 25-may	Farmakopeya qo‘mitasi «Ozfarmsanoat» tasarrufidan chiqarilib, bosh boshqarma tarkibiga kiritilishi
1996-yil 13-fevral	Bosh boshqarma qoshida tibbiy mahsulotlarni sertifikatlashtirish idorasini tashkil etish
1997-yil 25-aprel	O‘zbekiston Respublikasining «Dori vositalari va farmatsevtika faoliyati to‘g‘risida»gi qonuni

Nazorat-ruxsatnoma tizimining tashkil etilishi va rivojlanishini shartli ravishda III bosqichga bo‘lish mumkin. Birinchi bosqichda (1992—1995) davlat miqyosidagi dori vositalarining sifati va xavfsizligining nazorati O‘zbekiston Respublikasi Sog‘liqni saqlash vazirligi qoshidagi farmakologiya hamda farmakopeya qo‘mitalari zimmasiga yuklatilgan edi. Respublikamizda farmatsevtika sohasining rivojlanib borishi, xorijdan keltirilayotgan va mahalliy ishlab chiqarilayotgan dori vositalarining nomenklaturasining ko‘payishi, farmatsevtika tovarlari hamda tibbiyot buyumlari sifatini nazorat qilish, standartlashtirish va sertifikatlashtirish tizimida yagona davlat siyosatini ta’minlash zaruratini belgiladi.

Shu davrda mustaqil O‘zbekistonning farmatsevtika tizimida dori vositalari va tibbiy texnika sifatini reglamentlashtirish bo‘yicha quyidagi asosiy yo‘nalishlar belgilandi:

- O‘zbekiston Respublikasining milliy dori siyosatini shakllantirish va rivojlanishini ta’minlash;
- dori vositalari muomalasi tartibining me’yoriy-huquqiy asoslarini xalqaro amaliyot tajribasiga tayangan holda yangilash;

- samaradorlik va xavfsizlikni ta'minlash maqsadida dori vositalari, tibbiy texnika hamda tibbiy buyumlar sifatini nazorat qilish va ro'yxatdan o'tkazishning yagona davlat tizimini tashkil etish;
- farmatsevtik va tibbiy tovarlarni yaratish, ishlab chiqarish, litsenziyalash va sertifikatlash tizimini takomillashtirish;
- O'zbekiston Respublikasi farmatsevtika bozoriga nostandart, qalbaki va sifatsiz tovarlar kirib kelishining oldini olish. Shu maqsadda O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi qoshida dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish bosh boshqarmasi tashkil etildi (1995-yil).

Birinchi milliy «Dori vositalari va tibbiyot buyumlarining Davlat reyestri» (1995-yilda) tuzildi va chop etildi. «Dori vositalari va tibbiyot buyumlarining Davlat reyestri» O'zbekiston Respublikasining «Dori vositalari va farmatsevtika faoliyati to'g'risida»gi qonuniga asosan Sog'liqni saqlash vazirligi tomonidan har yili nashr etiladi va dori vositalarining muomalasi bilan shug'ullanuvchi barcha muassasa va tashkilotlar uchun rasmiy hujjat bo'lib hisoblanadi.

«Dori vositalari va tibbiyot buyumlarining Davlat reyestri»ga O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi Dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish bosh boshqarmasida rasmiy qayd etilgan chet el hamda mahalliy ishlab chiqaruvchi korxonalarning dori vositalari, tibbiy texnika va tibbiyot buyumlari, davolash-diagnostika vositalari hamda substansiyalarning to'liq ro'yxati kiritilgan. Reyestrda savdo nomi va ishlab chiqaruvchi firma nomining o'zgarishi va boshqa sabablar munosabati bilan qayta qayd etilgan dori vositalari hamda shu yillarda qayd etilganligi bekor qilingan dori vositalari va tibbiyot buyumlari ham aks ettiriladi.

Dori vositalarining nazorat-ruxsatnoma milliy xizmatining tashkil etilishi va rivojlanishida ikkinchi bosqich (1996-2000-yillar) alohida o'rin tutadi. Xorijiy davlatlarning dori vositalarini ro'yxatdan o'tkazish tartibi bo'yicha amaliy tajribalarini umumlashtirib, dori vositalariga qo'yiladigan mavjud talab va ekspertiza tizimlarini tahlil etib, mahalliy farmatsevtik ishlab chiqarishning o'ziga xos tomonlarini hisobga olib, O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi mamlakatimizda dori vositalarini ro'yxatdan o'tkazish (qayd etish) tizimini takomillashtirish uchun qator chora-tadbirlar ishlab chiqdi. Dori vositalari va tibbiy texnikani davlat ro'yxatidan o'tkazish - qayd etishning yangi qoidalari ishlab chiqildi va tasdiqlandi.

Qayd etish tartibida ro'y bergan asosiy o'zgarishlar O'zbekiston Respublikasining «Dori vositalari va farmatsevtika faoliyati to'g'risida»gi (1997-yil) (Qonunga o'zgartirish va qo'shimchalar 2015-yil 2-oktabrda kiritilgan) va «Giyohvandlik vositalari va psixotrop moddalar to'g'risida»gi (1999-yil) (Qonunga o'zgartirish va qo'shimchalar 2001-yil 21-iyulda kiritilgan) Qonunlariga muvofiq belgilandi. Qabul qilingan qonunlar yordamida dori, profilaktika va diagnostika vositalarining xavfsizligi, samaradorligi hamda sifatini ta'minlash uchun huquqiy asoslar belgilandi.

Milliy nazorat-ruxsatnoma tizimi rivojlanishining uchinchi bosqichi (2001-yildan boshlab), ekspertiza o'tkazish taktikasi, talab va muddatlari, klinik sinovlar tartibi o'zgargan paytda ro'y berdi, lekin uch tamoyil o'zgarmay qoldi:

- dori vositasi inson xavfsizligining barcha zamonaviy talablariga javob berishi lozim;
- dori vositasi kasallikni davolashda samarali bo'lishi lozim;
- davlat nazorati ostidagi yangi dori vositalarining me'yoriy texnik hujjatlari, tahlili, klinik sinovlari va ekspertizasi bo'yicha qabul qilingan hujjatlar tartibi xalqaro qoidalar hamda standartlar talabiga javob berishi lozim.

Shunday qilib, xalqaro farmatsevtik reglamentlashtirish talablariga muvofiq ravishda Respublikamizda dori vositalari va tibbiy buyumlar sifatini belgilovchi nazorat-ruxsatnoma tizimi faoliyatini takomillashtirish jarayoni uzluksiz ravishda olib borilmoqda.

Farmatsevtika tovarlari, davolash oziq-ovqatlari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish, standartlashtirish va sertifikatlashtirish sohasida yagona davlat siyosatini ta'minlash maqsadida O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 1995-yil 25-maydagi 181-qaroriga muvofiq, Sog'liqni saqlash vazirligi tomonidan dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish (DV va TTSNQ) bosh boshqarmasi tashkil etildi.

DV va TTSNQ bosh boshqarmasi O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligining tashkiliy tuzilmasi hisoblanib, o'zining faoliyatida Qonunlar, Prezident Farmonlari, hukumat qarorlari, Jahon Sog'liqni Saqlash Tashkilotining tavsiyanomalariga, vazirlik buyruq va yo'riqnomalariga amal qiladi.

Dori vositalari va tibbiy texnika sifatini nazorat qilish bosh boshqarmasining vazifalari:

- dori vositalari, tibbiyot buyumlari va tibbiy texnika sifatining davlat nazoratini tashkil etish va standartlashtirish;

- dori, profilaktika va diagnostika vositalarining ekspertizasini, klinikagacha va klinik sinovlarini hamda tibbiy texnika va tibbiyot buyumlarining klinik hamda texnik sinovlarini tashkil etish;
- dori, profilaktika va diagnostika vositalari hamda buyumlariga oid me'yoriy-texnik hujjatlar - farmakopeya maqolalari (FM), vaqtincha farmakopeya maqolalari (VFM), sertifikatsiyalar va boshqa hujjatlarni tasdiqlash hamda ekspertizasini tashkil etish;
- mahalliy va xorijiy dori, profilaktika, diagnostika vositalari, tibbiy texnika, tibbiyotda qo'llaniladigan buyumlarni sertifikatlashtirish va davlat ro'yxatidan o'tkazish;
- davlat farmakopeyasi, Davlat reyestri va boshqa me'yoriy hujjatlarni nashr etishga tayyorlash hamda chop etilishini tashkil etish;
- dori vositalarining muomalasi sohasida faoliyat yuritayotgan yuridik va jismoniy shaxslarga ilmiy-uslubiy xizmatlar ko'rsatish.

Bosh boshqarma oldida dori vositalari bozoridagi vaziyatning sistematik tahlili, yangi dori vositalari, tibbiyot jihozlari va buyumlarini ro'yxatdan o'tkazish, ma'lum vositalarni qayta ro'yxatdan o'tkazish va tadqiqotlar o'tkazish tizimini qayta ishlash vazifalari turadi.

DV va TTSNQ bosh boshqarmasi tarkibiga: Farmakologiya va Farmakopeya qo'mitalari, Dori vositalarini ekspertizasi va standartlashtirish Davlat markazi, Farmatsevtik nazorat bo'limi, Giyohvandlik vositalari nazorati va yangi tibbiy texnika bo'yicha hisoblanib, u malakali kadrlar tayyorlashning asosi bo'lib, ta'limning barcha turlarini Davlat ta'lim standartini, kadrlar tayyorlash tizimi tuzilmasi va uning faoliyat ko'rsatish muhitini o'z ichiga oladi. O'tgan yillar ichida bu qonunlar asosida davlat ta'lim standartlari asosida keng ko'lamda ishlar olib borildi, turli darajadagi ta'lim dasturining izchilligi asosi ta'minlandi va quyidagi ta'lim turlarini o'z ichiga oladi:

- maktabgacha ta'lim;
- umumiy o'rta ta'lim;
- o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi;
- maktabdan tashqari ta'lim.

Hozirgi kunda Respublikamizdagi dorixonalar tarmog'ini yuksak bilimli farmatsevt mutaxassislar bilan ta'minlashni yanada yuqori darajaga ko'tarish maqsadida yurtimizda tibbiyot kasb-hunar kolleji va texnikumlarida farmatsiya yo'nalishi bo'yicha kadrlarni tayyorlash yo'lga qo'yilgan.

Farmatsevtika fanining tez sur'atlar bilan rivojlanishi va bozor iqtisodiyotining O'zbekiston Respublikasi dorixona tizimiga tadbiq etilishi, rivojlangan mamlakatlar bilan iqtisodiy aloqalar o'rnatilishi o'quv yurtlarini bitirgan mutaxassislarni ish tajribalari 5 yildan ortiq bo'lganda, ularni malaka oshirish kurslarida o'qishlarini taqozo etadi.

Bunga ko'ra, oliy ma'lumotli farmatsevt mutaxassislari institutlar qoshida tashkil qilingan farmatsevtlar malakasini oshirish fakultetlarida, o'rta maxsus ma'lumotli farmatsevtlar esa farmatsevtlar malakasini oshirish kurslarida, yirik bazaga ega bo'lgan kollejlarda yoki «Dori-darmon» aksiyadorlik birlashmalarida malakalarini oshiradilar. Malaka oshirish kursini muvaffaqiyatli bitirgan tinglovchilarga sertifikat va guvohnoma beriladi. Dorixonalar tarmog'ida kasb mutaxassislarining malaka darajasini aniqlash va ularni egallagan lavozim talablariga (majburiyatlariga) javob berishlarini aniqlash uchun attestatsiya o'tkaziladi. Uni o'tkazishdan maqsad, mutaxassislarni o'z kasb va lavozim majburiyatlarini bajarishlarida shaxsiy javobgarliklarini oshirish, kadrlarni tanlash, ulardan foydalanish hamda mutaxassislarning malakasi o'sishini ta'minlashdan iboratdir.

Ma'lumki, dori vositalari bilan ta'minlash sohasida faoliyat ko'rsatayotgan hamma shaxslar uchun farmatsiya mutaxassisligi bo'yicha diplomi va sertifikati bo'lishi lozim. Sertifikat - Davlat ta'lim standarti talablariga javob beruvchi mutaxassisning tayyorligini tasdiqlovchi hujjatdir.

Sertifikat olish bo'yicha imtihon amaliy ko'nikmalar bahosi, suhbatlashish va testlarni o'z ichiga oladi. Sertifikatni har 5 yilda bir marta tasdiqlatib turish kerak. Toifa olish uchun sog'liqni saqlash tizimi mutaxassislari toifa olish tartibi to'g'risidagi nizomga muvofiq attestatsiyadan o'tkaziladi. Oliy va o'rta ma'lumotli farmatsevtlar toifa darajasi 3 kvalifikatsion toifa bo'yicha aniqlanadi va bu mutaxassis o'z sohasining ustaligini ko'rsatibgina qolmay, shuningdek, unga har oyda ish haqiga qo'shimcha haq to'lanishi huquqini ham beradi.

Toifalar quyidagi navbatchiligi bo'yicha beriladi: *ikkinchi, birinchi, oliy*. Masalan, ikkinchi kvalifikatsion toifa o'rta farmatsevt xodimiga attestatsiyadan o'tish mutaxassisligi bo'yicha kamida 3 yil, birinchi kvalifikatsion toifa 5 yil va oliy toifa 8 yillik ish tajribalariga ega bo'lganlarga beriladi.

Ayrim holatlarda mutaxassisning yuksak darajadagi nazariy va amaliy tayyorgarligini hisobga olib hamda tashkilot ma'muriyatining taalluqli tavsiyasiga ko'ra, mavjud talablarga amal qilmasdan toifa berilishi mumkin.

Dorixona xodimlarining kvalifikatsion toifa olishi uchun maxsus attestatsiya hay'ati tuziladi. O'rta ma'lumotli farmatsevt xodim kvalifikatsion toifa olish istagi bo‘lsa, attestatsiyadan o‘tishi, mutaxassisligi bo‘yicha malaka oshirish kurslarida tayyorgarlikni o‘tishi, so‘ng attestatsiya hay’atiga ariza, attestatsiya varaqasi va tashkilotning rahbari tasdiqlagan oxirgi yildagi ishi to‘g‘risidagi hisobotni taqdim etishi lozim.

Farmatsevtning kasbiy darajasi suhbatlashish yoki test vazifalari ko‘rinishida o‘tkaziladigan kvalifikatsion imtihon natijalariga qarab aniqlanadi. Birlamchi attestatsiya va yuqori toifa olish bo‘yicha o‘tkaziladigan attestatsiyaga mutaxassislarni attestatsiya hay’ati yig‘ilishiga taklif qilish bilan o‘tkaziladi. Ikkinchi va birinchi kvalifikatsion toifalarni qayta tasdiqlash ularning ishtirokisiz sirtdan o‘tkaziladi. Hay’atning qarori yuqori tashkilot tomonidan bir oy ichida buyruq bilan e’lon qilinadi.

1.3. Texnologik tizim tahlili. Texnologik tizimda sintez qilish

Tizimli tahlil - deb ataluvchi fan, fanlararo bog‘liqliqni tadqiq qilish zarurati bo‘lganligi tufayli paydo bo‘ldi. Murakkab texnik tizimlarni yaratish, yirik xo‘jalik komplekslarini loyxalash va ularni boshqarish, ekalogik xolatlarni tahlil qilish va boshqa muxandistlik, ilmiy va xo‘jalik faoliyatlari tadqiqotlar tashkillashtrishni talab qiladi, bu noan’aviy va fanlararo xususiyatga ega.

Tizimli tahlil elektron hisoblash mashinalari (EXM) asriga kelib paydo bo‘ldi uning rivojlanishi EXMlarning zamonaviy imkoniyatlari va kelgusi taraqqiyoti bilan aniqlanadi.

Tizimli tahlil – bu turli fizik tabiatga ega murakkab ma’lumotlarni qachonki tanlash imkoniyati paydo bo‘lgan xolda qaror qabul qilish muammolari bilan shug‘ullanuvchi fan.

Shuning uchun tizimli tahlil qaror qabul qilish muammolari bilan shug‘ullanuvchi – jarayonlar tahlil qilish va boshqarishning umumiy nazariyasi fanlariga tayanadi.

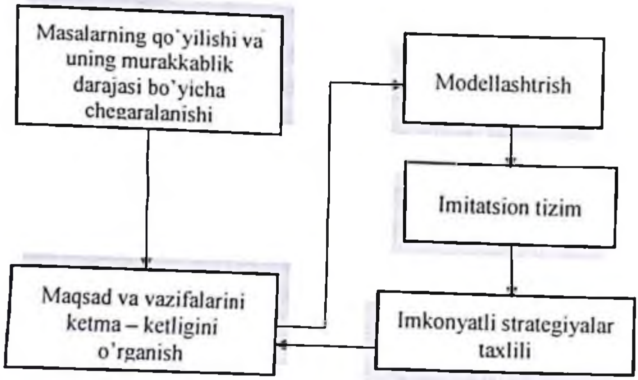
Jarayonlar tadqiqotini uchta asosiy bosqichga ajratish mumkin.

a) Modellar tuzish - matematik tilda ifodalash jarayonning maqsadini shakllantirish orqali optimallashtirish masalasi ham shakllantiriladi.

b) Hosil qilingan optimallash masalasini yechish. Murakkab tizimlarni o‘rganayotganda maqsad noaniq bo‘lish muammosi turganda turli talablarni moslashtirish qiyin kechadi.

Agar maqsadni aniq qo‘yish imkoni bo‘lmasa bu xolda tizimli tahlil yordamga keladi.

Tizimli tahlilning asosiy etaplarini quyidagi bosqichlarga ajratish mumkin. (1.1. -rasm).



1.1.-rasm. Tizimli tahlilning asosiy etaplari

***Masalaning qo'uyilishi* uning murakkablik darajasi bo'yicha chegaralanishi.** Murakkab tizimlarni tadqiq etilayotganda u yetarlicha sodda va aniq matematik tavsifga ega bo'lishi uchun masalani soddalashtirish talab etiladi. Butun jarayonning muvaffaqiyati yoki muvaffaqiyatsizligi masalani soddalashtirishlar va murakkablashtirishlarni moslashtirishga bog'liq. Hech bir soxta loyiha oxir-oqibatda amalga oshmay qolishga sabab, tanlangan qiyinlik darajasi keyingi modellashtirishni murakkablashtirish va yechimni olib bo'lmasligi.

Maqsad va vazifalarning ketma-ketligini o'rnatish.

Tizimli tahlilning navbatdagi bosqichida tadqiqotning maqsad va vazifalari o'rnatiladi. Odatda bu maqsad va vazifalar qandaydir ketma-ketlikni tashkil etadi. Bunda asosiy masala bir qancha ikkinchi darajali masalalarga ajratiladi. Tizimli tahlilda ilmiy ma'lumot olish nuqtaiy nazaridan muhim bo'lsada qaraliyotgan murakkab tizimni yechishga ta'siri kam bo'lgan maqsad va vazifalariga etibor qamrok qaratiladi. Tizimli tahlilni muvaffakiyatli qo'llash uchun turli masallarning muhimlik darajasini aniq ajratib olish katta ahamiyatga ega tadkikotlar ko'pincha maqsadni aniq bo'lmagan holda ifodalash bilan boshlanadi va tizimli tahlil jarayonini noaniqliklar bartaraf etiladi.

Moddellashtirish. Masalani qo'yish bosqichida muammoning talab etilgan tavsifi hosil qilinadi. Modellashtirish bosqichida sifatiy ifodalashlar miqdoriy bosqichga o'tadi. Tizimli tahlilda modellashtirishning asosiy maqsadi qaror qabul qiluvchi shaxsga va tizim tadqiqotchisiga yordam ko'rsatish uchun tizimning turli elementlari o'rtasidagi o'zaro bog'lanishning aniq ifodalash

Imitasion tizim. Jarayonlarni tekshirish nazariyasining va boshqarish maqsad vazifalari berilgan deb hisoblaymiz ya`ni murakkab masalalarda olingan tadqiqot obe'ktni maqsadidan kelib chiqadi. Bu muammoni tadqiqotlarsiz hal qilib bo'lmaydi. Biroq taqiqotlarning faqat o'zi ham barcha ma'lumotlarni tahlil qilishga imkoni yetmaydi. Matematika bilan tadqiqotning maqsadi - «Mashina matematikasi» ning eng muhim masalasidir. Bunday o'zaro munosabatlarni taminlash uchun ko'p marta model bilan mashina tadqiqotini tashkil eta olish talab etiladi. O'rganilayotgan jarayonning kechishini imitasiyalaydigan maxsus yordamchi dasturlar va ma'lumotlar bazalari bilan birlashtirilgan variantli hisoblashlarni tezkor amalga oshirishga imkon beruvchi modellar majmuasiga **imitasiyali tizim** deyiladi. Imitasion tizimlardan foydalanishga 3-avlod EXM larning paydo bo'lishi yanada takomillashgan operasion tizimga va pereferiya qurilmalarga keng imkoniyat yaratilib keldi. Bu mashinalar yanada qatiy tahlil metodlarini va yeveristik usullarini birlashtirishga imkon berdi.

Imkoniyatli strategiyalarning tahlili. Imitasion tizimlarni yaratilgandan keyin imkoniyatli strategiyalarni baholash bosqichi boshlanadi. Buning natijasida modelni ko'rishda qilingan chetlanishlarga natijalarning sezgirligi tekshiriladi. Agar asosiy chetlanishlar noto'g'ri bo'lsa, modellashtirish bosqichiga qaytish zarur. Ko'p xollarda boshlang'ich variantni sezilarsiz o'zgartirib modelni yaxshilashga erishiladi. Yechimni tizimli tahlil etish navbatdagi barcha sonli qiymatlarni birlashtirish va ko'rsatkichlar uchun mos keluvchi tadbirlarni aniqlashdan iborat.

Natijada barcha ko'rsatkichlar yagona funktsiyaga keltiriladi buning natijasida yechimning eng kerakli varianti ajratib olinadi.

1.4. Modellarga qo'yilgan talablar. Model turlari

Kimyoviy texnologiyalarning jarayonlari - bu murakkab fizikaviy - kimyoviy tizimlar, ular ikki xil determinanli - stoxastik tabiatga hamda fa'zo va vaqtda o'zgaruvchi qiymatlarga egadir. Ularda qatnashuvchi moddaning oqimlari quyidagidek: ko'p fazali va ko'p komponentlidir. Fazaning har bir nuqtasida hamda fazalar chegarasida jarayon o'tish davrida impuls, energiya va massaning eltuvchi vazifasini bajaradi. Umuman butun jarayon aniq geometrik tavsifnomaga ega bo'ligan qurilmalardan o'tadi. O'z navbatida, bu tavsifnomalar jarayonning o'tish xarakteriga ta'sir etadi.

Kimyo-texnologik jarayonlarning muhim xossasi shundan iboratki, hodisalami tashkil etuvchi majmui determinanli-stoxastik tabiatga egadir. Buning tabiati qurilmadagi modda - issiqlik o'tkazish va kimyoviy o'zgarishlarga gidrodinamik muhitning stoxastik xossalarini qoplashida ayon bo'ladi. Bu fazalar komponentlarini tashkil etuvchilarining tasodifiy o'zaro ta'sirlashishi (zarrachalar to'qnashishi, ulami maydalanishi, koalessensiyasi, qurilma hajmi bo'yicha tasodifly tarqalishi bilan) yoki qurilmadagi geometriya xarakterini chegaraviy shartlari (tartibsiz yotqizilgan nasadka elementlarining tasodifiy joylashishi, katalizatoming donalari, siljuvchi muhitlar fazalararo chegarasining ishlab chiqaruvchi orientatsiyasi va h.k.) bilan izohlanadi.

Shunga o'xshash turli tizimlar va komponentlarning tashkil etuvchilarini o'ta murakkab o'zaro ta'sirlashishi bilan xarakterlanadi, buning natijasida ulamni klassik determinanlangan moddani olib o'tish va saqlash qonunlar pozitsiyasidan o'rganish imkoni yo'q.

Kimyoviy-texnologik jarayonlami qanday o'rganish mumkin? Bu muammoni yechish kalitini matematik modellash usuli beradi. Bu usul tizimli tahlil strategiyasiga asoslanadi. Bu strategiyaning mohiyati - jarayonni murakkab o'zaro ta'sirlanuvchi ierarxik tizim deb, uning strukturasini sifatli tahlillab, matematik ifodasini ishlab chiqish va noma'lum parametrlarini baholashdan iboratdir. Masalan, yaxlit suyuq muhitda zarralar, tomchilar yoki gaz pufakchalar ansamblini harakatlanish jarayonida paydo bo'layotgan hodisalar qaralganda, samaralar ierarxiyasining beshta sathi ajratiladi:

1) atomlar-molekular sathdagi hodisalar majmui;

2) moleku-lalar tashqi yoki globulyar strukturalar masshtabdagi samaralar;

3) faza-lararo energiya va modda olib o'tish hodisalari va kimyoviy reak- siyalami inobatga oladigan, dispersli fazani birlik ulanish harakatiga bog'liq bo'lgan ko'p fizikaviy-kimyoviy hodisalar to'plami;

4) yax-lit fazada ko'chib yuradigan aralashmalar ansambldagi fizik-kimyoviy jarayonlar;

5) qurilma masshtabida makrogidrodinamik muhitni aniqlaydigan jarayonlar majmui. Bunday yondashuv butun jarayonning hodisalari va ular orasidagi bog'lanishlar to'plamini to'la o'tishga imkon beradi.

Matematik model orqali obyektning xossalarini o'rganish **matematik modellash** deb tushuniladi. Jarayon o'tishi optimal sharoitlarini aniqlash, matematik model asosida uni boshqarish va obyektga natijalarini olib o'tish uning maqsadidir.

Matematik model tushunchasi matematik modellash usulining asosiy tushunchasidir.

Matematik model deb matematik belgilash yordamida ifodalanuvchi, qandaydir hodisa yoki tashqi dunyo jarayonini taxminiy tavsifiga aytiladi.

Matematik modellash o‘ziga uchta o‘zaro bog‘langan bosqichlami qamrab oladi:

1) o‘rganilayotgan obyektni matematik tavsifini tuzish;

2) matematik tavsifi tenglamalar tizimini yechish usulini tanlash va modellashtiruvchi dastur shaklida uni joriy qilish;

3) modelning obyektga monandligi (adekvatligi)ni aniqlash.

Matematik tavsifni tuzish bosqichida obyektda asosiy hodisa va elementlari avval ajratib olinadi va keyin ular orsidagi aloqalar aniqlanadi. Har bir ajratib olingan element va hodisa uchun uning funksiyalanishini aks ettiradigan tenglama (yoki tenglamalar tizimi) yoziladi. Bundan tashqari, matematik tavsifiga turli ajratib olingan hodisalar orasiga aloqa tenglamalari kiritiladi. Jarayon nisbatiga qarab matematik tavsif algebraik, differensial, integral va integro-differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida ifoda etilishi mumkin.

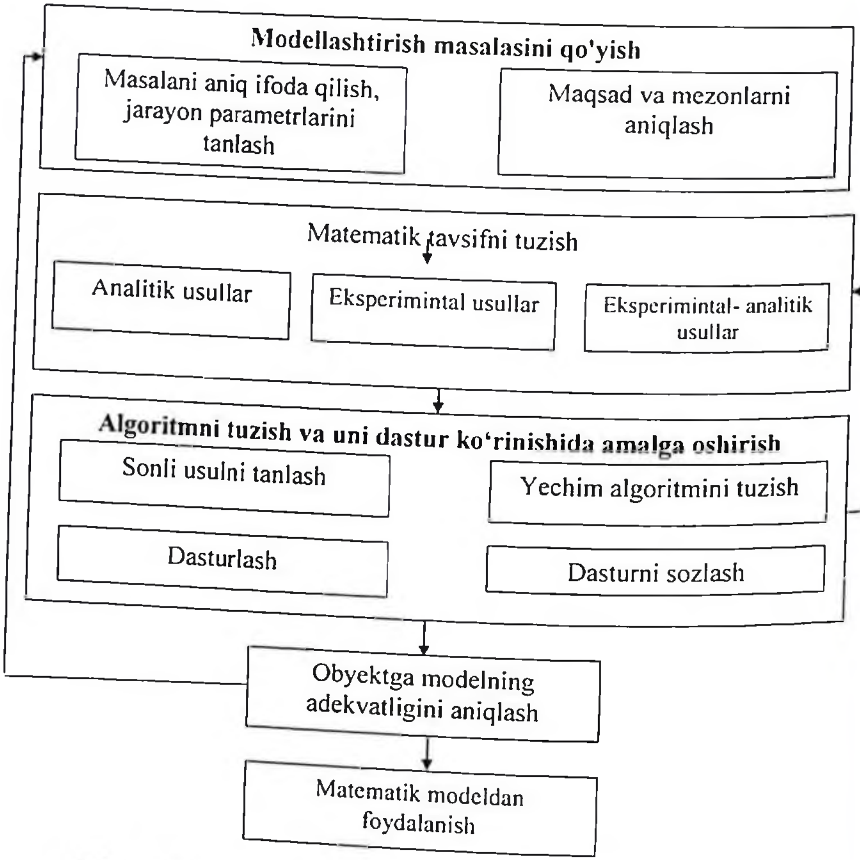
Yechim usulini tanlash va modellashtiradigan dasturni ishlab chiqish bosqichi mavjud usullar ichidan eng samarali (samarali deganda yechimning tezligi va aniqligi nazarda tutiladi) yechim usulini tanlash nazarda tutiladi va avval yechim algoritm shaklida, keyin esa uni EHMda hisoblashga yaroqli dastur shaklida amalga oshiriladi.

Fizik tushunchalar asosida qurilgan model modellashtirilayotgan jarayon xossalarini to‘g‘ri sifatli va miqdorli tavsiflashi, ya’ni u modellashtirilayotgan jarayonga monand bo‘lishi kerak. Real jarayonga matematik modelning monandligini tekshirish uchun jarayon o‘tishida obyektdan olingan o‘lchovlar natijasini o‘xshash sharoitlardagi model bashorati natijalari bilan taqqoslash kerak.

Modelning monandligini o‘rnatish bosqichi uni ishlab chiqish bosqichlari ketma-ketligining yakuniysidir. 1.2.-rasmda matematik modelni ishlab chiqishning umumiy sxemasi ko‘rsatilgan.

Matematik modelni qurilishida real hodisa soddalashtiriladi, sxemalashtiriladi va olingan sxema hodisalar murakkabligiga bog‘liq holda u yoki boshqa matematik apparat yordamida tavsiflanadi.

Tadqiqotning muvaffaqiyatliligi va olingan natijalaming ahamiyatliligi modelda o‘rganilayotgan jarayonning xarakterli xislatlarini hisobga to‘g‘ri olishga bog‘liq.



1.2.-rasm. Matematik modelni ishlab chiqish bosqichlari.

Jarayonga ta'sir qiluvchi barcha eng muhim omillar modelda hisobga olingan bo'lishi va shu bilan birga u ko'plab kichik ikkinchi darajali omillar bilan ketma-ket bo'lmasligi kerak, ularni hisobga olish faqat matematik tahlilni murakkablashtiradi va tadqiqotni o'ta tiqilinch yoki umuman amalga oshmaydigan qilib qo'yadi.

Jarayonlar uchun aniq matematik tavsifi bo'lgan matematik modellash usulini aniq matematik jarayonlar xususiyatlarini o'rganishda qo'llashadi. Matematik tavsifi mukammallik darajasiga bog'liqligiga qarab, ikkita chegaraviy hodisani ajratishimiz mumkin:

Jarayonning aniq amalga oshirish va uning apparaturali rasmiylashtirilishga bog'liqligidan kimyo-texnologik jarayonlarning barcha xilma-xilligini vaqtli va fazoviy alomatlaridan kelib chiqib to'rt sinfga bo'lish mumkin:

1) vaqt bo'yicha o'zgaruvchan (nostatsionar) jarayonlar;
2) vaqt bo'yicha o'zgarmaydigan (statsionar) jarayonlar;
3) fazoda parametrlari o'zgaradigan jarayonlar;
4) fazoda parametrlari o'zgarmaydigan jarayonlar.

Matematik modellarga muvofiq obyektlarini aks ettiruvchi bo'lgani uchun, ular uchun shu sinflar xarakterlidir, chunonchi:

1) statik modellar - vaqt bo'yicha o'zgarmas modellar;
2) dinamik modellar - vaqt bo'yicha o'zgaruvchi modellar;
3) jamlangan parametrli modellar - fazoda o'zgarmas modellar;
4) taqsimlangan parametrli modellar - fazoda o'zgaruvchi modellar.

Model xossalari orasidan quyidagilarni ajratish mumkin: samaradorlik, universallik, turg'unlik, mazmuniylik, monandlik, chegaralanganlik, to'lalik, dinamiklik.

Har qaysi matematik modelning qurilishi modellashtirish obyektining fizikaviy tavsifi qurishdan boshlanadi. Bunda modellashtirish obyektida modelda aks etishi lozim bo'lgan yuz berayotgan «elementar» jarayonlar ajratiladi va ularning tavsifida qabul qilinadigan asosiy farazlar ifoda etiladi. O'z navbatida, hisobga olinadigan «elementar» jarayonlar ro'yxati obyektni tavsiflaydigan matematik modelga kiritiladigan hodisalar majmuini aniqlaydi. Bu holda «elementar» jarayon deb ma'lum hodisalar sinfiga tegishli fizik - kimyoviy jarayon tushuniladi, masalan, modda almashish, issiqlik o'tkazish va h.k. Bu yerda «elementar» jarayonlar nomi aslo bu jarayonlar eng sodda va murakkab bo'lmagan tenglamalar bilan tavsiflanadi degan ma'noni anglatmaydi. Shunday qilib, modda almashish hozirgi vaqtgacha to'liq tugatilmagan butun bir nazariya predmetidir. Bu nom bunday jarayonlar ancha murakkab boiib, butun kimyo - texnologik jarayonning tashkil etuvchilari ekanligini anglatadi.

Odatda, kimyo-texnologiya obyektlarini matematik modellashtirishda quyidagi «elementar» jarayonlar inobatga olinadi:

1) fazalar oqimining harakati;
2) fazalararo modda almashish;
3) issiqlik o'tkazish;
4) agregat holatining o'zgarishi (bug'lanish, kondensat- yonish, erish va h.k.); 5) kimyoviy o'zgarishlar.

Modelda «elementar» jarayonlaming matematik tavsifining to'liqligi ularning butun kimyo-texnologik jarayondagi roliga, o'rganish darajasi, obyektdagi «elementar» jarayonlarning o'zaro bog'lanish chuqurligiga va barcha tavsifning istalgan aniqligiga bog'liq. «Elementar» jarayonlaming o'zaro bog'liqligi juda murakkab bo'lishi mumkin. Shuning uchun amalda aloqalar xarakteri nisbatiga ko'pincha turli farazlar qabul qilinadi, bu esa modelga to‘liq o‘rganilmagan bog‘liqliklarni kiritish zarurati va tavsifning ortiqcha murakkablashtirishdan xalos bo‘lish imkonini beradi.

Masalan, aralashmalarni rektifikatsiya jarayonini fizik tavsiflashda quyidagi «elementar» jarayonlarga ajratiladi:

1) kolonnada suyuqlik va bug‘ oqimlarining gidrodinamikasi;

2) suyuqlik va bug‘ orasida modda almashish;

3) suyuqlik va bug‘ orasida issiqlik uzatish;

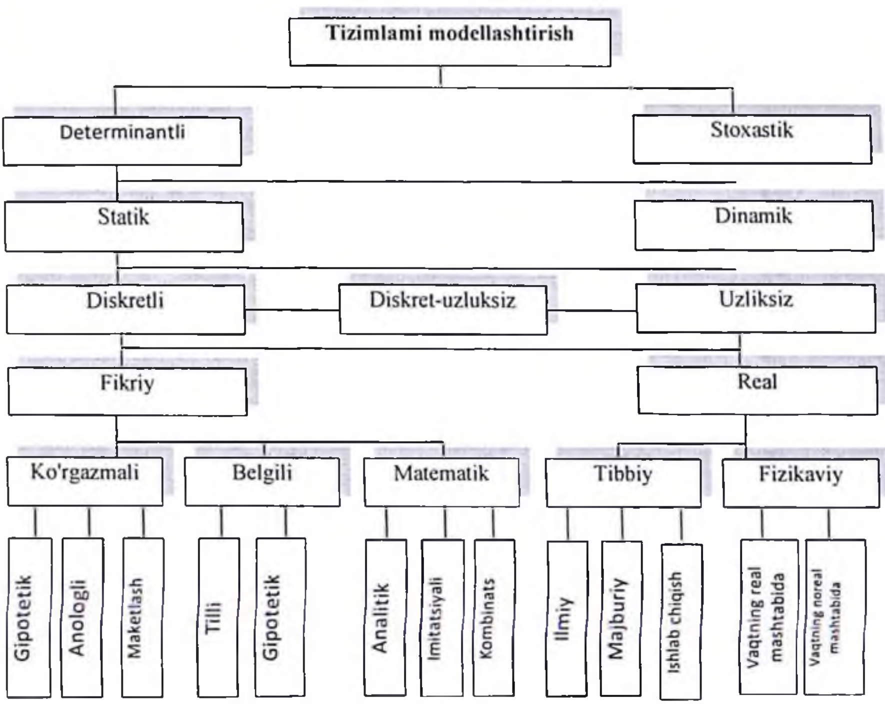
4) suyuqlikning bug‘lanishi va bug‘ning kondensatsiyalanishi.

Barcha ko‘rsatilgan «elementar» jarayonlar yoki tarelkada yoki kolonnalarning nasadkali seksiyasida bo‘lib o‘tadi va o‘zaro to‘g‘ri bog‘langan. Bu jarayonlarini to‘liq tavsifi o‘ta murakkab tenglamalar, tizimlar bilan ifodalanadi. Faqatgina Nave-Stoks tenglamasi yordamida tarelakadagi (yoki nasadkada) suyuqlik oqimi gidrodinamikasining tavsifi yechimi jihatidan o‘ta murakkab bo‘lgan hisoblash masalasini anglatadi. Suyuqlik va bug‘ orasidagi oqimlar modda almashishini to‘liq tavsiflash masalani yechish ham murakkablik jihatidan undan kam emas. Shu bilan birga bu masalalar birgalikda yagona tenglamalar tizimi sifatida yechilish kerak. Bundan kelib chiqadiki, oqilona soddalashtiruvchi farazlarsiz bu masalalarni yechib bo‘lmaydi. Shuning uchun odatda bug‘ va suyuqlik oqimlar harakati haqida ideallashtirilgan ifoda qabul qilinib (bug‘ to‘liq siqib chiqish rejimida harakatlanadi, suyuqlik esa tarelkada to‘liq aralashadi), modda almashishni esa bo‘linish pog‘onalari samaraligi orqali ifodalanadi. Ko‘pincha modda almashishni aks ettiruvchi ifodalar yarim empirik usullar bilan aniqlanadi yoki bo‘linishning har bir pog‘onasida muvozanatga erishilishini hisobga olib, umuman, inobatga olinmaydi.

Ayrim hoilarda modellashtirish obyektining fizik tavsifi matematik modellashtirish natijasida o‘rnatilishini aytib o‘tish kerak. Masalan, obyektda bo‘lib o‘tayotgan jarayonlar mexanizmi haqidagi ayrim gipotezalarni tekshirish uchun matematik modellashtirish qo‘llanadi. Buning uchun model tarkibiga keyingi modellashtirish natijalari bo‘yicha u yoki bu fizik farazning haqqoniyligi haqida hukm chiqarish uchun tadqiqlanayotgan bog‘liqliklar kiritiladi. Masalan, katalitik kimyoviy o‘zgarishlar mexanizmlari tadqiqotchilarga ko‘pincha noma’lum. Matematik modelga u yoki boshqa kimyoviy reaksiyaning o‘tish mexanizmini kiritib va modellashtirish natijalarini tajribadagi natijalar bilan solishtirib, haqiqiyga eng yaqin mexanizmini topish mumkin.

1.5. Texnologik tizimni modellashtirish usullari. Texnologik tizimni optimallashtirish masalasi. O'xshashlik kriteriyalari. Fizik modellashtirish

Modellashtirish asosida o'xshashlik nazariyasi yotadi, u shuni tasdiqlaydiki, mutloq o'xshashlik bir ob'ektning boshqa xuddi shunday ob'ekt bilan almashtirish mavqiyga ega bo'lishi mumkin. Modellashtirishda mutloq o'xshashlik o'rinli emas va shuning uchun ob'ektni tadqiq qilinayotgan ishlash tarafini yetarli, yaxshi aks ettirishga intilish kerak. Shuning uchun modellashtirish turlarini tasniflash alomatlardan biri sifatida-modelning to'lik darajasini tanlash mumkin va modellarni shu alomatga muvofiq to'liq, to'liq bo'lmagan va taxminiylarga bo'lish mumkin. To'liq modellashtirish asosida nafaqat vaqtda, balki fazoda ham namoyon bo'ladigan to'liq o'xshashlik yotadi. To'liq bo'lmagan modellashtirish uchun o'rganilayotgan ob'ektga modelning to'liq bo'lmagan o'xshashligi xarakterlidir. Taxminiy modellash asosida taxminiy o'xshashlik yotadi, bunda, real ob'ektning ba'zi ishlash taraflari mutloq modellashtirishmaydi.



1.3. -rasm. Tizimlarning modellashtirish turlarining tasnifi

S tizimlarini modellashtirish turlarining tasnifi 1.3.-rasmda keltirilgan. ***S*** tizimda o'rganilayotgan jarayonlar xarakteriga muvofiq modellashtirishning barcha turlari determinalangan va stoxastik, statik va dinamik, diskret, uzluksiz va diskret - uzluksizlarga bo'linishi mumkin.

Determinalangan modellashtirish determinalangan jarayonni aks ettiradi, ya'ni har qanday tasodifiy ta'sirlarning yo'qligi inobatga oladigan jarayonlarni nazarda tutadi; *Stoxastik modellashtirish e*htimollik jarayonlar va hodisalarni aks ettiradi. Bu holda tasodifiy jarayonning qator amalga oshirilishlari tahlillanadi va o'rta ta'riflar, ya'ni bir turdagi amalga oshirishlarning to'plami baholanadi.

Statik modellashtirish qandaydir vaqt lahzasida ob'ekt xulqini tavsiflash uchun xizmat qiladi, *dinamik modellashtirish e*sa vaqtda ob'ektning xulqini aks ettiradi. *Diskret modellashtirish* diskretliligi nazarda tutilgan jarayonlarni tavsiflash uchun xizmat qiladi va shunga muvofiq uzluksiz modellashtirish tizimlarda uzluksiz jarayonlarni aks ettirish uchun imkon beradi, *diskret - uzluksiz modellashtirishdan e*sa diskret hamda uzluksiz jarayonlarni ajratib ko'rsatish zarur bo'lgan hollarda foydalaniladi.

Xayoliy modellashtirish ba'zi hollarda vaqtning berilgan oralig'ida amalga oshirib bo'lmaydigan yoki ularni jismoniy shartlaridan tashqarida yotganligi uchun ob'ektlarni modellashtirishning yagona usuli hisoblanadi. Masalan, xayoliy modellashtirish asosida mikroolamdagi fizik tajriba o'tkazishga imkon bermaydigan ko'p vaziyatlarni tahlillash mumkin. Xayoliy modellashtirish ayoniy, belgili va matematik ko'rinishda amalga oshirilishi mumkin.

Obyektni *(S* tizimni) taqdim etish shakliga muvofiq xayoliy va real modellashtirishni ajratish mumkin.

Ayoniy modellashtirishda, ob'ektda o'tadigan hodisalar va jarayonlarni aks ettiruvchi real ob'ektlar haqida turli ayoniy modellar inson tushunchalari asosida yaratiladi.

Gipotetik modellashtirish asosida real ob'ektda jarayonlar o'tish qonuniyatlari haqida tadqiqotchi qandaydir gipotezani asos qilib oladi. Bu gipoteza ob'ekt haqida tadqiqotchining bilim darajasini aks ettiradi va o'rganilayotgan ob'ektning kirish va chiqish orasidagi sabab - oqibat aloqalarga asoslanadi. Gipotetik modellashtirish formal modelarni qurish uchun ob'ekt haqidagi bilimlar yetishmayotganda ishlatiladi.

Analogli modellashtirish turli darajadagi anologiyalarni qo'llashga asoslanadi. Faqat oddiy ob'ektlar uchun o'rinli bo'lgan eng yuqori darajalilari to'liq analogiya hisoblanadi. Obyektni murakkablashishi bilan keyingi darajalardagi analogiyalardan foydalaniladi, bunda, analogli model ob'ektni ishlashining bir nechta yoki faqat bir tarafini aks ettiradi.

Xayoliy ayoniy modellashtirishda *maketlash* muhim o'ringa ega. Xayoliy maket ***real*** ob'ektda o'tadigan jarayonlar ***fizikaviy*** modellashtirishga imkoni bo'lmagan yoki modellashtirishning boshqa turlarini o'tkazishdan oldin qo'llanilishi mumkin bo'lgan hollarda qo'llaniladi. Xayoliy maketlarni qurish asosida analogiyalar yotadi, biroq odatda ob'ektdagi hodisalar va jarayonlar orasidagi sabab - oqibat bog'lanishlarga asoslanadi. Agar ba'zi tushunchalar, ya'ni alomatlarni belgilashni hamda alomatlar orasida ma'lum amallarni kiritsak, unda *alomatli modellashtirishni* amalga oshirish mumkin va alomatlar yordamida tushunchalar to'plamini aks ettirish mumkin, ya'ni so'zlardan ayrim gaplar va zanjirlar tuzish mumkin. Ko'plik nazariyasining birlashtirish, kesishish va to'ldirish amallarini qo'llab, ayrim belgilar orqali real ob'ektlarga tavsiflar berish mumkin.

Tilli modellashtirish asosida qandaydir tezaurus (bir tilning mukammal lug'ati) yotadi. U kiruvchi tushunchalar tao'plamidan tashkil topadi, uning ustiga bu to'plam fiksasiyalangan bo'lishi kerak. Shuni qayd etish kerakki, tezaurus va oddiy lug'at orasida prinsipial farqlar bor. Tezaurus - lug'at, bir xil bo'lmaganlikdan tozalangan, ya'ni unda har bir so'zga yagona tushuncha muvofiq bo'lishi kerak, garchi oddiy lug'atda bir so'zga bir nechta tushunchalar muvofiq bo'lishi mumkin.

Belgili modellashtirish real ob'ektni o'rnini bosadigan va uning munosabatlarini asosiy xossalarini ma'lum alomatlar va belgilarning tizimi yordamida ifoda etadigan mantiqiy ob'ektni yaratishning sun'iy jarayonidir.

Ixtiyoriy S tizimlarning faoliyat ko'rsatish jarayoni xarakteristikasini tadqiq qilish uchun ushbu jarayonni formallashtirish kerak, ya'ni uning matematik modelini tuzish kerak.

Matematik modellashtirish deganda - berilgan real ob'ektning ba'zi bir matematik ob'ektga muvofiqligini belgilash jarayoni tushuniladi. Bu matematik ob'ekt matematik model deb ataladi va bu modelni tadqiq qilish o'rganilayotgan real ob'ekt xarakteristikalarini olish imkonini beradi. Matematik modelning turi nafaqat real ob'ekt tabiatiga bog'liq, balki ob'ektni tadqiq masalalariga va talab qilinadigan ishonchlilik hamda masalani yechish aniqligiga bog'liq. Har qanday matematik model, boshqalarga o'xshab, haqiqatga yaqinlashishning ba'zi darajasi bilan real ob'ektni tavsiflaydi. Tizimlar ishlash jarayoni xarakteristikalarini tadqiq qilish uchun matematik modellashtirishni analitik, imitasion va kombinasionlarga bo'lish mumkin.

Analitik modellashtirish uchun shu narsa xarakterliki, tizim elementlarini ishlash jarayonlari qandaydir funksional munosabatlar (algebraik, integro - differensial, chekli - ayirmali va h.k.) yoki mantiqiy shartlar ko'rinishida yoziladi.

Analitik modelni tadqiqot usullari.

Analitik model quyidagi usullar bilan tadqiq qilinishi mumkin:

a) analitik, bu usul izlanayotgan xarakteristikalar uchun umumiy ko'rinishda aniq bog'liqliklarini olish kerak bo'lganda qo'llaniladi;

b) sonli, bu usul umumiy ko'rinishda tenglamalarni yechishni bilmasdan, aniq boshlang'ich ma'lumotlarda sonli natijalarni olish kerak bo'lganda qo'llaniladi;

d) sifatli, bu usul aniq ko'rinishda yechimni olmasdan, yechimning ba'zi xossalarini topish mumkin (masalan, yechimning turg'unligini baholash) bo'lganda qo'llaniladi.

Agar S sistemaning izlanayotgan xarakteristikalari boshlang'ich sharoitlari, parametrlari va o'zgaruvchanlarini bog'layotgan aniq ifodalar ma'lum bo'lsa, tizimning ishlash jarayonini eng to'liq tadqiqotini o'tkazish mumkin. Lekin bunday bog'liqliklarni olish faqatgina oddiy tizimlar uchun muvaffaqiyatli bo'ladi. Tizimlar murakkablashganda ularni analitik usul bilan tadqiqlash katta qiyinchiliklarga olib keladi va ba'zida bu qiyinchiliklarni yengib bo'lmaydi. Shuning uchun, analitik usuldan foydalanishni istaganda tizimning loaqal umumiy xususiyatlarini o'rganish uchun birlamchi model ancha soddalashtiriladi.

Sonli usul analitik usulga nisbatan tizimlarning kengroq sinfini tadqiq qilishga imkon beradi, lekin bunda, olingan yechimlar xususiy xarakterga ega bo'lib, shaxsiy kompyuterdan foydalanganda sonli usul g'oyat samaralidir. Ba'zi bir hollarda tizim tadqiqotchisini matematik modelning sifatli usuli tahlilidan foydalanib olingan xulosalar qanoatlantirishi mumkin. Bunday sifatli usullar, masalan, boshqarish tizimlarning turli variantlarini samarasini baholash uchun avtomatik boshqarish nazariyasida keng qo'llaniladi.

Hozirgi vaqtda katta tizimlarning ishlash jarayoni xarakteristikalarini tadqiq qilishda mashinali amalga oshirish usullari keng tarqalgan. EHM da matematik modelni amalga oshirish uchun unga muvofiq modellashtirish algoritmni qurish kerak.

Imitasion modellashtirishda S tizimning vaqt bo'yicha ishlash jarayonini amalga oshiruvchi modelning algoritmi qayta ishlab chiqiladi va shu bilan birga elementar hodisalar imitasiyalanadi. Ularning vaqt bo'yicha yuz berishi hamda mantiqiy strukturalarini saqlagan holda tizim xarakteristikalarini baholash imkonini beruvchi, vaqtning ma'lum momentlaridagi jarayonning holati haqidagi boshlang'ich ma'lumotlarni olish imkonini beradi.

Tahliliy modellashtirishga nisbatan imitasion modellashtirishning asosiy afzalligi murakkabroq masalalarni yechish imkoni hisoblanadi. Imitasion modellar diskret va uzluksiz elemenlarning mavjudligi, tizim elementlarining egri chiziqli xarakteristikalari, ko'plab tasodifiy ta'sirlar va boshqa tahliliy tadqiqotlarda qiyinchiliklarni tez-tez paydo qiladigan omillarni hisobga olish imkonini beradi. Hozirgi vaqtda imitasion modellar - katta tizimlarni tadqiq qilishda eng samarali bo'lib, ba'zida tizimning xulqi haqida, ayniqsa, uni loyihalash bosqichida axborot olishni yagona amaliy ommabop usuli hisoblanadi.

S tizimni ishlash jarayonini imtasion modelda qayta ishlab chiqarish natijasida olingan natijalar, tasodifiy qiymatlar va funksiyalarning amalga oshirishlari bo'lganda, jarayon xarakteristikalarini olish uchun uni ko'p karra qayta ishlab chiqish talab qilinadi. Keyin axborot statistik qayta ishlanadi va imitasion modelning mashinali amalga oshirish usuli sifatida statistik modellashtirish usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Avval statistik sinovlar usuli ishlab chiqiladi va u o'zi tasodifiy qiymatlar va funksiyalarni modellash uchun qo'llaniladigan sonli usulni ifodalaydi hamda ularning ehtimollik xarakteristikalari tahliliy masalalar yechimiari bilan mos tushadi (bunday prosedura Monte - Karlo usuli deb ataladi). Shundan keyin bu usuldan tasodifiy ta'sirlarga duchor bo'lgan tizimlarning ishlash jarayonlari xarakteristikalarini tadqiq qilish maqsadida mashinali imitasiya uchun foydalana boshlashdi, ya'ni statistik modellashtirish usuli paydo bo'ldi.

Shunday qilib, statistik modellashtirish usulini keyingi bosqichlarda imitasion modelning mashinali amalga oshirish usuli deb, statistik sinovlar usuli (Monte - Karlo) ni esa tahliliy masalani yechishning sonli usuli deb ataymiz.

Imitasion modellashtirish usuli tizim strukturasining variantlarini, tizimni boshqarish turli algoritmlar samarasini, tizimning turli parametrlarini o'zgarishining ta'sirini baholash masalalarini inobatga olib, *S* katta tizimlar tahlili masalalarini yechishga imkon beradi. Samaradorlikni baholashning ba'zi mezonlari bo'yicha optimal bo'lgan ma'lum chegaralanishlarda berilgan xarakteristikalari bilan tizimni yaratish talab qilinganda imitasion modellashtirish katta tizimlarning strukturaviy, algoritmik va parametrik sintezi asosida qo'yilishi mumkin.

Imitasion modellar asosida tizimlarning mashinali sintezi masalalarini yechishda, qayd qilingan tizimning tahlili uchun modellashtirish algoritmlarini ishlab chiqishdan tashqari, tizimning optimal variantini qidirish algoritmini ham ishlab chiqish kerak. Mashinali modellashtirish uslubiyatini asosiy mazmuni berilgan modellashtirish algoritmlari bilan tizimlarning tahlili va sintezi masalalariga mos keluvchi ikkita asosiy bo'limga ajratamiz: statika va dinamika.

Kombinasiyalangan modellashtirish (tahliliy-imitasion) tizimlarning tahlili va sintezida tahliliy va imitasion modellashtirishning fazilatlarini birlashtirishga imkon beradi. Kombinasiyalangan modellarni qurishda ob'ektning ishlash jarayonini tashkil etuvchi nimjarayon uchun dastlabki dekompozisiya o'tkaziladi va ular uchun imkon bo'lganda tahliliy modellar ishlatiladi, qolgan nimjarayonlar uchun esa imitasion modellar quriladi. Bunday kombinatsiyalangan yondashuvda faqat tahliliy va imitasion modellashtirishdan alohida foydalanish imkoni bo'lmaganda tizimlarning sifatli yangi sinflarini qamrab olishga imkon beradi.

Real modellashtirishda yoki real ob'ektda butunlayin, yoki uning qismida turli xarakteristikalarni tadqiq qilish imkonidan foydalaniladi. Bunday tadqiqotlar nafaqat normal rejimlarda ishlayotgan ob'ektlarda o'tkazilishi mumkin, balki tadqiqotchini qiziqtirayotgan xarakteristikalarini baholash uchun maxsus rejimlarni tashkillashtirishda (o'zgaruvchilar va parametrlarning boshqa qiymatlarida, vaqtning boshqa masshtabida va h.k.) ham amalga oshirilishi mumkin. Real modellashtirish eng monand bo'lgan modellashtirish hisoblanadi, lekin real ob'ektlarning xossalarini hisobga olganda uning imkoniyatlari chegaralangan bo'lib qoladi. Masalan, korxonaning avtomatik boshqarish tizimlari (ABT) ni real modellashtirish uchun, birinchidan, shunday ABTni yaratish, ikkinchidan esa, boshqariladigan ob'ektda tajribalar o'tkazish, ya'ni butun korxonada tajribalar o'tkazish talab qilinadi, lekin ko'p hollarda buning imkoni yo'q. Real modellashtirishning turli xilliligini ko'rib chiqamiz.

Modellashtirishda kibernetik modellashtirish o'ziga xos o'ringa ega. Kibernetik modellashtirishda modellarda kechayotgan fizik jarayonlarning ob'ektda bo'lib o'tayotgan jarayonlarga bevosita o'xshashligi bo'lmaydi. Bu holda qandaydir funksiyani aks ettirishga intilinadi va real ob'ekt «qora quti» sifatida qaraladi, unda qator kirishlar va chiqishlar bo'lib, ular orasidagi ba'zi bir aloqalar modellashtirishtiriladi. Kibernetik modellardan foydalanganda ko'pincha tashqi muhitning ta'sirlaridagi ob'ektning xulq taraflari tahlil qilinadi.

Shunday qilib, kibernetik modellar asosida boshqarishning ba'zi bir axborot jarayonlarini aks ettirish yotadi, bu- real ob'ektning xulqini baholashga imkon beradi. Bu holda imitasion modelni qurish uchun real ob'ektning tadqiq qilinayotgan funksiyasini ajratish kerak, bu funksiyani kirishlar va chiqishlar orasidagi ayrim aloqa operatorlari ko'rinishida, mutlaq boshqa matematik bog'lanishlar bazasida hamda tabiiy, jarayonning boshqa holatlarda fizikaviy amalga oshiriladi.

1.6. MathCad, Matlab, Statistika va boshqa dasturiy paketlar haqida

Ma'lumki, matematika fani tabiat va jamiyatda kechayotgan jarayonlarni o'rganish va tahlil etishda asosiy vositalardan biri sifatida e'tirof etiladi. Ushbu vositalarning imkoniyatlaridan samarali va tez suratlar bilan foydalanishni kompyuter texnologiyalari yutuqlarisiz tasavvur etib bo'lmaydi. Masalan, ko'p xolatlarda vujudga keladigan matematik muammoni tez va berilgan aniqlikda hal etish uchun professional matematikdan o'z kasbi bilan bir vaqtda ma'lum bir algoritmik tilni bilishi talab qilinar edi. Lekin muammo shundaki, matematiklar orasida dasturlash muhitlarining imkoniyatlaridan yaxshi voqif bo'lmaganlari ham yo'q emas. Ushbu muammolarni bartaraf etish uchun XX asrning 90-yillari boshiga kelib matematiklar uchun ancha qulayliklarga ega bo'lgan matematik sistemalar yaratila boshladi.

Professional matematik paketlar deganda, odatda hozirgi zamon kompyuterlarida qullanilayotgan Mathematica, Maple, Matlab, Derive, Mathcad kabi tizimlar va qiymatlarni statistik tahlil qilishga mo'ljallangan SSPS, Statistica, Statgraphics, Stadia va shunga o'xshash tizimlar oilalari nazarda tutiladi. Bu paketlar yordamida turli sonli va analitik (simvolli) matematik hisoblarni, oddiy arifmetik hisoblashlardan tortib, to xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish, optimallash masalalarini hal etish, statistik gipotezalarni tekshirish hamda matematik modellarni yaratishga qadar turli zarur texnik hisoblashlarni amalga oshirish mumkin. Ularning barcha takomillashgan ilmiy grafika vositalariga, qulay yordamchi axborot tizimiga va hisobotlarni rasmiylashtirish vositalariga ega. «Professional paket» atamasi «o'quv paketi» atamasiga muqobil ravishda tanlangan.

Hozirgi davrda bu paketlardan nafaqat oliy malakali mutaxassislar, professional o'qituvchilar, balki oliy ta'lim talabalari, xattoki, litsey, kasb-hunar kollejlari va maktablar o'quvchilari ham foydalanayotganligini kuzatish mumkin.

Bizning fikrimizcha, professional matematik paketlardan foydalanishning ommalashishiga asosiy ob'ektiv sabablar quyidagilar:

-kompyuterlar odatdagi uy jixozlari qatoridan o'rin olib bormoqda;

-kompyuter programmalari interfeysini tashkil etishda maxsus standartlar ishlab chiqilib, ulardan ommaviy ravishda foydalanilmoqda;

-hozirgi zamon talabasi, ilmiy xodimi va mutaxassisi hayotida Internet turidan foydalanish kundalik ehtiyojga aylanmoqda;

-talabalarga bilim berishda professional matematik paketlardan o'quv vositasi sifatida foydalanish darajasi oshmoqda;

-fundamental va amaliy xarakterdagi ilmiy tadqiqotlar bilan shug'ullanuvchilar uchun mos universal matematik paketlar yaratilmoqda va bu paketlar ilmiy tadqiqot natijalariga ijobiy ta'sir ko'rsatmoqda;

- Professional matematik paketlar bo'yicha maxsus adabiyotlar ko'paymoqda.

Ushbu sistemalar quyidagi ko'rsatkichlar bo'yicha doimo raqobat qilib keladi:

- Nazariy materialni chuqur va har tomonlama o'rganish uchun o'quvchiga qulay imkoniyatlar yaratish;
- Kuchli analitik va grafik imkoniyatlarga tayangan holda matematik muammolarni tez va oson yechishda o'quvchiga samarali yordam ko'rsatish;

Nostandart matematik muammolarni hal etish uchun o'zining maxsus algoritmik tiliga ega bo'lishi va h.k.

Hozirgi kunda o'rta ta'lim muassalarini zamonaviy kompyuter texnologiyalari va dastur ta'minotlari bilan ta'minlash tez suratlar bilan kechmoqda. Bu holda EHMning apparat va dastur ta'minotlarining o'zaro uyg'unligi katta ahamiyatga ega. Shu sababli, o'rta ta'lim muassasalarida matematika o'qitishning zamonaviy usuli sifatida Mathcad imkoniyatlaridan foydalanishni qisqacha bayon etamiz. Ushbu imkoniyatlardan to'liq voqif qiluvchi saytlardan biri sifatida www.exponenta.ru ni taklif etamiz.

Mathcad (Excel ning ham) ning boshqa hisoblash paketlaridan afzalligi shundan iboratki, Mathcad o'rta murakkablikdagi masalalarni yechishda maxsus kompyuter va matematik tayyorgarlikni talab qilmaydi. Agar Mathcad paketida uzoq vaqt ishlanmasada, u bilan ishlash saboqlari unutilib ketmaydi va zarur xolatlarda yuzaga kelgan masalalarni yechishga darhol kirishib ketiladi. Mathcadning "raqobatchi"larida esa, aniq va noaniqlarida uzluksiz shug'ullanishni talab etiladi, aks holda ishlash savodini qayta tiklash yetarli darajada qiyinchiliklar tug'diradi.

XX asrning oxirlaridan boshlab hozirgi kunga qadar shaxsiy kompyuterlarda juda samarali joriy qilinayotgan kompyuter algebrasi tizimlari muayyan tizimlarni tadqiq etish uchun amaliy dasturlar yaratishda yangicha texnologiyalarni qo'llash imkoniyatlarini ochib berdi.

Maple tizimining birinchi avlodi 1980 yili Kanadaning Waterloo universiteti mutaxassislari KeytGed va Gaton Gone tomonidan katta EHMlar uchun yaratilgan. 2000 yil dekabr oyining oxirida esa **Maple 6** tizimi yana shu Kanadaning Waterloo universitetida yaratildi. 2004 yil 7 aprelda esa **Maple 9.5** tizimi yana shu Kanadaning Waterloo universitetida yaratildi. Bu tizim iqtisodiyot, mexanika, matematika, fizika, muxandislik va h.k. yo'nalishdagi masalalarni yechishda matematikaning analitik hamda sonli usullarini qo'llashni amalga oshiradi. Shuning uchun hozirgi kunda ham **Maple 6, Maple 7, Maple 8, Maple 9.5** tizimilaridan keng foydalanib kelinmoqda. Kompyuter algebrasi tizimlari hisoblash tizimlari uchun qo'llaniladigan "kompyuter intellekti" tushunchasini mazmun va mohiyatini amalda namoyish qilish imkoniyatini yaratdi. Bu tizimlar amaliy dasturlar ta`minotini yaratuvchi mutaxassislar uchun quyidagi vositalarni yaratadi:

-yuqori saviyadagi dasturlashtirish tizimi;

-hujjatlar va dasturlarni yaratish hamda tahrirlash imkoniyatini beruvchi redaktorlar;

-foydalanuvchilar uchun bevosita muloqot asosida ishlash imkoniyatini beruvchi zamonaviy ko'p oynali interfeys;

-yuqori saviyadagi ma'lumotnoma tizimi;

-matematik ifodalarni qayta ishlovchi algoritm va qoidalar majmuasi;

-analitik va sonli amallarni bajaruvchi dasturiy protsessor;

-muloqot jarayonida sodir bo'ladigan xatoliklarni ko'rsatuvchi diagnostika tizimi;

-tizimning bevosita yadrosiga biriktirilgan funksiyalar kutubxonasi;

-tizimni qo'llash va matematik usullarni tadbiq qilish uchun kerak bo'ladigan paketlar majmuasi.

Bu vositalar amaliy dasturiy ta'minot yaratishdagi masalaning matematik modelini keltirib chiqarish, hisoblash usullarini tanlash, hisoblash eksperimentlarini o'tkazish va natijalarni tahlil qilish jarayonini to'liq avtomatizatsiyalash imkonini beradi. Bu esa, amaliy dasturlar ta'minotni tashkil qilishning tamoyillarini va masalalarni EHMda yechishning an'anaviy texnologiya doirasida qo'llanilib kelgan usullarini tubdan o'zgartiradi.

1.7. MathCad imkoniyatlari

Hozirgi vaqtda kompyuterlarda ilmiy-texnikaviy hisoblashlarni bajarishda odatdagi dasturlash tillaridan va elektron jadvallaridan emas, balki Mathematica, MatLab, Maple, Gauss, Reduse, Eureka va boshqa turdagi maxsus matematik dasturlar keng qo'llanilyapti.

Matematik paketlar, ayniqsa Mathcad – yuqorida sanab o'tilgan ro'yxat ichida eng mashhur paket bo'lib, ilmiy – texnikaviy soha mutaxassislariga dasturlashning nozik elementlariga e'tibor berilmasdan (masalan: fortran, C++, Paskal, BASIC va boshqalar kabi) kompyuterda matematik modellashtirishni amalga oshirishga katta yordam beradi. Quyida Mathcad matematik dasturlash muhitida ishlashning yaqqol ajralib turadigan imkoniyatlarini sanab o'tmoqchimiz:

Mathcad muhitida matematik ifoda, qabul qilingan ko'rinishda ifodalanadi. Masalan, daraja yuqorida, indeks pastda, integralning yuqori va quyi chegaralari esa an'anaviy joyida turadi.

Mathcad muhitida "dasturlashni" tuzish va ularning bajarilish jarayoni parallel kechadi. Foydalanuvchi **Mathcad** – hujjatida yangi ifoda kiritar ekan, uning qiymatini bira to'la hisoblash va ifodani kiritishda yo'l qo'yilgan yashiringan xatoliklarni grafigini ko'rish imkoniyati ham mavjud.

Mathcad paketi yetarli darajada qudratli matematik apparat bilan qurollanganki, ular orqali tashqi protseduralarni chaqirmasdan turib paydo bo'ladigan muammolarni hal qilishimiz mumkin.

Mathcadga xos bo'lgan ayrim hisoblovchi qurilmalarni sanab o'tmoqchimiz:

Chiziqli va chiziqli bo'lmagan algebraic tenglama va sistemalarni yechish;

Oddiy differensial tenglama va sistemalarni (Koshi masalasi va chegaraviy masala) yechish;

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish;

Berilganlarni static qayta ishlov berish (interpolyatsiya, ekstrapolyatsiya, approksimatsiya va ko'pgina boshqa amallar);

Vektor va matritsalar bilan ishlash (Chiziqli algebra va boshqalar);

Funksional bog'liqlikning maksimum va minimumini izlash.

- **Mathcad** paketi matematik va fizik-kimyoviy formulalarga, hamda o'zgarmaslarga asoslangan yordamchi qo'llanmalar bilan boyitilgan.
- **Mathcad** paketida turli sohalar bo'yicha electron darsliklar yaratish mumkin. Masalan: oddiy differensial tenglamarni yechish, statistika, termodinamika, boshqaruv nazariyasi, materiallar qarshiligi va boshqalar bunga misol bo'la oladi.

- Foydalanuvchi o‘z oldiga qo‘yilgan masalani yechish bilan cheklanibgina qolmay, fizikaviy maslalarni yechishda o‘lchovni hisobga olish imkoniyatiga ega. Bunda foydalanuvchi birliklar sistemasini ham tanlashi mumkin.
- Bundan tashqari **Mathcad** muhitida animatsiya vositasi bilan qurollangan, bunda tuzilgan modellarni nafaqat static (o‘zgarmas), balki dinamik (animatsion kliplar) holda yaratish mumkin.
- **Mathcad** muhiti belgili matematika elementlari bilan boyitilgan bo‘lib, bunda masalani nafaqat sonli yechish, balki analitik usulda ham yechishga imkoniyat yaratilgan.
- **Mathcad** muhitidan chiqmagan holda boshqa serverdagi hujjatlarni ishlatish va Internet tavsiya qiladigan yuqori informatsion texnologiya imkoniyatlaridan foydalanish mumkin.

Mathcad tizimida masalalarni sonli yechish bilan bir qatorda analitik usulda yechish hisobga olingan. Shuning uchun foydalanuvchilar bu dasturdan o‘zlari yecha olmagan matematik masalalar uchun tayanch yechim ombori sifatida foydalanishlari mumkin. Bu tizimdan tabiiy fanlar bo‘yicha electron darsliklar yaratishda asos dasturiy vosita sifatida foydalanishni tavsiya etish mumkin. Masalan differensial tenglamalarni yechish, statistika, termodinamika, boshqaruv nazariyasi kabi jarayonlarni geometrik tasvirlash va animatsiyalar orqali ijro etishni yuqori darajada amalga oshirish mumkin.

1.8. MathCad operatorlari va funksiyalari

Mathcad tizimining afzalliklaridan biri bu ifodani matematik ko‘rinishda hech qanday o‘zgarishsiz kiritishdadir. Bunda faqat tizimda joylashgan buyruqlar vazifasini bilish kerak bo‘ladi.

A va B – massivlar (vektor yoki matritsa);
u va v – haqiqiy yoki kompleks elementli vektorlar;
M –kvadrat matritsa;
z va w – haqiqiy yoki kompleks sonlar;
x va y – haqiqiy sonlar;
m va n – butun sonlar;
i –o‘zgaruvchilar diapozoni;
t –o‘zgaruvchining istalgan nomi;
f –funktsiya;
X va Y –o‘zgaruvchi yoki ixtiyoriy tipdagi ifoda.

Operator	Mathcad da yozilishi	Tugmalar dagi ifodasi	Mazmuni
Yarim global o'zgaruvchining qiymatini (massiv elementi, matritsa ustuni) o'zlashtirib, foydalanuvchining funktsiyasini aniqlaydi.	■ := ■ $a := b + c$ $Mi,j := 5$ $M < 2 >:$ $= V$ $z(x, [y, ...]) :$ $= x + 5$	:	O'zgaruvchining qiymatini o'zlashtirib (massiv elementi), mavjud operatorning o'ngroq va pastroqda ko'rinadigan foydalanuvchining funktsiyasini aniqlaydi.
Global o'zgaruvchining qiymati (massiv elementi, matritsa ustuni)ni o'zlashtirib, foydalanuvchining funktsiyasini aniqlaydi.	■ ≡ ■ $a \equiv b + c$ $M_{i,j} \equiv 5$ $M^{<2>} \equiv V$ $z(x, [y, \ldots]) \equiv x+5$	~	O'zgaruvchining qiymatini o'zlashtirib, Mathcad hujjatida ko'rinadigan barcha funktsiyalarni aniqlaydi.
Lokal o'zgaruvchining qiymati (massiv elementi, matritsa ustuni)ni o'zlashtiradi.	■ ← ■ $a \leftarrow b + c$ $M_{i,j} \leftarrow 5$ $M^{<2>} \leftarrow V$	Faqat programmalar blokida ko'rinadigan o'zgaruvchining qiymatini o'zlashtiradi.	Lokal o'zgaruvchining qiymati (massiv elementi, matritsa ustuni)ni o'zlashtiradi.
Sonli belgilarni hisoblash	■ = ■ [■] $a = 23.45$ $L = 34.56$ m $f(x) = 21$ $Vi = 5$	Birinchi operanda yozilgan sonli belgilarni, o'zgaruvch	Sonli belgilarni hisoblash

		i ifoda va funksiyalar ni hisoblaydi va ekranda ikkinchi operandga chiqaradi.	
Aylana qavslar	(X)	'	Operatorlar guruhi
Quyi indeks	A_n	[	Massivning indeksli elimenti
Yuqorigi indeks	$A^{<n>}$	[Ctrl]6	*A* matritsadan n ustunni tanlash.
Vektorlashtirish	X^p	[Ctrl]-	*X* ekspressiya bo'yicha bir elementni boshqa son bilan almashtirish operatsiyasini o'tkazish imkonini beradi. *X* ning barcha vektor yoki matritsalari bir xil o'lchovli bo'lishi kerak.
Faktorial	n!	!	$n(n-1)(n-2)\ldots$ ni ifodalaydi. n-butun son, manfiy bo'la olmaydi.
Yopiq kompleks	$\overline{X}$	"	*X* ning mavhum qismining invert signali
Transponirlash	A^T	[Ctrl]1	*A* matritsaning satr elementlarini ustunga, ustun elementlarini satrga almashtiradi.
Daraja	z^w	^	*Z* ni *W* darajasini ifodalaydi.

Matritsaning darajasi, matritsa inversiyasi	M^n	^	nth – M kvadrat matritsaning darajasi (matritsalar ko'paytmasidan foydalanish). n-butun son. $M - 1$ M ga teskari matritsa. Boshqa manfiy darajadagilar invertsiya darajasi bo'ladi.
Ayirish	-X	-	X ni -1ga ko'paytmasi
Vektor yigindi	$\sum v$	[Ctrl]4	V vektor elementlarining yigindisi. Skalyarni ifodalaydi
Kvadrat ildiz	$\sqrt{z}$	\	Musbat Z ning musbat kvadrat ildizi. Kompleks Z ning yoki manfiy Z ning absolyut kattaligini ifodalaydi.
n-darajali ildiz	$\sqrt[n]{z}$	[Ctrl]\	Z ning n-ildizini, yani imkoni boricha hamma vaqt ildizini, aniq qiymatini belgilaydi.
O'lchov	$\|z\|$	|	$\sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ ni ifodalaydi
Vektor o'lchovi	$\|v\|$	|	Vektor elementlari haqiqiy bo'lsa v ni ifodalaydi, kompleks bo'lsa vv ni ifodalaydi
Determinant	$\|M\|$	|	M kvadrat matritsaning qiymatini ifodalaydi
Bo'linma	x/z	/	X ifodani Z skalyarga bo'lish, $(Z \neq 0)$.

			Agar X massiv bo'lsa uning har bir elementi Z ga bo'linsa
Ko'paytma	$X \cdot Y$	x	Agar X va U skalyar bo'lsa, ularni ko'paytmasini ifodalaydi. Agar U massiv va X skalyar bo'lsa, unda U ning xar bir elementi X ga ko'paytiriladi
Kross-ko'paytma	$u \cdot v$	[Ctrl]8	u va v vektor elementlar uchun uchinchi kross hosilani ifodalayd
Yig'indiga olish	$\sum_{i=m}^{n} X$	[Ctrl] [Shift]4	$i = m, m+1, \ldots, n.$ uchun X yigindisini hisoblash. X ixtiyoriy ifoda, m va n lar butun sonlar.
Hosilaga olish	$\prod_{i=m}^{n} X$	[Ctrl] [Shift]3	$i = m, m+1, \ldots, n.$ uchun X hosilani hisoblash. X ixtiyoriy ifoda m va n lar butun sonlar
Yigindi chegarasi	$\sum_{i} X$	$	i o'zgaruvchi qatorning X yigindisini hisoblaydi.
Hosilaning chegarasi	$\prod_{i} X$	#	i o'zgaruvchi qator ustida X hosilani ifodalaydi.
Limit	$\lim_{x \to a} f(x)$	[Ctrl]L	x a ga intilganda, $f(x)$ funksiya limitini hisoblaydi.
Limit	$\lim_{x \to a^-} f(x)$	[Ctrl]B	x $\bar{a}$ ga ung tomondan intilganda, $f(x)$ funksiyaning

			imkoniyatini ifodalaydi.
Limit	$\lim_{x \to a^-} f(x)$	[Ctrl]A	x $\bar{a}$ ga ung tomondan intilganda, $f(x)$ funksiya limitini ifodalaydi.
Integral	$\int_a^b f(t)dt$	&	$f(t)$ funksiyani $[a,b]$ intervalda aniq integralini ifodasi. a va b skalyarlar $f(t)$ o'zgaruvchi ifoda.
Noaniq integral	$\int f(t)dt$	[Ctrl]I	$f(t)$ funksiyaning noaniq integrali.
Hosila	$\frac{d}{dt}f(t)$	?	$f(t)$ funksiyaning t o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini ifodalaydi. $f(t)$ ning barcha o'zgaruvchilari aniqlanishi kerak t skalyar. $f(t)$ skalyar ko'rinishda ifodalanadi.
n-tartibli hosila	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	[Ctrl]?	$f(t)$ funksiyaning t o'zgaruvchi bo'yicha n -hosilasini ifodalaydi. $f(t)$ ning barcha o'zgaruvchilari aniqlanishi kerak t skalyar. $f(t)$ skalyar ko'rinishda ifodalanadi.
Qo'shish	X+Y	+	X,Y yoki ikkalasi ham skalyar bo'lganda skalyar ko'shishni bajaradi. X va Y bir xil o'lchovli vektor yoki

			matritsa bo'lsa, elementlari yig'indisini ifodalaydi.
Ayirma	X-Y	-	*X* va *Y* lar skalyar bo'lganda skalyar ayirmani bajaradi. *X* va *U* bir xil o'lchovdagi vektor yoki matritsa bo'lsa, ularning elementlari o'rtasida ayirmani bajaradi.
Bo'lakli ko'shish	X... +Y	[Ctrl][↵]	Xuddi oddiy qo'shishdek bajariladi.
...dan katta	x>y S1>S2	>	*X* o'zgaruvchi *Y* dan katta bo'lsa 1ni boshqa holatlarda 0 ni ifodalaydi. *X* va *Y* lar skalyarlar bo'lishi lozim.
...dan kichik	$X < y$ $S1 < S2$	<	*X* o'zgaruvchi *U* dan kichik bo'lsa 1 ni, boshqa holatlarda 0 ni ifodalaydi. *X* va *Y* skalyar.
...dan katta yoki teng	$x \geq y$ $S1 \geq S2$	[Ctrl]0	*X* o'zgaruvchi *Y* dan katta yoki teng bo'lsa 1ni, boshqa xollarda 0 ni anglatadi *X* va *Y* skalyar.
Kichiq yoki teng	$x \leq y$ $S1 \leq S2$	[Ctrl]9	*X* o'zgaruvchi *Y* dan kichik yoki teng bo'lsa 1ni, boshqa xollarda 0 ni anglatadi *X* va *Y* skalyar

Teng emas	$z \neq w$ $S1 \neq S2$	[Ctrl]3	Agar Z o'zgaruvchi W bilan teng bo'lsa 1ni boshqa xolatlarda 0 ni ifodalaydi. Z va W skalyar bo'lishi kerak. $S1$ va $S2$ matnli o'zgaruvchilar uchun $S1$ o'zgaruvchining ASCII –kodirovkasi $S2$ o'zgaruvchini ASCII- kodirovkasi bilan bir xil bo'lmasa 1 ni ifodalaydi.
Teng	z=w	[Ctrl]=	Agar Z bilan W teng bo'lsa 1 ni boshqa xolatda 0 ni anglatadi.
Simvolli belgini hisoblash	■ →		Ifodaning simvolli belgisini hisoblash.
Uzluksiz vergul bilan	■ float[,n] →		Simvolli hisoblashda ekranga verguldan keyin belgilar sonini, istalgancha chiqariladi.
Hisoblash	■ solve ■ →	Berilgan o'zgaruvchili analitik tenglamani yoki berilgan vektorli o'zgaruvchidan iborat tenglamalar sistemasini hisoblash.	Hisoblash
Ko'paytuvchilarga ajratish	■ factor [■] →	Ifodani ko'paytuvc	Ko'paytuvchilarga ajratish

		hilarga ajratadi, agar bunga imkon bo'lsa. Berilgan o'zgaruvchi bo'yicha alohida oddiy radikallaridan iborat bir yoki bir necha radakallarga taxlaydi.	
Qismlarga ajratish	■ collect, ■, ■, ...,■ →		Berilgan ifodani berilgan o'zgaruvchi bazisda jamlangan boshqa ifoda bilan almashtirishni yoki qismlarga ajratishni ta'minlaydi.
Fur'e ifodasi	■, fourier ■ →		Berilgan o'zgaruvchiga nisbatan Fur'e almashtirishni amalga oshiradi.
Fur'e ifodasiga teskari ifoda	■, invfourier ■ →		Berilgan o'zgaruvchiga nisbatan Fur'e ifodasiga teskari ifodani bajaradi.
Kompleks ko'rinishga keltirish	■ complex →		Ajratilgan ifodani kompleks ko'rinishga keltiradi.
Ifodani soddalashtirish	■ simplify →		Analitik almashtirishlarni amalga oshirib,

			o'xshash kushiluvchilarni kiskartirib, umumiy maxrajga keltirib va trigonometrik ayniyatlardan foydalanib ajratilgan ifodani soddalashtiradi.
Darajalar bo'yicha yoyish	■ expand, ■→		Berilgan ifodani murakkab funksiyadan oddiylariga, berilgan o'zgaruvchi bo'yicha ifodalar yigindisiga ajratadi.
Qatorga ajratish	■ series, ■, ■ →		Ajratilgan ifodani berilgan o'zgaruvchi bo'yicha berilgan sonli qator elementlarini Teylor qatoriga keltiradi
Laplas ko'rinishiga keltirish	■ laplace, ■ →		Berilgan o'zgaruvchiga nisbatan Laplas almashtirishini bajaradi.
Laplas ko'rinishiga teskari almashtirish	■ invlaplace, ■ →		Belgilangan o'zgaruvchiga nisbatan Laplas ko'rinishiga teskari almashtirishini bajaradi.
Alohida simvolli almashtirishga buysunmaslik	■ assume, ■ →		Ayrim yunalishdagi simvolli almashtirishga buysunmaydi: o'zgaruvchi

			kompleks emas balki haqiqiy va h.k.
O‘rnatish	■ substitute, ■ = ■ →		Ifodani shunday almashtiradiki, bunda berilgan o‘zgaruvchi boshqasi bilan yoki ifoda bilan almashtiriladi.
Polinom koeffitsiyentlar	■ coeffs, ■ →		Ifodaning koeffitsiyentini aniqlaydi, agar bu ifoda polinom bo‘lsa yoki berilgan o‘zgaruvchi bo‘yicha polinom ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa.
Elementar kasrlarga ajratish	■ convert parfrac, ■ →		Ajratilgan ifodani berilgan o‘zgaruvchiga nisbatan butun to’gri kasrlar yigindisi ko‘rinishida ifodalaydi.
Z-o‘zgartirish	■ ztrans, ■ →		Berilgan o‘zgaruvchiga nisbatan *Z* o‘zgartirmani amalga oshiradi.
Z-o‘zgartirishga teskari o‘zgartirish	■ invztrans, ■ →		Berilgan o‘zgaruvchiga nisbatan *Z* o‘zgartirmaga teskari o‘zgartirishni amalga oshiradi

Matematikada qiyinchilik tug‘diradigan bir qancha masalalarni bu tizimda tez va oson hal etish mumkin. Masalan, yig‘indi yoki ayirmani istalgan daraja ko‘rsatkichi bo‘yicha yoyish, berilgan ko‘phadni ko'paytuvchilarga ajratish, tenglamalarni yechish va hokazo imkoniyatlari mavjud.

1.9. MathCad da dastur tuzish, massivlar va vektorlar bilan ishlash, funksiya grafiklarini chizish

1. $x \cdot (z+1)^2 - 2z \cdot (x-z)$ **ko'phadni standart ko'rinishga keltiring.**

Yechish: Mathcad menyular satridan Simvolics punktini tanlaymiz. So'ngra ushbu punktdagi Expand komandasini tanlaymiz.

$$x \cdot (z+1)^2 - 2z \cdot (x-z)\ expand\ x, z \rightarrow x \cdot z^2 + x - 2 \cdot z^2$$

Javob: $x \cdot z^2 + x - 2 \cdot z^2$

2. $a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c + a^2 \cdot c + b \cdot c^2$ **ifodani ko'paytuvchi larga ajrating.**

Yechish: Mathcadning Simvolics punktidan Faktor komandasini tanlaymiz.

Javob: *(b+c) (c+a) (a+b)*

3. $\left(1+\frac{2}{3x-1}\right) \cdot \left(1-\frac{9x-x^2}{3x-1}\right)+1$ **ifodani soddalashtiring.**

Yechish: Mathcadning Simvolika punktidan Simplify komandasini tanlaymiz.

$$\left(1+\frac{2}{3x-1}\right) \cdot \left(1-\frac{9x-x^2}{3x-1}\right)+1\ simplify \rightarrow x \cdot \frac{(-3+x)}{(3x-1)}$$

Javob: $x \cdot \frac{(-3+x)}{(3x-1)}$

4. $\frac{x^2+3x+7}{(x-1)^2 \cdot (x^2+x+1)}$ **ifodani sodda kasrlarga aylantiring.**

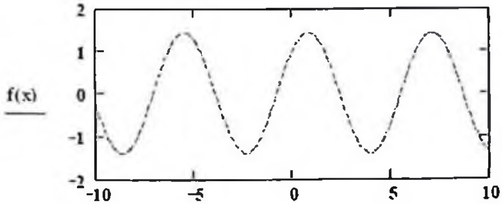
Yechish: Avvalombor x o'zgaruvchi belgilab olinadi. So'ngra Mathcadning Simbolics punktidan Variable komandasini tanlaymiz

$\frac{x^2+3x+7}{(x-1)^2 \cdot (x^2+x+1)}$ belgilangan x da Simvolics .. Variable .. Convern to Partial Fraction

Javob: $\frac{5}{3 \cdot (x-1)} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{3}$

5. $f(x) := \sin(x) + \cos(x)$ **funksiyaning grafigini chizing.**

$f(x) := \sin(x) + \cos(x)$



6. Parametr holda berilgan tenglamalar ham "Simvolika" asboblar panelidan "solve" operatori tanlanib noma'lum son kiritiladi. "="tugmasi bosish orqali natijani ko'rish mumkin.

$$a^2 \cdot z^4 - (a^2 \cdot b^2 + 1) \cdot z^2 - b^2 \; solve.z \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ -b \\ \frac{1}{a} \\ \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 2x - 1 \; solve.x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}414 \\ -2.414 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 5x + 6 \; solve.x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^4 + 6x^2 + 5 \; solve.x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2.236 \\ -2.236 \end{pmatrix}$$

1. Mathcad muhitida ikkinchi, uchinchi va tartibi yuqori bo'lgan determinantlarning son qiymatini osongina hisoblash mumkin. Buning uchun "Kalkulyator" panelidan kerakli tugma tanlanib, determinant kiritiladi va "=" tugmasini bosish orqali natijaga erishish mumkin.

Quyidagi keltirilgan determinantlar ham shu usulda bajarilgan.

1. $\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right| \rightarrow 5 = 5$ **2.** $\left|\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\right| = -47$ **3.** $\left|\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right|$

=116

4. $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right| = 186$ **5.** $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right| =$
-286

8. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.**

Yechish: Berilgan sistemani Gauss usulida yechish uchun berilgan sistemaning noma'lum oldidagi koeffitsiyentdan asosiy *A* matritsa tuzib olib, asosiy matritsaning birinchi ustunini ozod hadlar bilan almashtirib, qo'shimcha b matritsani tuzib olamiz.

Matritsa uskunalar panelidagi "Matritsa" dan kiritiladi.

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

So'ngra A matrisaning determinantni hisoblanadi. Bu determinantni hisoblash uchun uskunalar panelidagi "Matritsa" qilamiz.

$|A| := 9$

$x := A^{-1} \cdot b$ $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$$

yig'indini hisoblash.

Yechish: Ushbu yig'indini hisoblash uchun ifoda "Kalkulyator" asboblar panelidan foydalanib ifoda kiritiladi, "=" klavishi bosiladi va natija hosil bo'ladi, yoki "Crtl+Shift+to'rt" klavishidan ham yigindini hosil qilish mumkin va "=" belgisi bosilib, natija hosil qilinadi.

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 2{,}718$$

2- §. Matematik modellashtirish jarayonida aniqlanadigan tenglamalar sistemasini yechishning sonli usullari

2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikkita noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

(2.1.) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{22}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

(2.2)

Agar (2.1) sistemaning 1-tenglamasini $-a_{21}$ ga, 2-tenglamasini $-a_{11}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{21} - b_1a_{21} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

(2.3)

(2.2) va (2.3) larga e'tibor bersak ikkinchi tartibli determinantning ta'rifiga ko'ra

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (2.4)$$

Misol.

1) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ (x=-1; y=2), 2) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y - 5z = 3 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$ (x=1; 2; z=-1).

Agar uch noma'lumli bir jinsli ikkita tenglamalar sistemasi

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ berilgan bo'lsin.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantning loaqal bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda sistemaning barcha yechimlari

$x=\Delta_1 t$, $y=\Delta_2 t$, $z=\Delta_3 t$ formula bilan aniqlanadi. (t- ixtiyoriy son).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_1x + d_2y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Bu sistemada $\Delta \neq 0$ bo'lsa, $x=0$, $y=0$, $z=0$ lar sistemaning yagona yechimi bo'ladi.

Agar $\Delta=0$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimi bo'ladi.

Misol. **1)** $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ (x=3t; y=4t; z=11t)

2) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - 7y + 3z = 0 \end{cases}$ (x=2t; y=-3t; z=5t).

2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli. Iteratsiya usuli.

Nazariy va tadbiqiy matematikaning ko'pgina masalalari birinchi darajali chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Masalan, funksiyaning n-ta nuqtada berilgan qiymatlari yordamida n-tartibli ko'phad bilan interpolyatsiyalash yoki funksiyani o'rta kvadratlar usuli yordamida yaqinlashtirish masalalari birinchi darajali chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

Birinchi darajali chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilishning manbai uzluksiz funksional tenglamalarni chekli ayirmali tenglamalar bilan yaqinlashtirishdir.

Birinchi darajali chiziqli tenglamalar sistemasini yechish asosan ikki usulga, ya'ni aniq va iteratsion usullarga bo'linadi.

Aniq usul - deganda chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq yechimini topish tushniladi.

Iteratsion usullarda chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limiti sifatida topiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish orqali aniqlash usuli, ya'ni Gauss usulini ko'rib chiqamiz.

Bu usul bir necha hisoblash yo'llariga ega. Shulardan biri Gaussning kompleks yo'lidir.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n
\end{cases}
\qquad (2.5)
$$

Endi (2.5) sistemani Gauss usuli bilan yechishga o'taylik. Bu usulning mohiyati shundan iboratki noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib, berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan uchburchak (yoki pog'onasimon) ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi. $a_{11} \neq 0$ deb (2.5) ning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, so'ngra uni $-a_{21}$ ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamaga qo'shamiz.
Keyin $-a_{31}$ ga ko'paytirib, uchinchi tenglamaga qo'shamiz va shu jarayonni davom ettiraversak natijada shunday sistema hosil bo'ladiki, u sistemaning faqat birinchi tenglamasida x_1 qatnashib qolganlarida qatnashmaydi.

Shu jarayonni (2.5) sistemaning qolgan tenglamalariga ketma-ket tadbiq etsak, qo'yidagi ikkita sistemaning bittasiga kelamiz.

$$
\left.
\begin{array}{r}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\
x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_2 = d_m
\end{array}
\right\}
\qquad (2.6)
$$

yoki

$$
\left.
\begin{array}{r}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\
x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_p + \cdots + c_{pn}x_n = d_p \\
p < n
\end{array}
\right\}
\qquad (2.7)
$$

(2.6) sistemaga uchburchak sistema, (2.7) ga esa pog'onali sistema deyiladi.

Agar (2.5) sistema (2.6) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa, u holda (2.5) sistema birgalikda bo'lgan sistema bo'lib yechimi yagona bo'ladi. Agar (2.5) sistema (2.7) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa u holda (2.5) sistema birgalikda bo'lib, yechimi cheksiz ko'p bo'ladi.

Misol 1.

$$
\left.
\begin{array}{r}
2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0 \\
3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18 \\
5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39
\end{array}
\right\}
$$

Yechish. $a_{11} = 2 \neq 0$ bo'lgani uchun birinchi tenglamani 2 ga bo'lamiz.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \frac{7}{2x_2} + \frac{13}{2x_3} = 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39 \end{array}\right\}$$

Bu sistemaning 1-tenglamasini (-3) ga ko'paytirib 2- tenglamaga, (-5) ga ko'paytirib 3- tenglamaga qo'shsak

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \frac{7}{2x_2} + \frac{13}{2x_3} = 0 \\ \frac{7}{2x_2} - \frac{15}{2x_3} = 18 \\ \frac{15}{2x_2} - \frac{33}{2x_3} = 39 \end{array}\right\}$$

Endi $a_{22} = \frac{7}{2} \neq 0$ bo'lgani uchun 2- tenglamani $\frac{7}{2}$ ga bo'lib, so'ngra uni $\frac{15}{2}$ ga ko'paytirib 3- tenglamadan ayirsak:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \frac{7}{2x_2} + \frac{13}{2x_3} = 0 \\ x_2 - \frac{15}{7x_3} = \frac{36}{7} \\ -\frac{3}{7x_3} = \frac{3}{7} \end{array}\right\} \quad x_1 = -4; \ x_2 = 3; \ x_3 = -1;$$

Misol 2. $$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{array}\right\}$$

1-tenglamani (-2) ga ko'paytirib 2- tenglamaga, (-1) ga ko'paytirib 3- tenglamaga qo'shsak

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right\} \quad x_2 = 1 + x_3; \ x_1 = 1 - 2 - 2x_3 + 4x_3 =$$

$2x_3 - 1$.

Shunday qilib x_1=2; x_3-1; $x_2 = 1 + x_3$.

Demak berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan, chunki x_3 ga ihtiyoriy son berib, x_1, x_2 larning cheksiz ko'p qiymatlarini hosil qilamiz.

Misol 2. Ushbu sistema berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

1- tenglama sistemasining 1- tenglamasidan x_1 ni topamiz

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5$$
$$2x_1 = 5 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4$$
$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2x_2} - x_3 + 2x_4$$

1- tenglamadan topilgan x_1 ni 2- tenglamadagi x_1 ni o'rniga qo'yamiz va uni ixchamlaymiz.

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4$$
$$3\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - x_3 + 2x_4\right) + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4$$
$$\frac{15}{2} + \frac{9}{2}x_2 - 3x_3 + 6x_4 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4$$
$$15 + 9x_2 - 6x_3 + 12x_4 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 8$$

$$11x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -7$$

1- tenglamadan topilgan x_1 ni 3- tenglamadagi x_1 ni o'rniga qo'yamiz va uni ixchamlaymiz.

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$$

$$4(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - x_3 + 2x_4) + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$$
$$10 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$$

$$8x_2 - 7x_3 + 9x_3 = -8$$

1-tenglamadan topilgan x_1 ni 4- tenglamadagi x_1 ni o'rniga qo'yamiz va uni ixchamlaymiz.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_2 - x_3 + 2x_4 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$5 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$
$$5x_2 + 6x_4 = -1$$

Topilgan tenglamalardan yangi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -7 \\ 8x_2 - 7x_3 + 9x_4 = -8 \\ 5x_2 + 6x_4 = -1 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) tenglama sistemssining 2-tenglamasidan x_2 ni topamiz

$$11x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -7$$

$$11x_2 = -7 + 10x_3 + 8x_4$$

$$x_2 = -\frac{7}{11} + \frac{10}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4$$

2-tenglamadan topilgan x_2 ni 3- tenglamadagi x_2 o'riniga qo'yamiz va uni ixchamlaymz

$$8x_2 - 7x_3 + 9x_4 = -8$$

$$8(-\frac{7}{11} + \frac{10}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4) - 7x_3 + 9x_4 = -8$$

$$-\frac{56}{11} + \frac{80}{11}x_3 - \frac{64}{11}x_4) - 7x_3 + 9x_4 = -8$$

$$-56 + 80x_3 - 64x_4 - 77x_3 + 99x_4 = -88$$

$$3x_3 + 35x_4 = -32$$

2-tenglamadan topilgan x_2 ni 4-tenglamadagi x_2 o'riniga qo'yamiz va uni ixchamlaymz

$$5x_2 + 6x_4 = -1$$

$$5 - \frac{7}{11} + \frac{10}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4) + 6x_4 = -1$$

$$-\frac{35}{11} + \frac{50}{11}x_3 - \frac{40}{11}x_4 + 66x_4 = -1$$

$$50x_3 + 26x_4 = 24$$

$$25x_3 + 13x_4 = 12$$

Topilgan tenglamalardan yangi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -7 \\ 3x_3 + 35x_4 = -32 \\ 25x_3 + 13x_4 = 12 \end{cases} \qquad (3)$$

(3) tenglama sistemssining 3-tenglamasidan x_3 ni topamiz

$$3x_3 + 35x_4 = -32$$

$$3x_3 = -32 - 35x_4$$

$$x_3 = -\frac{32}{3} - \frac{35}{3}x_4$$

3-tenglamadan topilgan x_3 ni 4-tenglamadagi x_3 o'riniga qo'yamiz va uni ixchamlaymz

$$25x_3 + 13x_4 = 12$$

$$25(-\frac{32}{3} - \frac{35}{3}x_4) + 13x_4 = 12$$

$$-\frac{800}{3} - \frac{875}{3}x_4 + 13x_4 = 12$$

$$-800 - 875x_4 + 13x_4 = 12$$

$$-836x_4 = 836$$

$$[x_4 = -1]$$

Topilgan x_4 tenglama qiymatini 3-tenglamadagi x_4 ni o'rniga qo'yib x_3 ni topamiz

$$x_3 = -\frac{32}{3} - \frac{35}{3}x_4 = -\frac{32}{3} + \frac{35}{3} = 1$$

$[x_3 = 1]$

Topilgan x_4, x_3 tenglama qiymatini 2-tenglamadagi x_3 va x_4 ni o'rniga qo'yib x_2 ni topamiz

$$x_2 = -\frac{7}{11} + \frac{10}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 = -\frac{7}{11} + \frac{10}{11} - \frac{8}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$x_2 = 1]$$

Topilgan x_4, x_3, x_2 tenglama qiymatini 1-tenglamadagi x_2, x_3, x_4 ni o'rniga qo'yib x_1 ni topamiz

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2x_2} - x_3 + 2x_4 = x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1 - 1 - 2 = 2{,}5 + 1{,}5 - 3$$
$$= 4 - 3 = 1$$
$$[x_1 = 1].$$

Demak, topilgan ildizlar $[x_1 = 1]$, $[x_2 = 1]$, $[x_3 = 1]$, $[x_4 = 1]$, berilgan tenglamalar sistemasini to'liq qanoatlantiradi.

Tenglamalar sistemasi qo'lda yechilganda hisoblashlarni 1-jadvalda ko'rsatilgan Gaussning kompakt sxemasi bo'yicha olib borish ma'quldir.

Soddalik uchun jadvalda to'rtta no'malumli to'rtta tenglamalar sistemasini yechish sxemasi keltirilgan.

1-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod hadlar	Σ	Sxema qisimlari
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	**A**
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	
...	...	...	...	...	...	
1	$b_{12}^{(1)}$	$b_{13}^{(1)}$	$b_{14}^{(1)}$	$b_{15}^{(1)}$	$b_{16}^{(1)}$	
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	**A₁**
	...	...	...	...	...	
	1	$b_{23}^{(2)}$	$b_{24}^{(2)}$	$b_{25}^{(2)}$	$b_{25}^{(2)}$	
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	**A₂**
		...	...	...	...	
		1	$b_{34}^{(3)}$	$b_{35}^{(3)}$	$b_{36}^{(3)}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(6)}$	**A₃**
			...	...	...	
			1	$b_{45}^{(4)}$	$b_{46}^{(4)}$	
			1	x_4	x_4	
		1		x_3	x_3	**B**
	1			x_2	x_2	
1				x_1	x_1	

1-jadvalda keltirilgan Gaussning kompakt sxemasi yordamida quyidagi tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2 \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6 \\ 1{,}6x_1 - 0{,}83x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechish jarayoni 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	Σ	**Sxema qisimlari**
2	4,2	1,6	−3	3,2	8	
−0,4	3	−2,4	0	−1,6	−1,4	
1,6	−0,8	1	−1	−1	−0,2	**A**
1	−2	−1	1,5	0	−0,5	
...	...	...	...	...	...	
1	2,1	0,8	−1,5	1,6	4	
	3,84	−2,08	−0,60	−0,96	0,2	
	4,16	0,28	−1,40	3,56	6,6	
	4,1	1,8	−3	1,6	4,5	**A₁**
	...	...	...	...	...	
	1	−0,54166	−0,15625	−0,25	0,05208	
		−2,53331	0,75	−4,6	−6,38331	
		1	2,35937	−2,62500	−4,28644	
		−4,02081	...	...	...	**A₂**
		...	0,29606	1,81581	2,51198	
		1				
			1,16897	4,67603	5,84500	**A₃**
			1	4,00013	5,00013	
		1		3,00009	4,00009	**B**
	1			2,00005	3,00005	
1				1,00002	2,00002	

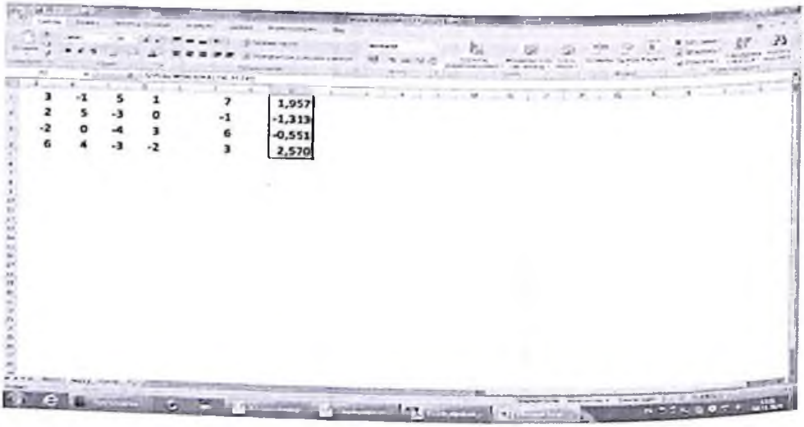
Shunday qilib, quyidagi $x_1 = 1{,}00002$, $x_2 = 2{,}00005$, x_3 =3,00009, x_4=4,00013 taqribiy yechimga ega bo'ldik. Sistemaning aniq yechimi x_1=1, x_2=2, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ ekanligiga bevosita ishonch hosil qilish mumkin.

Tenglamalar sistemasini $AX=B$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda A– noma'lumlar koeffisentlardan tashkil topgan matritsa, B– ozod hadlardan tashkil topgan ustun (vektor), X– noma'lumlar ustuni (vektori).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3 \\ -0{,}4 & 3 & -2{,}4 & 0 \\ 1{,}6 & -0{,}83 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -1{,}6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Demak, $X = A^{-1}B$

Excel elektron jadvali dasturi orqali A matritsani, ya'ni noma'lumlar koeffisentlarini **A1:D4** maydonga, B vektorni, ya'ni ozod hadlarni **F1:F4** maydonga kiritamiz. X vektor uchun **H1:H4** maydonni belgilab **=МУМНОЖ(МОБР(A1:D4);F1:F4)** formulani kiritamiz va **Ctrl+Shift+Enter** tugmalarini birgalikda bosamiz. Natijada **H1:H4** maydonda izlanayotgan noma'lumlar hosil bo'ladi:



Misollar.

1. $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0 \\ 3ax - 6by = ab \end{cases}$ 5. $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} mx - ny = (m-n)^2 \\ 2x - y = n \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2 \quad x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$

Iteratsiya usuli

Bugungi kunda turli tamoyillarga asoslangan juda ko‘plab iteratsion usullar mavjud. Umuman, bu usullarning, o‘ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, yo‘l qo‘yilgan xatoliklari har qadamda to‘g‘rilanib boradi. Aniq usullar bilan ishlayotganda, agar biror qadamda xatoga yo‘l qo‘yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta’sir qiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo‘l qo‘yilgan xatolik esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishga olib keladi xolos. Biror qadamda yo‘l qo‘yilgan xatolik keyingi qadamlarda tuzatilib boriladi. Boz ustiga bu usullarning hisoblash tartibi sodda bo‘lib, ularni EHM larda hisoblash qulaydir. Lekin har bir iteratsion usulning qo‘llanish sohasi chegaralangandir. Chunki iteratsiya jarayoni berilgan tizim uchun uzoqlashishi yoki shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, buning oqibatida amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo‘lmaydi.

Shuning uchun ham iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham bog‘liqdir.

Faraz qilaylik, $Ax = b$ **(2.8)** tizim biror usul bilan $x + Cx + f$ **(2.9)** ko‘rinishga keltirilgan bo‘lsin, bu erda C - qandaydir matritsa, f - vektor ustun. Dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ biror usul bilan (masalan, $x^{(0)} = 0$) topilgan bo‘lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$x(k+1) = Cx(k) + f \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

rekkurent formula yordamida topilsa, bunday usul oddiy iteratsiya usuli deyiladi.

Agarda C matritsa elementlari

$$\sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| \leq a \leq 1 \qquad (i = 1,2 \dots, n) \qquad (2.10)$$

va

$$\sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| \leq \beta \leq 1 \qquad (j = 1,2 \dots, n) \qquad (2.11)$$

shartlardan birortasini qanoatlantirsa, u xolda iteratsion jarayon berilgan tenglamaning x echimiga ixtiyoriy boshlangich $x^{(0)}$ vektorda yaqinlashishi isbotlangan, ya'ni

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$$

Shunday qilib, tizimning aniq echimi cheksiz qadamlar natijasida $k \to \infty$ -hosil qilinadi va hosil qilingan ketma-ketlikning ixtiyoriy vektori taqribiy echimni beradi. Bu taqribiy echimning xatoligini quyidagi formulalardan biri orqali ifodalash mumkin:

$$\left(x_i - x_i^{(k)}\right) \leq \frac{a}{1-a} \max_{j=1,2\dots n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right| \qquad (2.12)$$

Agarda (2.8) shart bajarilsa, yoki

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right| \qquad (2.13)$$

agarda (2.12) shart bajarilsa. Bu baholarni mos ravishda quyidagicha kuchaytirish mumkin:

$$m\left(x_i - x_i^{(k)}\right) \leq \frac{a}{1-a} max \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n} \left|x_i - x_i^{(k)}\right| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|$$

Iteratsion jarayonlarni yuqoridagi baholar oldindan berilgan aniqlikni qanoatlantirganda tugallaydilar.

Boshlangich $x^{(0)}$ vektor, umuman olganda, ixtiyoriy tanlanishi mumkin. Ba'zan $x^{(0)} = f$ deb olishadi. Ammo $x^{(0)}$ vektorning komponentlari sifatida noma'lumlarning qo'pol taxminlarda aniqlangan qiymatlari olinadi.

(2.8) tizimni (2.9) ko'rinishga keltirishni bir necha xil usullarda amalga oshirish mumkin. Faqat (2.10) yoki (2.11) shartlardan birortasining bajarilishi lozim. Shunday usullardan ikkitasiga to'xtalamiz.

"Birinchi usul. Agarda A matritsaning diagonal elementlari noldan farqli bo'lsa, ya'ni $a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\dots,n$ u xolda berilgan tizimni

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{22}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases} \qquad (2.14)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu xolda C matritsa elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \qquad C_{ij} = 0$$

hamda (2.10)va (2.11) shartlar mos ravishda quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq a < 1 \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.15)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \beta < 1 \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.16)$$

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq 1} |a_{ij}| \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.17)$$

shartlartlarni qanoatlantirganda o'rinli bo'ladi.

Misol: Quyidagi sistema oddiy iteratsiya usuli bilan yechisin.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 25x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19 \\ x_2 - x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases}$$

Ychish. Birinchi usulda aytilganidek, bu tizimning tenglamalarini mos ravishda 10, 25, - 20, 10, 20 larga bo'lib, quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5 \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5 \\ x_3 = 0{,}95 + 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_4 - 0{,}15x_5 \\ x_4 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5 \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4 \end{cases}$$

bu erda (2.15) shart bajariladi. Haqiqatdan ham,

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{1j}| = 0{,}3 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5}|C_{2j}| = 0{,}28 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{3j}| = 0{,}41 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5}|C_{4j}| = 0{,}5 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{5j}| = 0{,}3 < 1;$$

Dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ni olib keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)}$$
$$= 0{,}6 - 0{,}1 \cdot 0{,}44 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 1{,}6 = 0{,}881$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04 \cdot 0{,}6 - 0{,}04 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1{,}6 = 0{,}754$$

Shunga o'xshash $x_3^{(1)} = 0{,}892$; $x_4^{(1)} = 1{,}851$; $x_5^{(1)} = 1{,}72$. Hisoblashlarning davomini 3- jadvalda keltiramiz:

3- jadval

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0.881	0,754	0.892	1,851	1,72
2	0.9884	0.9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0.99753	0,99789	1,99364	1.99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0.99986	0,99989	0,99977	1,99976	1.99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0.999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Yuqoridagi 3- jadvaldan ko'ramizki, 8-iteratsiya $x_1 = 0{,}999974;\ x_2 = 0{,}99951;\ x_3 = 0{,}99998;\ x_4 = 2{,}00004;\ x_5 = 1{,}99998$ echimdan iborat. Bu topilgan taqribiy echim aniq echim

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1; \qquad x_4^* = x_5^* = 2$$

dan beshinchi xonaning birliklari bo'yichagina farqlanadi.

2.3. Transendent tenglamalami taqribiy yechish usullari: ikkiga bo'ish, vatar va urunmalar usullari oraliqni ikkiga bo'ish usuli

Faraz qilaylik, $f(x) = 0$ tenglamaning biror ξ ildizi $[a, b]$ kesmada ajratilgan bo'lsin. Kesmaning uzunligi $d = b - a$ deb belgilaylik. Tenglamaning ξ echimi $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikda topilsin. ξ ildiz $[a, b]$ ning ichida bo'lganligi $(a < \xi < b)$ uchun a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz. b ni ortig'i bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar $d \leq 0{,}001$ bo'lsa masala yechilgan hisoblanadi va a hamda b lar $f(x) = 0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikdagi yechimlari bo'ladi. Bu holda taqribiy yechim sifatida a va b lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan $x0\ (a < x0 < b)$ ni olish mumkin. Taqribiy yechim sifatida $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofiq.

Endi faraz qilaylik $d > 0{,}001$ va $[a, b]$ kesmaning o'rtasida $s = \frac{a+b}{2}$ nuqta olingan bo'lsin. U holda $[a, b]$ kesma uzunliklari $(b - a)/2$ ga teng bo'lgan $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan qaysi birining chekka nuqtalarida $f(x)$ funktsiya ishorasini o'zgartirsa, shu kesmani olib qolib keyingisini tashlab yuboramiz. Qolgan kesmaning uzunligi $d1 \leq \varepsilon$ bo'lsa, shu yerda to'xtaymiz. Agar shart bajarilmasa, olib qolingan kesmada yuqoridagi mulohazalarni takrorlaymiz. Ikkiga bo'lish jarayonini kesmaning uzunligi $d_n \leq \varepsilon$ *(n* - ikkiga bo'lishlar soni) bo'lguniga qadar davom ettiramiz.

Misol. $x3 - 4x - 1 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikda yechilsin. Quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**2,1**	**2,2**
$f(x)$ ning ishorasi	+	-	-	-	-	+

Jadvaldan ko'rinyaptiki $[-1; 0]$; $[2{,}1;\ 2{,}2]$ kesmalarda taqribiy yechim (1- teoremaga asosan) bor. Biz uchun qulay kesma $[2{,}1;\ 2{,}21]$. Bunda $f(2{,}1) = -1{,}39 < 0$; $f(2{,}2) = 0{,}850 > 0$. Bizda $a = 2{,}1$; $b = 2{,}2$. Bundan $d = b - a = 0{,}1 > \varepsilon$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$f(2{,}11) = -0{,}046 < 0$; $f(2{,}12) = 0{,}046 > 0$.
Bu yerdan $a = 2{,}11$; $b = 2{,}12$; $d = b - a = 0{,}001 > \varepsilon$
Hisoblashni yana davom ettiramiz:
$f(2{,}114) = -0{,}0085 < 0$; $f(2{,}115) = 0{,}0009 > 0$.
$a = 2{,}114$; $b = 2{,}115$; $d = b - a = 2{,}115 - 2{,}114 = 0{,}001 = \varepsilon$.
Qo'ilgan maqsadga erishdik, ya'ni kesmaning uzunligi d avvaldan berilgan aniqlik ε =0,001 dan katta emas. Bu misolda izlanayoigan taqribiy yechim μ , quyidagi oraliqda boiadi $2{,}114 < \mu < 2{,}115$, ya'ni $2{,}114\ va\ 2{,}115$ lami taqribiy yechim tarzida olish mumkin (μ aniqlik bilan). Amalda bularning o'rta arifmetigi olinsa yechim aniqligi yanada oshadi.

Vatar usuli

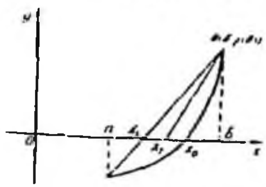
Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishda vatarlar usuli keng qo'lanadigan usullardan biridir.

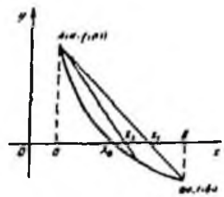
Faraz qilaylik $f(x) = 0$ tenglamaning ildiz $[a,b]$ kesmada ajratilgan va kesmaning chekka nuqtalarida $f(a)f(b) < 0$ boisin. Bundan tashqari birinchi va ikkinchi hosilalari bir xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsin, ya'ni $f(x) \cdot f'(x) > 0$ yoki $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$ (2.1-rasm).

$f(x) = 0$ - tenglamaning aniq yechimi, $f(x)$ funktsiya grafigining Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi $x0$ A va V nuqtalarni to'g'ri chiziq (vatar) bilan tutashtiramiz.

Oliy matematikadan ma'lumki, A va V nuqtalarda (2.2- rasm) o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \qquad (2.18)$$


2.1-rasm


2.2-rasm

O'tkazilgan vatarning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni taqribiy yechim deb qabul qilamiz va uning koordinatasini aniqlaymiz. (2.18) tenglikda $x = x_1, y = 0$ deb hisoblab uni x_1 ga nisbatan yechamiz:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \qquad (2.19)$$

Izlanayotgan yechim x_0 endi $[x_1;b]$ kesmaning ichida. Agar topilgan x_1 yechim bilan qanoatlantirmasa yuqorida aytilgan mulohazalarni $[x_1;b]$ kesma uchun takrorlaymiz va x_2 nuqtaning koordinatini aniqlaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \qquad (2.20)$$

Agar x_2 ildiz ham bizni qanoatlantirmasa, ya'ni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ shart bajarilmasa, x_3 ni hisoblaymiz:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} \qquad (2.21)$$

yoki umumiy holda,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \qquad (2.22)$$

ya'ni hisoblashni $|x_{n+1} - x_n \leq| \varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz.

Yuqorida keitirilgan formulalarni $f(a) > 0;\ f(b) < 0;\ f(x) < 0;\ f'[x) < 0$ uchun ham qollash mumkin.

Misol. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0{,}005$ aniqlikda vatarlar usuli bilan hisoblansin.

Yechish. Ildizlarni ajratsak, $0{,}5 < x < 1{,}5$ ga ega bo'lamiz; bu yerda $f(0{,}5) = -2{,}625 < 0;\ f(1{,}5) = 2{,}600 > 0;\ f'(x) = 3x2 + 2x,\ f''(x) = 6x + 2.$

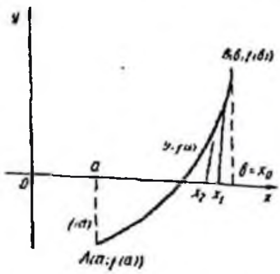
Qidirilayotgan taqribiy ildiz $[0{,}5;\ 1{,}5]$ kesmada ekan. Bu kesmada esa $f(x) > 0;\ f'(x) > 0$. Demak biz taqribiy ildizni (2.19) - (2.22 formulalar yordamida hisoblaymiz. (2.19) dan $x_1 = 1{,}012$ ni, (2.20) dan $x_2 = 1{,}130$ ni; (2.21) dan

$x_3 = 1{,}169$ ni, (2.22) dan $(n = 3)$ $x_3 = 1{,}173$ ni topamiz. Bu erda $|x_4 - x_3| = 1{,}173 - 1{,}169 = 0{,}004 < \varepsilon$. Demak, shart 4- qadamda bajarlldi. Shuning uchun $x_4 = 1{,}173$ yuqoridagi tenglamaning $\varepsilon = 0{,}005$ aniqtikdagi ildizi bo'ladi.

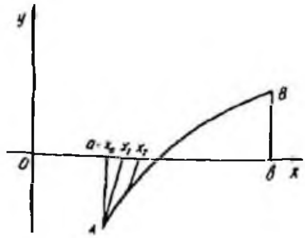
Urinmalar usuli

Urinmalar usulini Nyuton usuli deb ham ataydilar. Bu usulni ham ikki holat uchun ko'rib chiqamiz.

1- holat. Faraz qilaylik, $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f(x) > 0,\ f'(x) > 0$ *yoki* $f(a) > 0,\ f(b) < 0, f(x) < 0,\ f'(x) < 0$ (2.3- rasm.)



2.3-rasm



2.4- rasm

$y = f(x)$ egri chiziqqa V nuqtada urinma o'tkazamiz va urinmaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni aniqlaymiz. Urinmaning tenglamasi quyidagicha:

$y - f(b) = f(b)\,(x - b),$ (2.23)

bu yerda $y = 0, x = x_1$ deb, (2.23) ni x_1 ga nisbatan yechsak,

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (2.24)$$

Shu mulohazani $[a; x_1]$ kesma uchun takrorlab, x_2 ni topamiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2.25)$$

Umuman olganda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.26)$$

Hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ shart bajarilganda to'xtatamiz.

2- holat. Faraz qilaylik, $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f(x) > 0,\ f'(x) < 0$ *yoki* $f(a) > 0,\ f(b) < 0, f(x) < 0,\ f'(x) > 0$ (2.4- rasm). $y=f(x)$ egri chiziqqa A nuqtada urinma o'tkazamiz, uning tenglamasi:

$$y - f(a) = f(a)(x - a) \qquad (2..27)$$

Buda $u = 0, x = x_1$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (2.28)$$

$[x_1; b]$ kesmadan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (2.29)$$

Umuman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.30)$$

(2.7) va (2.11) formulalardan bir-biri bilan solishtirsak, ular birbirlaridan boshiangich yaqinlashishi (a *yoki* b) ni tanlab olish bilan farqlanadilar. Boshiangich yaqinlashishni tanlab olishda quyidagi qoidadan foydalaniladi; boshlang'ich yaqinlashish tarzida $[a; b]$ kesmaning shunday chekka (a *yoki* b) qiymatini olish kerakki, bu nuqtada $f(x)$ funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi hosilasining ishorasi bilan bir xii bo'lsin.

Misol. $x - sinx = 0{,}25$ tenglamaning ildizi $\varepsilon = 0{,}0001$ aniqlikda urinmalar usuli bilan aniqlansin.

Yechi sh. Tenglamaning ildizi [0,982; 1,178] kesmada ajratilgan (buni tekshirishni kitobxonga havola qilamiz); bu yerda $a = 0{,}982$; $b = 1{,}178$; $f(x) = 1 - cosx$; $f'(x) > 0$, ya'ni boshlang'ich yaqinlashishda $x_0 = 1{,}178$.

Hisoblashni (2.24) - (2.26) formulalar vositasida bajaramiz. Hisoblash natijalari quyidagi 4- jadvalda berilgan.

4- jadval

n	x_n	$-sinx_n$	$f(x_n) = x_n - sinx_n - 0,25$	$f(x_n) = 1 - cosx_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	0,92384	0,00416	0,61723	-0,0065
1	1,1715	0,92133	0,00017	0,61123	-0,0002
2	1,17713	-0,92127	0,00003	0,61110	-0,00005
3	1,17125				

Jadvaldan ko'rinadiki $|x_3 - x_2| = |1{,}17125 - 1{,}1713| = 0{,}00005 < \varepsilon$. Demak, yechim deb $x = 1{,}17125$ ni ($\varepsilon = 0{,}0001$ aniqiikda) olish mumkin.

2.2-2.4- rasmlarga diqqat bilan e'tibor qilsak, shuni ko'ramizki, $f(x) = 0$ tenglamaning taqribiy yechimiarini vatarlar va urlnmalar usuli bilan topganda aniq yechimga ikki chekkadan yaqinlashib kelinadi. Shuning uchun ikkala usulni bir vaqtning o'zida qo'llash natijasida maqsadga tezroq erishish mumkin. Bu usulni kombinatsiyalangan usul deb ataydilar. Kombinatsiyalangan usul yuqorida keltirilgan usullarning umumlashmasi bo'lgani tufayli bu to'g'rida ko'p to'xtalmaymiz.

3- §. Matritsa, matritsalar turlari va matritsalar ustida amallar bajarish, matritsa determenantini kompyuterda hisoblash algoritmi

3.1. Matritsalar va ularning turlari

Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko'p qo'llaniladigan tushuncha bo'lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko'rinishda ifodalanadi.

1-ta'rif: m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklidagi $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m \times n$ tartibli ***matritsa,*** uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A, B, C, \ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1{,}2 \\ 0 & 7{,}5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa 2×3 tartibli, ya'ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko'rinishidagi $2 \cdot 3 = 6$ ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{13} = 1{,}2$ va 2-satr elementlari $a_{21} = 0, a_{22} = 7{,}5, a_{23} = -1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11} = 1$ va $a_{21} = 0$, 2-ustuni $a_{12} = -3$ va $a_{22} = 7{,}5$, 3-ustuni esa $a_{13} = 1{,}2$ va $a_{23} = -1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko'rsatishga ehtiyoj bo'lsa, u $A_{m\times n}$ ko'rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ko'rinishda ifodalanadi.

2-ta'rif: $A_{m\times n}$ matritsada $m = n \neq 1$ bo'lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m \neq n$ $(m \neq 1, n \neq 1)$ bo'lsa ***to'g'ri burchakli matritsa***, $m = 1, n \neq 1$ holda ***satr matritsa*** va $m \neq 1, n = 1$ bo'lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

$A_{m\times n}$ kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, xalq xo'jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o'zaro mahsulot ayirboshlash $A_n = (a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, n \; va \; i \neq j)$ i-tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning j-tarmoq uchun mo'ljallangan miqdorini, a_{ii} $(i = 1,2, \dots, n)$ esa i-tarmoqning o'zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $m = 1$ va $n = 1$ bo'lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma'lum bir ma'noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-ta'rif: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa, ular ***teng matritsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi $A = B$ yoki $a_{ij} = b_{ij}$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, ixtiyoriy $a \neq 0$ soni uchun

$$A = \begin{pmatrix} a + a & a - a \\ a : a & a \cdot a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o'zaro teng, ya'ni $A = B$ bo'ladi.

4-ta'rif: $\mathrm{A} = \{a_{ij}\}$ matritsada $i = j$ bo'lgan a_{ii} elementlar ***diagonal elementlar*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan $A_{2\times3}$ matritsaning diagonal elementlari $a_{11} = 1$ va

$a_{22} = 7.5$ bo'ladi.

5-ta'rif: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan ($a_{ij} = 0, i \neq j$) kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$A_{2\times2} = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_{3\times3} = B_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo'ladi.

6-ta'rif: Barcha diagonal elementlari $a_{ij} = 1$ bo'lgan n-tartibli diagonal matritsa n-tartibli birlik matritsa yoki qisqacha ***birlik matritsa*** deyiladi.

Odatda n -tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. **Masalan,**

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir.

7-ta'rif: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij} = 0$) bo'lgan ixtiyoriy $m \times n$ tartibli matritsa ***nol matritsa*** deyiladi. $m\times n$ tartibli nol matritsa $O_{m\times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times3} = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rsatilgan tartibli nol matritsalar bo'ladi.

3.2. Teskari matritsani topish algoritmi

Endi matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-ta'rif: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ matritsaning istalgan λ ***songa ko'paytmasi*** deb $A_{m\times n}=\{\lambda a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

Bunda A matritsaning λ songa ko'paytmasi λA deb belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow 6A=\begin{pmatrix}6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1)\\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}30 & 24 & -6\\ 0 & 12 & 42\end{pmatrix}.$$

9-ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar yig'indisi*** deb elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning yig'indisi $A+B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo'shish orqali hisoblanadi. Masalan,

$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $\quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$,

Matrisalar uchun

$$A+B=\begin{pmatrix}5+1 & 3+0 & -1+1\\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko'paytirish va o'zaro qo'shish amallari quyidagi qonunlarga bo'ysunishi bevosita ularning ta'riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo'shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (qo'shish uchun assotsiativlik qonuni);
III. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (distributivlik qonuni)

Bundan tashqari yuqoridagi ta'riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas:

$$A+O=A,\ A+A=2A,\ 0\cdot A=O,\ \lambda\cdot 0=0.$$

10-ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar ayirmasi*** deb $A_{m\times n}$ va (-1) $B_{m\times n}$ matritsalarning yig'indisiga, ya'ni $A_{m\times n}+(-1)\,B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning ayirmasi $A-B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o'zaro ayirish orqali hisoblanadi. Masalan,

$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $\quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$, Matritsalar uchun

$$A-B=\begin{pmatrix}5-1 & 3-0 & -1-1\\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -2 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

11-ta'rif: $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalarning ko'paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{kj}, \quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$$

Yig'indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{q\times n}=(b_{ij})$ matritsalar uchun $p=q$, ya'ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lgandagina ularning ko'paytmasi mavjud bo'ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko'paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko'paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko'paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish orqali hisoblanadi. Bu - satrni ustunga ko'paytirish qoidasi deb aytiladi. Masalan,

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\qquad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m=3, p=q=2, n=2$ bo'lgani uchun ularning ko'paytirish mumkin va ko'paytma matritsa $AB=C_{3\times 2}$ quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 6+1{,}1 & 3\cdot(-4)+1{,}2\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2\\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun AB ≠ BA , ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko'paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}A_{m\times q}$ ko'paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo'lgan taqdirda, ya'ni $n=m$ holda ham ular teng bo'lishi shart emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun AB ≠ BA, chunki

$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}$, $\quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 33 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

Matritsalar ko'paytmasi va yig'indisi quyidagi qonunlarga bo'ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo'ladi:

I. $A(BC) = (AB)C$, $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ (ko'paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B + C) = AB + AC$ (ko'paytirish va qo'shish amallari

$(A + B)C = AC + BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE = EA = A$, $0 \cdot A = 0, A \cdot O = 0$, $0 \cdot A = 0$.

Bunda E va O mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko'paytmasi ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday n-tartibli A kvadrat matritsani o'ziga - o'zini ko'paytirish mumkin va natijada yana n-tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi.

12-ta'rif: A kvadrat matritsani o'zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko'paytirishnatijasida hosil bo'lgan kvadrat matritsa A ***matritsaning m- darajasi*** deyiladi.
A matritsaning m- darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta'rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m, k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):
1. $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; *2.* $(A^m)^k = A^{mk}$; *3.* $(\lambda A)^m = \lambda^m A^m$; *4.* $E^m = E$; *5.* $O^m = O$.

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko'tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 60 \\ 12 & -47 \end{pmatrix}.$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni

$A^m = 0$ tenglikdan har doim ham $A = 0$ ekanligi kelib chiqmaydi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

14-ta'rif: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^T = A$ bo'lsa, u ***simmetrik matritsa***, $A^T = -A$ bo'lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

Ta'rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij} = a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij} = -a_{ij}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo'ladi.

3.3. Tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish

Quyida $n \times n$ o'lchamli matritsani ko'raylik:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 6 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsa uchun $A \cdot E = E \cdot A = A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya'ni E matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun E ni **birlik matritsa** deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo'lgan quyidagi har qanday $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsa **maxsus matritsa** deb ataladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Aks holda, ya'ni $0 \neq Adet$ bo'lsa, A matritsa **maxsus bo'lmagan matritsa** deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko'rilgan misolga ko'ra

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Matritsa maxsus matritsa, chunki

$$det = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta'rif. Agar $A \cdot B = B \cdot A = E$ munosabat o'rinli bo'lsa, $n \times n$ o'lchamli kvadrat $B = \|b_{ij}\|$ matritsani maxsus bo'lmagan $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsaga **teskari matritsa** deb ataladi. Teskari matritsa $B = \|A^{-1}\|$ ko'rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko'ramiz. Faraz qilaylik, $A = \|a_{ij}\|$ maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsin. Agar $A_{ij} - a_{ij}$ elementning *det A* dagi algebraik to'ldiruvchisi bo'lsa, u holda

$$A^v = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Bmatrix}$$

***A* ga biriktirilgan matritsa** deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$A^vA = AA^v = \det A \cdot E$, bundan $A^{-1} = \frac{1}{detA}A^v$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan **matritsalar usuli** deb ataladi.

Misol. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsiyaga teskari matritsani toping.

Yechish. $det\,A = -4$. Demak, A maxsus bo'lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,\qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9,\qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,\qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,\qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6,$

Shuning uchun

$$A^{v} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}A^{v} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4-§. Matematik modellashtirish jarayonida aniqlanadigan boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish usullari

Differensial tenglama haqida dastlabki ma'lumot

Agar tenglamada noma'lum funktsiya hosila yoki differensial ostida qatnashsa, bunday tenglama differensial tenglama deyiladi.

Agar differentsial tenglamadagi noma'lum funktsiya faqat bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.

Masalan:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\,(1 - 2y);\;\; y' = \frac{x^4}{2};\;\; \frac{dy}{dt} = t^2 - 1;$$

$$\sqrt{2}\,\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 1;\quad xdy = 3dx$$

Agar differensial tenglamadagi noma'lum funktsiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Masalan:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}(1-2y); \quad y' = \frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1;$$
$$\sqrt{2}\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 1; \quad xdy = 3dx.$$

Agar differensial tenglamadagi noma'lum funktsiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = f(x, y, z).$$

Differensial tenglamanlng tartibi deb, shu tenglamada qatnashuvchi hosilaning (differensialning) eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan:

$\frac{dz}{dx} = 5(z-1); \quad (u')^3 = x^2 + 2$

birinchi tartibli tenglamalar,

$$\frac{d^4u}{dx^4} = 5\left(\frac{d^3u}{dy^3} + \frac{d^3u}{dz^3}\right), \quad \frac{d^4t}{dt^4} = 1 - (t+2)$$

esa 4-tartibli differensial tenglamalardir.

n-tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$J(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0, \qquad (4.1)$$

bu erda x - erkli o'zgaruvchi; u - noma'lum funktsiya, $u', u'', \dots, u^{(n)}$ noma'lum funktsiyaning hosilalari.

(4.1) ni ko'p hollarda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \qquad (4.2)$$

(4.2) ning yechimi (yoki integrali) deb uni qanoatlantimvchi shunday $u = \varphi(x)$ funktsiyaga aytiladiki, $\varphi(x)$ ni (4.2) ga qo'yganda, u ayniyatga aylanadi.

Oddiy differensial tengiama yechimining grafigi uning integral egri chizig'i deyiladi.

n-tartibli differensial tenglamaning yechimida p ta erkli o'zgarmas son qatnashadi. Bu o'zgarmas sonlarni o'z ichiga olgan yechim umumiy yechim (umumiy integral) deyiladi. Umumiy yechimning grafik ko'rinishi integral egri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Umumiy yechimda qatnashuvchi erkli o'zgarmaslarning aniq son qiymatlari ma'lum bolsa, umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olish mumkin.

Umumiy yechimga kiruvchi erkli o'zgarmaslar masalaning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi. Bunda masala quyidagicha qo'yiladi: (4.1) differensial tenglamaning shunday yechimi $u = \varphi(x)$ ni topish kerakki, bu yechim erkli o'zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x = x_0$ da quyidagi qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$x = x_0$ da $u = u_0, u' = u'_0, y'' = u''_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0{}^{(n-1)}$ (4.3)

(4.3) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi, $x_0, u_0, u'_0, u''_0, \ldots, u_0{}^{n-1}$ - sonlar esa yechimning boshlang'ich qiymatlari deyiladi. Boshlang'ich shartlar (4.3) yordamida umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olinadi. (4.2) differensial tenglamaning yechimini (4.3) boshlangich shartlar asosida topishga **Qoshi masalasi** deyiladi. Birinchi tartibli differensial tengiama $(p = 1)$ ychun Qoshi masalasi quyidagichadir: boshlang'ich shart $x = x_0$ da $u = u_0$ ni qanoatlantiruvchi $u' = f(x, y)$ differensial tenglamaning yechimi topilsin.

Birinchi tartibli differensial uchun Qoshi masalasining geometrik ma'nosi shundaki, umumiy yechimdan (egri chiziqlar dastasidan) koordinatalari $x = x_0$ $u = u_0$ bo'lgan nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziq ajratib olinadi.

Misol, $\frac{dy}{dx} = 2x$ tenglamani $x_0 = 1$ da $y_0 = 2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish. $dy = 2xdx$. Bundan $u = x^2 + c$. Bu yechim parabolalar dastasinl ifodalaydi. Boshlang'ich shartdan foydalansak, $2 = 1 + c;\ c = 1$.

Demak, xususiy yechim $u = x^2 + 1$. bo'iadi. Ya'ni parabolalar dastasidan (umumiy yechimdan) $M_0\ (1;\ 2)$ nuqtadan o'tuvchi parabola ajratib olindi.

Agar $f(x, u)$ biror $R_{|a,b|} = \{|x - x_0| < a;\ \ |u - u_0| < b\ \}$ sohada uzluksiz
bo lib, shu sohada Lipshis sharti

$$f|x, \bar{y} - f(x, y)| \leq N|\overline{\bar{y} + y}|$$

bajarilsa, u holda Qoshi masalasi $u(x_0) = u_0$ shartni bajaruvchi yagona yechimga egadir (bunda N - Lipshis doimiysi).

Differensial tenglamalarni aniq yechimini topish juda kamdan-kam hollardagina mumkin bo'iadi. Amaliyotda uchraydigan ko'pdan ko'p masalalarda aniq. Yechimni topishning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun differensial tenglamalarni yechishda taqribiy usullar muhim rol o'ynaydi. Bu usullar yechimlar qay tarzda ifodalanishlariga qarab quyidagi guruhlarga bo'linadilar:

1. Analitik usullar. Bu taqribiy usullarda yechim analitik (formula) ko'rinishda chiqadi.

2. Grafik usullar. Bu hollarda yechimlar grafik ko'rinishlarda ifodalanadi.

3. Raqamli usullar. Bunda yechim jadval ko'rinishida olinadi. Hisoblash matematikasida mazkur uch guruhga kiruvchi bir qancha usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan muayyan kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini yechishda shularni hisobga oigan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo'iadi.

4.1. Boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamani yechish Eyler usuli

Amaliy masalalarni yechishda yechimlarni formula ko'rinishida emas, balki jadval ko'rinishida olish qulay bo'ladi. Differensial tenglamalarni raqamli usullar bilan yechganda yechimlar jadval ko'rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan Eyler usulni ko'rib chiqamiz.

Quyidagi

$$y = f(x, u) \tag{4.4}$$

birinchi tartlbli differensial tenglamaning $[a, b]$ kesmada boshlang'ich shart $x = x_0$ bo'lgan hol uchun $u = u_0$ ni qanoatlantiruvchi yechimi topilishi lozim bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $x_0, x_1\ x_2, \dots, x_p$ nuqtalar bilan p ta teng bo'lakchalarga ajratamiz; bunda

$$x_1 = x_0 + ih\ (i = 0,1,2, \dots, n),\ \ h = \frac{b-a}{n}\quad \text{qadam.}$$

(4.4) tenglamani $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lgan biror $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada integrallasak,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x)|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

ya'ni

$$y(x_{k+1}) = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\, dx. \tag{4.5}$$

Bu yerda integral ostidagi funktsiyani $x - x_k$ nuqtada boshlangich o'zgarmas qiymatiga teng deb qabul qilinsa, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx = f(x_k, y_k)x|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y_k \cdot h$$

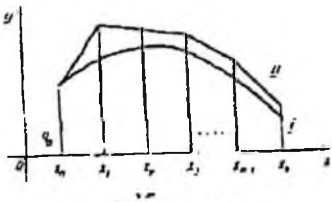
U holda (4.5) dan

$$y_{k+1} = y_k + y_k h \tag{4.6}$$

$y_{k+1} - y_k = +\Delta y_k$ ya'ni $y_k h = \Delta y_k$ deb belgilasak,

$$y_{k+1} = \Delta y_k \quad (4.7)$$

Ushbu jarayonni $[a, b]$ ga tegishli bo'lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (4.4) ning yechimini itodalovchi jadvalini tuzamiz. Eyler usulining geometrik ma'nosi shundayki, bunda (4.4) ning yechimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (4.1.-rasm). Eyler usulini differensial tenglamalar tizimini yechishda ham qo'llash mumkin.



4.1. - rasm.

Quyidai tizim

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (4.8)$$

uchun

$$x = x_0 \; da \;\; u = u_0, z = z_0 \quad (4.9)$$

boshlanglch shart berilgan. (4.8) ning taqribiy yechimlari quyidagl formulalar orqali topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

bu yerda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i); \quad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i); \quad (i = 0,1,2, \ldots$$

Misol. $u' = u - x$ tenglamaning yechimi [0; 1,5] kesma uchun Eyier usuli bilan topilsin. Boshlang'ich shart $x_0 = 0$; $u_0 = 1,5$; qadam 0,25.

Yechish. Quyidagi 4.1. -jadvalni tuzamiz.

4.1. –jadval

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy'_i$
1	2	3	4	5
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4702		

Bu jadvalni quyidagicha tuzamiz:

I. Boshlang'ich shart sifatida 2- va 3-ustunlarning 1-satrini yozamiz.
II. $u_i' = u_i - x_i$ tenglamadan u_i', $(i = 0,1,2,\dots,5)$ ni topamiz va uni (4) ustunning 1-satriga yozamiz.
III. 4-ustunning qiymatini h ga ko'paytirib ($\Delta u_i = hu_i'$, $i = 1,2\dots,5$ ni hisoblab), natijani 5-ustunga yozamiz.
IV. 3-ustundagi qiymatni 5-ustundagi qiymatga (satrlarni moslab) qo'shib $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, ni hisoblaymiz va natijani 3-ustunning keyingi satriga yozamiz. Bu jarayonni $[0;\ 1,5]$ kesmadagi hamma nuqtalar uchun takrorlaymiz.

4.2. Chegaraviy shartli oddiy differensial tenglamalarni yechish Runge-Kutta usuli

Runge-Kutta usuli ko'p jihatdan Eyier usuliga o'xshash, ammo aniqlik darajasi Eyier usuliga nisbatan yuqori bo'lgan usullardan biridir. Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish juda qulay. Chunki, bu usul orqali noma'lum funktsiyaning x_{i+1} dagi qiymatini topish uchun uning x_i dagi qiymati aniq bo'lishi yetarlidir.
Runge-Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko'ra bir necha turlarga bo'linadi. Shulardan amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigani to'rtinchi darajali aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir.

Birinchi tartibli $u = f(x,u)$ differensial tenglama uchun $x = x_i$, $(i = 0,1,2,\dots,p)$ $u = u_i$ ma'lum bo'lsin. Bu yerda y, boshlang'ich shart ma'nosida bo'lmasligi ham mumkin. Noma'lum funktsiya u ning $x = x_{i+1}$, dagi qlymati $y_{i+1} = y_{i+1}(x)$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim boladi:

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = hf_i(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} = hf_i\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + K_1^{(i)}/2\right), \\ K_3^{(i)} = hf_i\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + K_2^{(i)}/2\right), \\ K_4^{(i)} = hf_i'\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right). \end{cases} \tag{4.10}$$

Funktsiyaning orttirmasi Δy, quyidagi formuladan topiladi:

$$\Delta y_i = \left(\frac{1}{6}\right)\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right), \tag{4.11}$$

bu yerda $h = (b - a)/p$ - integrallash qadami. Tenglamaning yechimi qidirilayotgan $[a,b]$ kesma $x_i = x_0 + ih$ (i=0,1,2,...,p) nuqtalar bilan o'zaro teng p ta bo'lakka bo'lingan. i ning har bir qiymati uchun (4.10) va

(4.11) dagi amallami bajaramiz va noma'lum funktsiya u ning qiymatlarini (tenglamaning yechimini) quyidagi formuladan topamiz:

$$x_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (i = 0,1,2,\dots,n) \qquad (4.12)$$

Runge-Kutta usuli bilan differensial tenglamani yechishda jadval tuzilsa hisoblash jarayoni birmuncha aniqlashadi. Jadvalni tuzish tartibi quyidagicha:

I. 2- va 3-ustunlarga x va u ning kerak bo'lgan qiymatlari yoziladi.

II. x va u larning qiymatlarini (2- va 3-ustunlardan) $u' = f(x,u)$ tenglamaning o'ng tarafiga qo'yiiadi va natijalarni 4-ustunga (satrlarni mos keltirib) qo'yiladi.

III. Topilgan $f(x,u)$ qiymatlarni integrallash qadami h ga ko'paytiriladi va natijalar 5-ustunqa yoziladi.

IV. $K_1^{(0)}$ ni 1 ga, $K_2^{(0)}$ va $K_3^{(0)}$ larni 2 ga, $K_4^{(0)}$ ni 1 ga ko'paytirib ularni 6-ustunga yozamiz.

I-IV jarayonni K_2 ning $(i = 0,1,2,..,p)$ har bir qiymati uchun takrorlaymiz. 6-ustundagi qiymatlarning yig'indisini hisoblab, natijani 6 ga bo'lamiz va $\Delta u = K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4)$ ni topamiz. Va nihoyat, $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ topiladi. Yuqorida keltirilgan hisoblash tartibini $[a,b]$ kesmaning barcha nuqtalari uchun takrorlaymiz.

Jadval quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

	x	y	$y' = f(x,y)$	$k=hf(x,y)$	Δy
1	2	3	4	5	6
	x_0	y_0	$f(x_0,y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2};\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2};\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0+h;\ y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_3^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$

	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2};\ y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2};\ y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	$x_1 + h$	$y_1 + k_3^{(1)}$	$f(x_1 + h;\ y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_1$
	x_2	$y_1 = y_1 + \Delta y_1$			

4.3. Nyuton va Lagranj interpolatsiya usullari

Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funktsiyalami yana biror muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funktsiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Funrtsiyalarni yagirilashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo'llamladigan qismi-funktsiyalami interpolyatsjyalash.

Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik $y = f(x)$ funktsiya jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin:

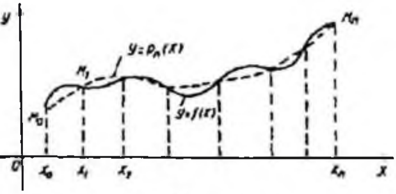
$$Y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Odatda interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha ko'rinishda qo'yiladi: Shunday n- tartiblidan oshmagan $P(x) = P_n(x)$ ko'phad topish kerakki, $P(x_i)$ berilgan x_i $(i = 0,1,..,n)$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin, ya'ni $P(x_i = y_i)$.

Bu masalaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: darajasi n dan ortmaydigan shunday

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \tag{4.13}$$

ko'phad qurilsinki, uning grafigi berilgan $M(x_i, y_i)$ $(i = 0.1, \dots, n)$ nuqtalardan o'tsin (4.2.- rasm). Bu yerdagi x_i $(i = 0,1,2, \dots, n)$ nuqtalar interpolyatsiya tugun nuqtalari yoki tugunlar deyiladi. $R(x)$ esa interpolyatsiyalovchi funktsiya deyiladi.



4.2.- rasm

Amalda topilgan $R(x)$ interpolyatsion formula $f(x)$ funktsiyaning berilgan x argumentning (interpolyatsiya tugunlaridan farqli) qiymatlarini hisoblash uchun qo'llaniladi. Ushbu operatsiya funкtsiyani interpolyatsiyalash deyiladi. (Agar $x\epsilon(a,b)$ bo'lsa interpolyatsiyalash $x \overline{\in} [a,b]$ bo'lsa, eкstrapolyatsiyalash deyiladi).

Nyuton interpolatsiya usuli

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funktsiya uchun $y_i = f(x)$ qiymatlar berilgan va interpolyatsiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan bo'lsin, ya'ni $x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,2,\dots,h)$ (h - interpolyatsiya qadami). Argumentning mos qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan mos qiymatlar oladigan ko'phad tuzish lozim bo'lsin va bu ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +, \dots, +$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (4.14)$$

Bu n- tartibli ko'phad. Interpolyatsiya masalasidagi shartga ko'ra $P_n(x)$ ko'phad $x_0, x_u, \dots, x_n$ interpolyasiya tugunlarida $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, P_n(x_2) = y_0, \dots P_n(x_n) = y_n$ qiymatlarni qabul qiladi, $x = x_0$ deb tasavvur etsak, (4.14) formuladan $y_0 = P_n(x_0) = a_0$, ya'ni $a_0 = u_0$, so'ngra x ga x_1 va x_2 laming qiymatlarini berib, ketma-ket quyidagiga ega bo'lamiz:

$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$, bundan $a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$,

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

ya'ni

$$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 a_2$$

yoki

$y_2 - 2y_1 + y_0 = 2h^2 a_2$, bundan $a_2 = \frac{\Delta^n y_0}{2!h^2}$.

Bu jarayonni davom ettirib, $x = x_n$ uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}.$$

Topilgan $a_0, a_1\, a_2, \dots, a_n$ koeffitsientlarning qiymatlarini (4.14) formuiaga qo'ysak,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_1) + \dots +$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!y^n}(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \qquad (4.15)$$

ko'rinishga ega bolamiz. Bu formulada $\frac{x-x_0}{h} = q$, ya'ni $x = x_0 + h_q$ belgilash kiritilsa, u holda

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = q - 2, \qquad va\ h.k.$$

Natijada Nyutonning 1- interpolyatsion formulasiga ega bo'lamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + q_n) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots +$$

$$+\frac{q(q-1)\cdot\dots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.16)$$

Nyutonning 1- interpolyatsion formulasini $[a.b]$ ning boshlangich nuqtalarida qo'llash qulay.

Agar $n = 1$ bo'lsa, u holda $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ ko'rinishdagi chiziqli interpolyatsion formulaga, $n = 2$ bo'lganda esa

$$P_{2(x)} = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

ko'rinishdagi parabolik interpolyatsion formulaga ega bo'lamiz.

Nyutonning 1- formuiasini *oldinga qarab inierpolyatsiyalash formulasi*
ham deyiladi.

(4.16) formulaning qoldiq hadi (4.17)

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

bu yerda $\xi \epsilon [x_0, x_n]$.

Funktsiyaning analitik ko'rinishi har doim ham ma'lum bo'lavermaydi. Bunday hollarda chekli ayirmalar tuzilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. U holda Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik (4.18)

$$R_n(x) = \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)} y_0$$

formula orqali topiladi.

Misol. $y = lgx$ funktsiyaning 4.3.-jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib uning $x = 1001$ bo'lgan holdagi qiymatini toping.

4.3. - jadval

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
1000	3.0000000	43214	-426	8
1010	3,0043214	42788	-418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	-401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Yechish. Chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz. 4.3- jadvaldan ko'rinib turibdiki, 3- tartibli chekli ayirma o'zgarmas, shu sababli (4.16) formula uchun n=3 olish yetarli:

$$y(x) = P^3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0,$$

$x = 1001$uchun $q = 0{,}1(h = 10)$. Shuning uchun

$$lg1001 = 3{,}0000000 + 0{,}1 \cdot 0{,}0043214 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{2} \times$$
$$\times 0{,}0000426 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{6} \cdot 0{,}0000008 = 3{,}0004341.$$

Endi qoldiq hadni baholaymiz. (4.17) formulaga asosan n=3 bo'lganda quyidagiga egamiz:

$$R_3(x) = \frac{h^4 \cdot q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

bu yerda $1000 < \xi < 1030$.

$f(x) = lgx$ bo‘lgani sababli $f^{(4)}(x) = \frac{3!}{x^4} lge$, shuning uchun

$$|f^{(4)}(\xi)| < \frac{3!}{(1000^4)} lge.$$

$h = 10$ va $q = 0{,}1$ uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$|R_3(1001)| < \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}9 \cdot 10^4 lge}{4 \cdot (1000)^4} = 0{,}5 \cdot 10^{-9}.$$

Shunday qilib, qoldiq had $R_3(1001) = 0{,}5 - 10^{-9}$ ekan.

Lagranjning interpolyatsion usuli

Topilishi lozim bo‘lgan ko'phadning ko'rinishini quyidagicha olaylik:

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad (4.19)$$

bu yerda a_i $(i = 0, 1,2, \dots, n)$ - noma'lum o'zgarmas koeffitsientlar.
Shartga ko'ra $L_n(x)$ funktsiya $x_0, x_1, \dots, x_n$ interpolyatsiyalash tugunlarida $L_n(x_0) = y_0, L_n(x_1) = y_1, \dots, L_n(x_n) = q_n$, qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan holda (4.19) dan quyidagilarni topish mumkin:

x_0 interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$$

va nihoyat x_n interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n.$$

Ushbu ifodalarni tenglamalar tizimi ko'rinishida yozsak:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots a_nx_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1n_n + a_2x_n^2 + \cdots a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \qquad (4.20)$$

bu yerda x_i, va y_i $(i = 0,1,2, \dots, n)$ - berilgan funktsiyaning jadval qiymatlari.

Bu tizimning determinanti

$$\begin{vmatrix} x_0x_0^2x_0^3 \dots x_0^n \\ x_1x_1^2x_1^3 \dots x_1^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_nx_n^2x_n^3 \dots x_n^n \end{vmatrix}$$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlar ustma-ust tushmagan holda noldan farqli bo'ladi. Masala mazmunidan ravshanki, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalar birbiridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (4.20) tizim va shu bilan birga qo'yilgan interpolyatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu tizimni yechib, $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni topib (4.19) ga qo'ysak, $Ln(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $Ln(x)$ ning oshkor ko'rinishinl topish uchun boshqacha yo'l tutamiz. Avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_i(x)$ larni, ya'ni

$$Q_i(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, agar\ i \neq j\ bo'lganda, \\ 1, agar\ i = j\ bo'lganda \end{cases} \qquad (4.21)$$

shartlami qanoatlantiradigan n- darajali ko'phadlami qo'ramiz.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_iQ_i(x) \qquad (4.22)$$

izlanayotgan interpolyatsion ko'phad bo'ladi. (4.21) shartni qanoatlantiruvchi
ko'phad

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \quad (4.23)$$

ko'rinishda bo'ladi. (4.23) ni (4.22) ga qo'ysak,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \cdot y_i \quad (4.24)$$

ko'rinishdagi Lagranj interpolyatsion formulasiga ega bo'lamiz.

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik: n=1 bo'lganda Lagranj ko'phad uchta ikki nuqtadan o'tuvchi to'gri chiziq tenglamasini beradi:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_1-x_0}y_0 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_i.$$

Agar n=2 bo'lsa, u holda kvadratik interpolyatsion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qga ega bo'lgan parabolani aniqlaydi:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Lagranj interpolyatsion formulasining boshqa ko'rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ko'phadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$W'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{i \neq k}(x-x_i)\right].$$

Kvadrat qavs ichidagi ifoda $x = x_i$ va $k \neq j$ bo'lganda nolga aylanadi, chunki $(x_j - x_i)$ ko'paytuvchi qatnashadi. Demak,

$$W'_{n+1}(x_j) = \prod_{i \neq j}(x_j - x_i)$$

Shuning uchun ham,

$\prod_{i \neq j} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ Lagranj koeffitsientini

$$\frac{W_{n+1}(x)}{W'_{n+1}(x_i)(x-x_j)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda esa Lagranj ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)W_{n+1}(x)}{W_{n+1}(x_j)(x - x_j)} \qquad (4.25)$$

Endi tugunlar bir xil uzoqlikda joylashgan $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$ xususiy holni ko'ramiz.

Bu holda soddalik uchun $x=x_0+th$ almashtirishni bajaramiz, u holda $x - x_j = h(t - j), W_{n+1}^{*}(x) = h^{n+1}W_{n+1}^{*}(t)$.

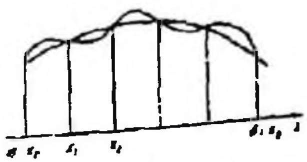
Bu yerda

$W_{n+1}^{*}(t) = t(t-1)\dots(t-n)$, $W_{n+1}^{*}(x_j) = (-1)j!\,(h-j)!\,h^n$

Bo'lib, (4.25) Lagranj interpolyatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$L_n(x + th) = W_{n+1}^{*}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}f(x_j)}{(t-1)j!\,(n-j)!} \qquad (4.26)$$

Endi Lagranj interpolyatsion formulasining qoldiq hadini baholashni ko'ramiz. Agar biror $[a,b]$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyani $Ln(x)$ interpolyatsion ko'phad bilan almashtirsak, ular interpolyatsiya tugunlarida o'zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa bir-biridan farq qiladi (4.3. - rasm). Shuning uchun qoldiq hadning $R(x) = f(x) - L_n(x)$ ko'rinishini topish va uni baholash bilan shug'ullanish maqsadga muvofiq. Buning uchun interpolyatsiya tugunianni o'z ichiga oladigan $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funktsiya $(n+1)$ - tariibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz qilamiz. Interpolyatsiyaning qoldiq hadi $R(x)$ uchun quyidagi teorema o'rinlidir:



4.3. -rasm

Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda $(n+1)$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega boisa, u holda interpolyatsiya qoldiq hadini

$$f(x) - L_n(x) = R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{W_{n+1}(x)}{(n+1)!} \qquad (4.27)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\xi \in [a,b]$ bo'lib, umuman aytganda x ning funksiyasidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun yordamchi $\varphi(z) = R(z) - KW_{n+1}(z)$ funksiyani tekshiramiz (bu yerda K noma'lum o'zgarmas koyffitsiyent). Bu funksiyaning $z = x_0, x_1, \dots, x_n$ larda nol qiymatlarini qabul qilishi ravshan. Noma'lum K koeffitsientni shunday tanlaymizki, $\varphi(z)$ funksiya $z = x \in [a,b]$ va $x = x_i(i = \overline{0,n})$ nuqtalarda nol qiymatini qabul qilsin. Demak,

$$K = \frac{R(x)}{W_{n+1}(x)}. \qquad (4.28)$$

Natijada $\varphi(z)$ funktsiya $[a,b]$ oraiiqning $n+2$ ta $x_0, x_l, \dots, x_n$ nuqtalarida nolga aylanadi. Roll teoremasiga ko'ra $\varphi'(z)$ bu oraliqda kamida $n+1$ ta nuqtada nolga aylanadi, $\varphi''(z)$esa kamida n ta nuqtada va hokazo, $\varphi^{n+1}(z)$ kamida bitta nuqtada nolga aylanadi. Aytaylik, bu nuqta ξ bolsin: $\varphi^{n+1}(\xi) = 0$.

Bundan $L_n(x)$ ning n- darajali ko'phad ekanligini hisobga olsak:

$$\varphi^{n+1}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{n+1}(\xi) - KW_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$$
$$= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

ya'ni

$$K = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Bundan va (4.28) dan, (4.27) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol. Agar $l_n 100, l_n 101, l_n 102, l_n 103$ laming qiymatlari ma'lum bo'lsa, Lagranjning interpolyatsion formulasi yordamida $l_n 100{,}5$ ni qanday aniqlikda hisoblash mumkin?

Yechlsh. Lagranj interpolyatsion formulasining qoldiq hadi, agar $n = 3$ bo'lsa, quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Bizning holda x_0=100, x_1=101, x_2=102, x_3=103, x=100,5;

100<ξ<100,5. Chunki $f(x)$=lnx u holda$f^{(4)}(x) = \frac{6}{x^4}$. Shunday qilib,

$|R(100{,}5)| \leq \frac{6}{(100^4 \cdot 4!)} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 0{,}23 \cdot 10^{-8}$.

5- §. Chegaraviy shartli oddiy differensial tenglamalarni yechish uchun oddiy progonka va differensial progonka usullari

5.1. Matematik modellashtirishda jarayonlarni chegaraviy shartli differensial tenglamalar ko‘rinishida ifodalanishi va ularning sonli yechimini topishda oddiy progonka va differensial progonka usullari

Chekli ayirmalar usulining asosiy g‘oyasiga ko‘ra biror muhitda berilgan funksiya to‘r vektor bilan ifodalanadi, differensial operatorlar esa hech bo‘lmaganda fazoviy o‘zgaruvchilar va vaqt bo‘yicha to‘rlarda ularning ayirmali analoglarini approksimatsiyalaydi. Vaqt bo‘yicha masalalarda EHMning real vaqtiga to‘g‘ri keluvchi yechimni olishga majburmiz va vaqt bo‘yicha hosilalarni hisoblash oson kechmaydi, chunki yangi vaqt momentiga to‘g‘ri keluvchi yechim noma’lum. Shuning uchun vaqtdga bog‘liq hadlarni o‘z ichiga olgan masalalarda vaqt to‘rlarida integrallash operatsiyasini bajarish maxsus ta’riflarni talab qiladi. Biz bu yerda vaqt bo‘yicha masalani qaraganimizda bitta nuqtada berilgan chegaraviy shartli masalalarni tushunamiz. Shuning uchun real vaqt momentida yechiladigan masalalarning o‘ziga xos jihatlari va muhim ahamiyati mavjud.

Har qanday mexanik, fizik masala albatta boshlang‘ich shartlar bilan beriladi va u fundamental ahamiyatga ega. Real masalaning o‘zi matematik modellashtirish jarayonida oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalarga yoki tenglamalar sistemasiga olib kelinadi. Quyida xususiy hosilali differensial tenglamalarga olib kelinadigan ba’zi jarayonlarini qaraylik.

Faraz qilaylik, biror tizimning holati $u(r,t)$ vektor bilan berilgan $R = R(r)$ fazoning berilgan sohasida ifodalansin. $t = 0$ vaqt momentida $u = x_0$ boshlang‘ich miqdor va R sohaning Σ sirtida t vaqtning barcha qiymatlari uchun u vektorning qiymatlari ma’lum. R sohaning barcha ichki nuqtalarida t vaqtning barcha qiymatlari uchun u vektorni aniqlash talab etilsin. Tizimning bunday holatini berilgan boshlang‘ich qiymatlarga asoslanib

$$\frac{du}{dt} = L_u$$

tenglamani yechish orqali topish mumkin, bu yerda L – oddiy differensial tenglamalar uchun algebraik, xususiy hosilali tenglamalar uchun esa fazoviy differensial operator. Agar u muhitning fazoviy holatidagi to‘r vektor holatini ifodalasa, u holda L ayirmali operatorlardan iborat.

Gidrodinamik jarayonga kelsak, bu yopiq tenglamalar sistemasi orqali ham barqaror (vaqt bo'yicha xususiy hosilalar nolga teng), ham nobarqaror ideal issiqlik o'tkazmaydigan suyuqliklarning oqishini, hamda suyuqlikning har xil sharoitda har xil jismlar atrofidan aylanib oqishini ifodalash mumkin. Bu tenglamalar sistemasining yechimlari to'plami juda keng. Qo'yilgan masalaning shartlaridan kelib chiqib, kerakli yechimni tanlashga imkon beruvchi shartlarni (chegaraviy va boshlang'ich shartlarni) qo'ya bilish kerak, ya'ni chegaraviy masala tuziladi.

Boshlang'ich holatda muhitning $t = 0$ vaqt momentidagi ba'zi parametrlari (masalan, ko'chishlari, tezliklari, zichligi, gidrodinamik bosimlari qiymatlari) maydoni beriladi (ko'pincha muhit tinch holatda turibdi, deb ham faraz qilinadi).

Xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarning muhim tashkil etuvchilaridan biri bu tenglamalarning o'zidan tashqari ularga mos qo'shimcha shartlardir. Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun erkli o'zgaruvchi t vaqtga nisbatan muhit yoki sistemaning boshlang'ich holatini ifodalovchi boshlang'ich shartlar kiritiladi. x, y, z koordinatalar bo'yicha esa chegaraviy shartlar kiritiladi. Issiqlik jarayonlari masalalarida, masalan ular muhit tadqiqot sohasining chegaralaridagi temperatura taqsimotini tavsiflaydi. Elliptik tenglamali masalalarda esa t vaqt qatnashmaydi, unda faqat x, y, z koordinatalar bo'yicha chegaraviy shartlar kiritiladi, masalaning o'zi esa chegaraviy masala deb ataladi.

Agar chegaraviy shart u funksiyaning chegaradagi taqsimotini ifodalasa, u holda bu shart Dirixle sharti deb ataladi. Hisob sohasining chegarasida hosila bilan ifodalanuvchi ushbu shart bilan yozilsa, u holda bu shart Neyman sharti deb ataladi, bu yerdan – tadqiqot sohasi chegarasiga qo'yilgan birlik normal. Agar chegaraviy shart yuqoridagi ikkala chegaraviy shartlar kombinatsiyasidan tuzilgan bo'lsa, u holda bu aralash chegaraviy shart deb ataladi.

Amaliyotda bunday chegaraviy masalalarni yechishning ko'pgina usullari mavjud, masalan, xarakteristikalar usuli, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, manbalar usuli, taqribiy hisob usullari. Ana shu usullardan taqribiy hisob usullariga kiruvchi chekli ayirmalar usuli bilan bir necha chegaraviy masalalarni yechish ushbu ishda o'rganilgan. Chekli ayirmalar usulining asosiy g'oyasi bu xususiy hosilali differensial tenglamani unga mos chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga aylantirishdan iborat. Bu sistemaning yechimi izlanayotgan $u(x, y, z, t)$ funksiya uchun taqribiy yechimni beradi.

Bu usulning asosiy bosqichlari quyidagicha:

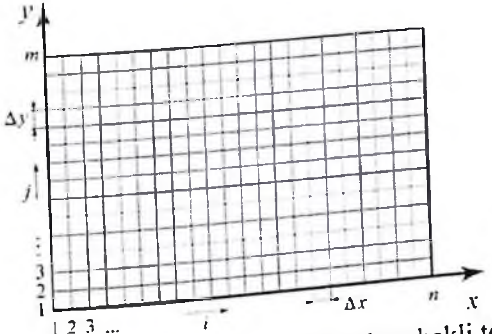
1) O‘rganilayotgan sohani yoki uning biror elementini qoplovchi to‘rni tuzish.

2) Hosil qilingan to‘rda dastlabki xususiy hosilali differensial tenglamaga va uning qo‘chimcha shartlariga mos chekli-ayirmali approksimatsiya qurish.

3) Tuzilgan chekli-ayirmali approksimatsiya asosida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tuzish va uni yechish.

Ushbu bosqichlarni ikki o‘lchovli masala misolida qarab chiqamiz.

To‘rni qurish. To‘rni tuzish masalaning geometriyasini hisobga olish bilan amalga oshiriladi. Tadqiqot sohasi ko‘pgina amaliy masalalarda to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida bo‘lib, unga mos dekart koordinatalar sistemasini o‘rnatib, unda to‘g‘ri to‘rtburchakli to‘rni hosil qilishimiz mumkin. To‘g‘ri to‘rtburchakli plastinka misolida qurilgan ana shunday ikki o‘lchovli to‘r 1.-rasmda tasvirlangan



1-rasm. Ikki o‘lchovli to‘g‘ri to‘rtburchakli to‘r.

Chekli ayirmalar usulida boshqa ko‘rininshdagi to‘rlar ham ishlatilishi mumkin, masalan qiyshiq burchakli, qutb koordinatalari shaklidagi to‘r. Bu qo‘yilgan masalaning tadqiqot sohasi qaysi koordinat sistemasiga nisbatan mos kelishiga qarab tanlanadi, masalan, bosh o‘qqa nisbatan simmetrik masalada qutb to‘ridan foydalaniladi.

Masala yechimini topish jarayoni to‘rning tugunlariga, ya’ni uning chiziqlari kesishish nuqtalariga tayanib olib boriladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalardagi hosilalarni chekli-ayirmali approksimatsiyalash bu hosilalarni shu to‘rda uni taqribiy analogiga almashtirishdan iborat. Masalan, x_i, y_i nuqtada ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} [u(x + \Delta x) - u(x)]/\Delta x$$

xususiy hosilani uning taqribiy bo‘lgan va “o‘ng hosila” deb ataluvchi quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{o'ng}=\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$$

yoki “chap hosila” deb ataluvchi quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{chap}=\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}=\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$$

taqribiy qiymatiga almashtira olamiz, bu yerda Δu va Δx – funksiya va argument orttirmasi; x_i, u_i va x_{i+1}, u_{i+1} argument va funktsiyaning i va $i+1$ tugunlardagi qiymatlari; Δx – to‘rning x koordinata bo‘yicha qadami.

Xuddi shunday x koordinata bo‘yicha ikkinchi tartibli xususiy hosila uchun ham mos ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\approx\frac{\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{o'ng}-\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{chap}}{\Delta x}=\frac{\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right)-\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$
$$=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

chekli-ayirmali approksimatsiyani olishimiz mumkin.

Hosil qilingan ifodalarda hosilaga nisbatan Δu va Δx larning cheksiz kichik emas, balki kichik qiymatlaridan foydalanildi. Shuning uchun ham bu usul chekli ayirmalar usuli deb ataladi. Qolgan y, z, t erkli o‘zgaruvchilarga nisbatan hosilalarning mos chekli ayirmali formulalari chiqariladi.

6- §. Chegaraviy shartli oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun chekli ayirmalar usuli

6.1. Chegaraviy shartli oddiy va xususiy hosilali birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish uchun chekli ayirmalar usulini qo‘llash

Tabiiy jarayonlarni tadqiq qilishda ularning matematik modellarini tuzish ko‘p hollarda xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Bunday masalalarni analitik usulda yechishning imkoniyati hamma vaqt ham mavjud emas. Shu bilan birga tadqiqot masalani yechish jarayonining qiyinchiliklari sohasining murakkabligidan va birjinslimaslik xossasiga ham bog‘liq. Bunday masalalarning yechimini kompyuter yordamida sonli toppish va natijalarni yaxshi vizuallashtirish orqali tahlil qilish mumkin.

Tadqiqot sohasini ifodalovchi matematik-fizika tenglamalarning turi turlicha bo'lishi mumkin. Masalan, muhitda issiqlik tarqalishi jarayonlarini ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{q}{pC'} \qquad (6.1)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi tavsiflaydi, bu yerda $a^2=\frac{k}{pC'}$; p va C- moddaning zichligi va issiqlik sig'imi; k – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisiyenti; q – issiqlik manbalari zichligi; $u=u(x,y,z,t)$ – temperatira; x,y,z – fazoviy koordinatalar; t – vaqt.

Agar jarayonni statsionar holda, yani vaqtdga bog'liq bo'lmagan holda, masalan, statik issiqlik, elektr, magnit maydonlari yoki statik yuklanishda deformatsiyalar, tahlil qilish zarur bo'lsa, u holda bu jarayon ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z), \qquad (6.2)$$

Puasson tenglamasiga olib kelinadi, bu yerda $u(x,y,z)$ – statik maydonni ifodalovchi funktsiya; $f(x,y,z)$ – taqsimlangan manbalar. Agar (6.2) da $f(x,y,z)=0$ bo'lsa, u holda u soddalashadi va ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad (6.3)$$

Laplas tenglamasiga olib kelinadi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni qo'shimcha shartlardir bilan to'ldirish orqali chegaraviy masalalar tuziladi.

Bu qo'shimcha shartlar: giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun erkli o'zgaruvchi t vaqtga nisbatan muhit yoki sistemaning boshlang'ich holatini ifodalovchi boshlang'ich shartlar x,y,z koordinatalar bo'yicha esa chegaraviy shartlar kiritiladi. Termodinamik jarayonlari masalalarida, masalan ular muhit tadqiqot sohasi D ning chegaralari S dagi temperatura taqsimotini tavsiflaydi. ***Elliptik*** tenglamali masalalarda t vaqt qatnashmaydi, unda faqat x,y,z koordinatalar bo,yicha chegaraviy shartlar kiritiladi.

Agar chegaraviy shart u funktsiyaning chegaradagi taqsimotini ifodalasa, ya'ni $u/S=\varphi$, u holda bu shart ***Dirixle sharti*** deb ataladi.

Hisob sohasining chegarasida hosila bilan yozilsa, ya'ni $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi$, u holda bu shart ***Neyman sharti*** deb ataladi Agar chegaraviy shart yuqoridagi ikkala chegaraviy shartlar kombinatsiyasidan tuzilgan bo'lsa, ya'ni $\left.(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})\right|_S = \Phi$ u holda bu aralash chegaraviy shart deb ataladi.

Bunday chegaraviy masalalarni ko'pgina analitik va taqribiy uaullar bilan yechish mumkin, masalan, analitik usullardan xarakteristikalar usuli (Dalamber usuli), o'zgaruvchilarni ajratish usuli (Furye usuli), manbalar usuli (Grin funktsiyasi usuli). Taqribiy hisob usullaridan chekli ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli, chegaraviy elementlar usuli, chekli hajmlar usuli, chekli avtomatlar usuli va hokazo. Ana shu taqribiy usullardan biri chekli ayirmalar usulidan foydalanib bir necha chegaraviy masalalar ushbu ishda yechilgan.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullaridan biri to'rlar usulidan foydalanib chegaraviy masalani yechish bilan tanishamiz. Bu usulning g'oyasiga ko'ra, masalan, soddalik uchun ikki o'zgaruvchili funktsiya uchun o'lchami bir birlikli kvadrat sohada chegaraviy masalaning yechimini topish haqida tushunchalar kiritamiz. Aslida x va y koordinatalar bo'yicha to'r qadamlari har xil bo'lishi ham mumkin.

Ta'rifga ko'ra birinchi tartibli xususiy hosila quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x)}{\Delta x} \approx \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x)}{\Delta x}$$

Agar $u(x,y)$ funktsiyani tadqiqot sohasi to'rining tugunlaridagina qarasak, u holda birinchi tartibli xususiy hosilani ushbu

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

o'ng chekli ayirma deb ataluvchi formula bilan yozishimiz mumkin, bu yerda (i,j) – tadqiqot sohasining (x,y) nuqtasiga mos keluvchi tugun. Bu formulaning bunday atalishiga sabab unda funktsiyaning tadqiqot nuqtasi va undan o'ngdagi nuqtalardagi qiymatlaridan foydalanilganligida. Xuddi shunday tadqiqit nuqtasi va undan chapdagi nuqtadagi fuksiya qiymatlaridan foydalansak, u holda ushbu

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

chap chekli ayirma deb ataluvchi formulaga kelamiz.

Xuddi shunday, ikkinchi tartibli xususiy hosila uchun ushbu

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

markaziy chekli ayirma formulasini hosil qilamiz.

Bu formulalarda simmetrik nuqtalardagi funktsiya qiymatlaridan foydalanildi.Umuman olganda, bu formulalar nosimmetrik nuqtalar uchun ham yozilishi mumkin (masalan, bir tomonlama chekli ayirmali hosilalar).

Parabolik tipdagi tenglamani oshkor sxemali chekli ayirmalar usuli bilan yechish uchun misol tariqasida ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

diffuziya tenglamasini qaraylik.

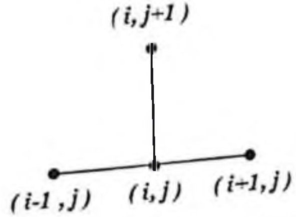
Bu tenglamani to‘rlar usuli bilan yechish uchun to‘rtnuqtali oshkor sxemadan foydalansak (6.1-rasm), quyidagi chekli ayirmali tenglamaga kelamiz:

$$u_{i+1,j} = D\frac{\tau}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j}$$

Agar ushbu

$$\tau \le \frac{h^2}{2D}$$

shart bajarilsagina bu oshkor ayirmali sxema ustivor bo‘ladi. Chekli ayirmali tenglamadagi qavs oldidagi ifodani soddalik uchun k deb belgilaylik.



6.1-rasm. To‘rtnuqtali oshkor sxema shabloni.

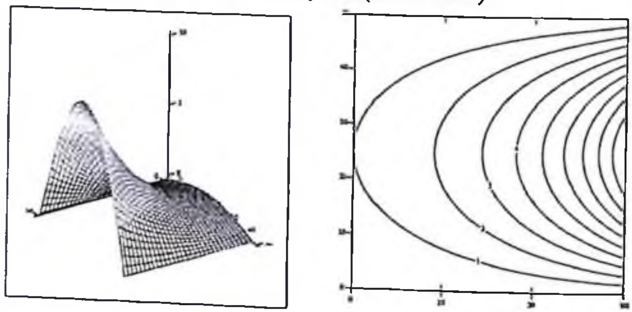
Bu masalani Mathcad matematik paketi yordamida sonli yechamiz (dasturda chekli ayirmali formuladagi qavs oldidagi ifoda a deb belgilash olingan, boshlang‘ich shart $u(x,0) = sin(x)$, chegaraviy shartlar esa nolga teng deb hisoblangan, ya`ni $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$):

$$a := 0{,}02 \quad n := 30 \quad m := 50 \quad i := 0 \ldots n-1$$

$$u_{0,j} := \sin\left(\pi\frac{j}{m}\right) \qquad u_{0,0} := 0 \qquad u_{0,m} := 0$$

$$u_{i-1,j} := u_{i,j} + a \cdot (u_{i,j-1} + 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1})$$

Natijalarni grafiklar shaklida ifodalaylik (6.2-rasm):



6.2-rasm. Har xil vaqt momentlarida diffuziya jarayonining tarqalishi holati.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, jarayon uzoqlashuvchi natijalarni berib bormoqda. Bunday kamchilikdan qutilish uchun oshkormas sxemadan foydalanish maqsadga muvofiq. Bunday oshkormas sxema deb atalishining sababi tadqiqot funktsiyasining izlanayotgan qiymatalrini tenglamada vaqtning keyingi qatlamida topishda vaqtning oldingi qatlaidagi qiyamtlari orqali oshkor ifodalab bo'lmasligida.

6.2. Chegaraviy shartli oddiy va xususiy hosilali ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish uchun chekli ayirmalar usulini qo'llash

Agar differensial tenglamadagi noma'lum funktsiya ikki va undan ortiq ko'p argumentlarga bog'liq bo'lsa, u xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Bunday tenglamalarning nomidan ko'rinib turubdiki, ularda funktsiyaning erkli argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari qatnashadi.

Oddiy differensial tenglamalardagi kabi xususiy hosilali differensial tenglamalar ham cheksiz ko'p yechimlarga ega. Bu yechimlarga umumiy yechimlar deyiladi. Xususiy yechimlar umumiy yechimlardan ma'lum shartlar asosida ajratiladi. Bu qo'shimcha shartlar tenglama qaralayotgan sohaning odatda chegarasida beriladi.

Xususiy hosiladagi erkli o'zgaruvchilardan biri vaqt bo'lishi ham mumkin. Bunday fizik va texnik masalalar amalda ko'p uchraydi. Qo'shimcha shartlar sifatida bunday tenglamalar uchun vaqtning biror belgilangan qiymatida izlanuvchi funktsiyaning qiymatlari ishlatiladi.

Masalan, shart boshlang‘ich vaqt $t = 0$ da (yoki umuman $t = 0, t0 = const$) berilishi mumkin. Bunday shartga biz boshlang‘ich shart deymiz.

Qo‘shimcha shartlar soha chegarasida berilsa, bunday masalaga chegaraviy masala deyiladi.

Agar chegaraviy shartlar berilmasdan faqat boshlang‘ich shart berilsa, bunday masalaga xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi deyiladi. Bunda masala cheksiz sohada qaraladi.

Masalada ham boshlang‘ich, ham chegaraviy shartlar qatnashsa, bunday masalaga aralash masalalar deyiladi.

Bu yerda xususiy hosilali differensial tenglamalarning xususiy holi bo‘lgan chiziqli tenglamalarni qaraymiz. Umumiy ko‘rinishda ikkinchi tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli tenglama

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad (6.4)$$

kabi yoziladi. Bunda $u = u(x, y)$ izlanuvchi funktsiya, erkli o‘zgaruvchilar, indeksdagi x va y lar u funktsiyaning x va y bo‘yicha hosilalarini anglatadi. a, b, c, d, e, f, g koeffitsientlar umuman x, y va u ga bog‘liq funktsiyalar bo‘lishi mumkin. Agar ular o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lsa, (6.4) tenglama o‘zgarmas koeffisiyentli, x va y ga bog‘liq funktsiyalar bo‘lsa – o‘zgaruvchi koeffisiyentli va, nihoyat, x, y va u ga bog‘liq funktsiyalar bo‘lsa – kvadratchiziqli deyiladi.

(6.4) tenglamaning tipi (turi) $D = b2 - 4ac$ diskriminantning ishorasi bilan aniqlanadi. Agar $D > 0$ bo‘lsa, tenglama giperbolik, $D = 0$ bo‘lsa parabolik va $D < 0$ bo‘lsa, elliptik tipga tegishli bo‘ladi.

Tenglamaning tipini aniqlash muhim ahamiyatga ega, chunki bir xil tipdagi har xil tenglamalar juda ko‘p umumiy xususiyatlarga ega bo‘ladi. Har xil tipga tegishli tenglamalarning xususiyatlari bir-biridan keskin farq qiladi. Tenglama o‘zgaruvchi koeffisiyentli bo‘lsa, qaralayotgan sohada uning tipi o‘zgarishi mumkin. Masalan, sohaning bir bo‘lagida parabolik tipga ega bo‘lgan tenglama uning ikkinchi bo‘lagida giperbolik tipga aylanadi. Bunday tenglamalarga o‘zgaruvchi tipli tenglamalar deyiladi. Matematik masalalarning qo‘yilishi ham har xil tipdagi tenglamalar uchun har xil bo‘ladi.

Giperbolik tipga tegishli eng soda tenglama to‘lqin tenglamasidir. U

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.5)$$

ko‘rinishga ega. Bunda izlanuvchi funktsiya, u har xil masalalarda har xil fizik ma’noga ega, t -vaqt, x -chiziqli koordinata, a^2 -o‘zgarmas koeffisiyent. Bu tenglama yordamida ingichka torlar, har xil materiallardan ishlangan tayoqlar va boshqa xildagi narsalarning ko'ndalang va bo'linma tebranishlari jarayonlarini o'rganish mumkin.

Quvurlarda qovushqoq suyuqliklarning nostatsionar harakati suyuqlik zichligi o'zgarmas bo'lganda

$$p\left(\frac{\partial W}{\partial t}+2aW\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

$$pc^2\frac{\partial W}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (6.6)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bunda W -quvur ko'ndalang kesimi bo'yicha o'rtacha suyuqlik tezligi, p-bosim, t-vaqt, x-quvur o'qi bo'yicha yo'nalgan koordinata, c-suyuqlikda tovush tarqalishi tezligi, μ suyuqlik qovushiqligi, d-quvur diametri,

$$2a=\frac{32\mu}{pd^2}.$$

(6.6) sistemadan p ni istisno qilib (yo'qotib)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+2a\frac{\partial p}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad (6.7)$$

tenglamaga kelamiz.

Agar (6.6) sistemadan bosim p istisno qilinsa, (6.7) tenglamaga o'xshash

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2a\frac{\partial W}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad (6.8)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Ma'lumki, issiqlik tarqalish hodisasi Fur'ye qonuni asosida o'rganiladi. Agar jism sirtiga o'tkaziladigan issiqlik ta'siri vaqt bo'yicha juda tez o'zgarsa va jism har xil materiallar aralashmasidan iborat bo'lib, bu materiallar turli issiqlik xossalariga ega bo'lsa, Fur'ye qonunidan chetlanish yuz beradi. Issiqlik oqimi temperatura gradiyenti gradT ma'lum darajada o'zgarganda o'zining statsionar holatiga darhol emas, ma'lum vaqt o'tgach erishadi. Bu o'tish vaqtining davomiyligi relaksatsiya vaqti deb ataluvchi kattalik bilan aniqlanadi. Umumlashgan Fur'ye qonuni

$$\vec{q}+\tau'\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}=-\lambda graqT \qquad (6.9)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda τ' issiqlik oqimining relaksatsiya vaqti, λ –issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisiyenti, T- temperatura.

(6.9) qonun asosida

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (6.10)$$

issiqlik uzatish tenglamasi keltirib chiqariladi. Bunda τ_p ga chiziqli bog'liq bo'ladi, a-temperatura o'tkazuvchanlik koeffisiyenti.

(6.7), (6.8), (6.9) tenglamalar giperbolik tipga tegishlidir, chunki $D>0$.

(6.5), (6.7), (6.8), (6.10) ko'rinishdagi tenglamalar uchun odatda ikkita boshlang'ich va ikkita chegaraviy shart beriladi. Masalan, qaralayotgan soha $[a,b]$ kesmadan iborat bo'lsa, $u(t,x)$ funktsiya

$$u(0,x)=f_1(x),\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=f_2(x),$$

$$u(t,0)=\varphi_1(x),\quad u(t,1)=\varphi_2(x)$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak. Bunda $f_1(x), f_2(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funktsiyalar ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi funktsiyalardir. Umuman olganda shartlar boshqacha ham qo'yilishi mumkin.

Parabolik tipga tegishli tenglamalar ham juda ko'p fizik jarayonlarni tahlil qilishda ishlatiladi. Ularning asosiy vakili issiqlik uzatish tenglamasidir. Uni

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\Delta T+Q(t,x,y,z) \qquad (6.11)$$

ko'rinishda yozamiz. Bunda jismning solishtirma issiqlik sig'imi, ρ-zichlik, Q-issiqlik manbaining kuchlanishi, boshqa belgilashlar (6.9), (6.10) dagi kabi, Δ – Laplas operatori. Bu operator har xil koordinatalar sistemasida har xil ko'rinishga ega.

Masalan: to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida:

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}$$

silindrik koordinatalar sistemasida:

$$\Delta=\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)+\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(p,φ,z silindrik koordinatalar);

sferik koordinatalar sistemasida:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

(r,θ,φ - sferik koordinatalar).

(6.11) tenglamada $\theta=0$ bo'sa,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \qquad a = \frac{\lambda}{pc} \qquad (6.12)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(6.11) yoki (6.12) tenglamalarni yechish uchun bitta boshlang'ich shart va chegaraviy shartlar berilishi kerak.

Boshlang'ich shart odatda $t = 0$ bo'lganda jismning barcha nuqtalaridagi temperaturasi sifatida beriladi:

$$T(0, x, y, z) = f(x, y, z) \qquad (6.13)$$

Chegaraviy shartlar esa bir necha turda beriladi:

1. Birinchi tur chegaraviy shartlarda jismning S sirtidagi temperatura ma'lum funktsiyadan iborat deb qaraladi:

$$|T|_s = \varphi(x, y, z) \qquad (6.14)$$

2. Ikkinchi tur chegaraviy shartlarda jism sirtida issiqlik oqimi beriladi:

$$q_n = \psi(x, y, z) \qquad (6.15)$$

$\vec{n}$- jism sirti normalining birlik vektori. Fur'ye qonuniga binoan $q_n = -k\left(\frac{dT}{dn}\right)$, shuning uchun yuqoridagi shart

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \psi(x, y, z) \qquad (6.16)$$

shartga teng kuchlidir.

3. Uchinchi tur chegaraviy shartlar

$$\left.\left(\frac{dT}{dn} - hT\right)\right|_s = \eta(x, y, z) \qquad (6.17)$$

ko'rinishda beriladi. Bunda h - o'zgarmas son, $\eta(x, y, z)$ - berilgan funktsiya.

Elliptik tipdagi tenglama (3.8) tenglamadan statsionar holda hosil bo'ladi:

$$\Delta T = -R. \quad R = \frac{Q}{\lambda} \qquad (6.18)$$

Bu tenglamaga Puasson tenglamasi deyiladi.

Agar issiqlik manbai yo'q bo'lsa, (6.18) dan

$$\Delta T = 0 \qquad (6.19)$$

Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz.

Laplas va Puasson tenglamalarini yechish uchun jism sirtida chegaraviy shartlar qo'yilishi kerak. Masalan, bu shart (6.14) ko'rinishda olinishi mumkin.

(6.4) tenglamada $a = b = c = f = 0$ va d, e, g o'zgarmas sonlar bo'lsa,

$$u_x + qu_y = p. \quad q = \frac{e}{d}. \quad p = \frac{g}{d} \qquad (6.20)$$

ko'rinishdagi ko'chirish tenglamasi deb ataluvchi tenglamani olamiz.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish usullari xuddi oddiy differensial tenglamalardagi kabi bir necha guruhga bo'linadi: aniq usullar, taqribiy usullar va sonli usullar.

Aniq usullar bilan chiziqli xususiy hosilali tenglamalar sodda ko'rinishdagi chegaraviy va boshlang'ich shartlar bilan berilganda yaxshi natijalar olish mumkin. Bu guruhga o'zgaruvchilarni ajratish, tarqaluvchi to'lqinlar, manba funktsiyalari, Laplas almashtirishlari va boshqa usullar kiradi.

Taqribiy usullar ham umumiy ko'rinishda berilgan masalalarni yechishda bevosita ishlatilishi mumkin emas. Faqat xususiy hollardagina, masalaning ayrim xususiyatlaridan foydalanib uni soddalashtirib taqribiy yechimlar olinishi mumkin. Eng ko'p ishlatiluvchi usullar sonli usullardir.

7- §. Matematik modellashtirishdagi integrallashninig sonli usullari. Matematik model interpolyasiyasi va approksimatsiyasi.

7.1. Sonli integrallashning to'g'ri to'rtburchaklar usuli, trapetsiya usuli, Simpson usuli

Quyidagi

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblashni qaraylik. Bu yerda $f(x)$ – $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan funktsiya.

$[a, b]$ integrallash oralig'ni n ta uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$ ga teng bo'lingan $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ kesmalarga ajratamiz.

Agar tugunlarda $f(x)$ ning qiymatini $y_i = f(x_i(i = 1,2, \ldots, n)$ kabi belgilasak

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (7.2)$$

umumiy ***trapesiyalar*** formulasi deyiladi. Bu formula geometrik nuktai-nazardan integral ostidagi $y = f(x)$ funktsiyaning grafigini tugun nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq bilan almashtirishdan iboratdir.

Faraz qilaylik $n = 2m$ juft son bo‘lsin. $[a, b]$ integrallash oralig‘ini n ta uzunligi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ ga teng bo‘lgan $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots \dots, [x_{n-1}, x_n]$ kesmalarga ajratamiz.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})] \quad (7.3)$$

Simpson formulasi deyiladi.

(7.3) formula geometrik nuqtai-nazardan integral ostidagi $y = f(x)$ funktsiyaning grafigini har bir oraliqda parabolalar bilan almashtirishdan iboratdir.

7.2. Interpolyasiyasi va approksimatsiya masalalarining qo‘yilishi. Nyuton va Lagranj interpolatsiya usullari

Aksariyat hisoblash metodlari masalaning qo‘yilishida qatnashadigan funktsiyalarni unga biror, muayyan ma’noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo‘lgan funktsiyalarga almashtirish g‘oyasiga asoslangan.

Ushbu mavzuda funktsiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo‘llaniladigan qismi - funktsiyalarni interpolyasiyalash masalasi qaraladi.

Dastlab interpolyasiyalash deganda funktsiyaning qiymatlarini argumentning jadvalda berilmagan qiymatlari uchun topish tushunilar edi. Bu holda interpolyasiyalashni «satrlar orasidagilarni o‘qiy bilish san’ati» deb ham ta’riflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolyasiyalash tushunchasi juda keng ma’noda tushuniladi. Interpolyasiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, $[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funktsiya berilgan yoki hech bo‘lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma’lum bo‘lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo‘lgan qandaydir funktsiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko‘phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ *funktsiyani* $[a, b]$ *oraliqda interpolyasiyalash masalasi* shu funktsiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funktsiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, ... x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{0,n}).$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0, x_1, ... x_n$ nuqtalar interpolyasiya tugunlari yoki tugunlar deyiladi, $P(x)$ esa interpolyasiyalovchi funksaya deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar sinfi olinsa, u holda interpolyasiyalash algebraik deyiladi. Algebraik interpolyasiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sohalarida qo'llaniladi, chunonchi, differensiallash va integrallashda, transsendent, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstremumini topishda, hamda funksiya jadvalini tuzishda. Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo'lsa, algebraik interpolyasiyalash ham hisoblash matematikasida
shunday ahamiyatga egadir. Ayrim hollarda interpolyasiyalashning boshqa ko'rinishlarini qo'llash maqsadga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$ Davriy funksiya bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyasiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida rasional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Lagranj interpolyasion formulasi

Biz asosan algebraik interpolyasiyalash bilan shug'ullanamiz. Masalaning qo'yilishi quyidagichadir. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan shunday ko'phad qurilsinki, u berilgan $(n+1)$ ta $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalarda berilgan

$$f(x_0), (x_1), \ldots, f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin: darajasi n dan ortmaydigan shunday $P(x)$ ko'phad qurilsinki, uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta $M_k\ (x_k, f(x_k))\ k = \overline{0,n}$ nuqtalardan o'tsin.

Demak, c_m koeffisiyentlarni shunday aniqlash kerakki,

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n \tag{7.4}$$

ko'phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,1, \ldots, n \tag{7.5}$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, $c_m (m = \overline{0,n})$ larga nisbatan $(n+1)$ noma'lumli $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$
\begin{cases}
c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \cdots + c_nx_0^n = f(x_0) \\
c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_nx_1^n = f(x_1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \cdots + c_nx_n^n = f(n)
\end{cases} \qquad (7.6)
$$

Bu sistemaning determinanti Vandermond determinantidir: $W(x_0, x_{1,\dots,}x_0)$. Masala mazmunidan ravshanki, x_k nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (7.6) sistema va shu bilan birga qo'yilgan interpolyasiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemani yechib, c_m larni topib (7.4) ga qo'ysak, $P(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $P(x)$ ning oshkor ko'rinishini topish uchun boshqacha yo'l tutamiz, avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi Q_{nj} larni, ya'ni

$$
Q_{nj}(x_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j\ bo'lganda \\ 1, & i = j\ bo'lganda \end{cases}
$$

shartlarni qanoatlantiradigan p- darajali ko'phadlarni quramnz. U holda

$$
L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x) \qquad (7.7)
$$

izlanayotgan interpolyaiion ko'phad bo'ladi. Haqiqatan ham, barcha $i = 0, 1, 2, \dots, n$ uchun

$$
L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \delta_i^j = f(x_i)
$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n - darajali ko'phaddir.

Endi $Q_{nj}(x)$ ning oshkor ko'rinishini topamiz, $j \neq i$ bo'lganda $Q_{nj}(x) = 0$, shuning uchun ham $Q_{nj}(x)$ ko'phad $j = i$ bo'lganda $x - xi$ ga bo'linadi. Shunday qilib, n – darajali ko'phadning n ta bo'luvchilari bizga ma'lum, bundan esa

$$
Q_{nj}(x) = C \prod_{i=j} (x - x_i)
$$

kelib chiqadi. Noma'lum ko'paytuvchi C ni esa

$$
Q_{nj}(x_j) = C \prod_{i=j} (x_j - x_i) = 1
$$

shartdan topamiz; natijada:

$$
Q_{nj}(x) = \prod_{i=j} \frac{(x - x_i)}{x_j - x_i}.
$$

Bu ifodani (7.4) ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) = \prod_{i=j} \frac{(x - x_i)}{x_j - x_i} \qquad (7.8)$$

Bu ko'phad *Lagranj interpolyasion* ko'phadi deyiladi.

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik: $n = 1$ bo'lganda. Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq formulasini beradi:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_1)}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_0 - x_1} f(x_1)$$

Arap $n = 2$ bo'lsa, u vaqtda kvadratik interpolyasion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa, ega bo'lgan parabolani aniqlaydi;

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Endi Lagranj interpolyasion formulasshshng boshqa ko'rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

ko'phadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{i \neq j} (x - x_i) \right].$$

Kvadrat qavs ichidagi ifoda $x = x_i$ va $k \neq j$ bo'lganda nolga aylanadi, chunki $(x_j - x_i)$ ko'paytuvchi qatnashadi. Demak,

$$\omega'_{n+1}(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i).$$

Shuning uchun ham $\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{(x_j - x_i)}$ Lagranj koeffisentini

$$\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x - x_j)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan esa Lagranj ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)\omega_{n-1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x - x_j)} \qquad (7.9)$$

Endi tugunlar bir xil uzoqlikda joylashgan:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots x_n - x_{n-1} = h$$

xususiy holni ko‘ramiz.

Bu holda soddalik uchun $x = x + th$ 0 almashtirish bajaramiz, u holda

$$x - x_j = h(t - j), \omega_{n+1}(x) = h^{n+1}\omega^*_{n+1}(t).$$

bu erda

$$\omega^*_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n), \qquad \omega^*_{n+1}(x_j) = (-1)^{n-j}j!\,(n-j)!\,h^n$$

bo‘lib, Lagranj interpolyasion ko‘phadi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$L_n(x_i + th) = \omega^*_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} f(x_i)}{(t-j)j!\,(n-j)!}. \qquad (7.10)$$

Nyuton interpolyasion formulalari

Ushbu mavzuda interpolyasiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan holni, ya’ni $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda interpolyasion formulaning ko‘rinishlari ancha soddalashadi. Biz hozir Nyutonning ikkita interpolyasion formulasshi chiqaramiz. Bularning birinchisi funksiyani jadval boshida va ikkinchisi jadval oxirida interpolyasiyalash uchun mo‘ljallangan.

Faraz qilaylik, $L_n(x)$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugunlar bo‘yicha tuzilgan Nyuton interpolyasion ko‘phadi bo‘lsin:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots$$
$$+ f(x_0, \ldots,)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}). \quad (7.11)$$

Bundagi bo‘lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtiraylik. Ushbu $x = x_0 - th$ almashtirishni ham bajargandan keyin (7.11) ko‘phad quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$L_n(x_0 + th)$$
$$= f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} + \cdots$$
$$+ \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!} f^n_{n/2}. \qquad (7.12)$$

Bu formulaning qoldiq hadi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h) \dots (x - x_0 - nh) \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1} f^{n-1}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n) \qquad (7.13)$$

(7.12) formula *Nyutonning jadval boshidagi interpolyasion formulasi* deyiladi.

Endi (7.11) formulada interpolyasiyalash tugunlari sifatida $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}$ tugunlarni olamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x - x_0)$$
$$+ f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots f(x_0, \dots, x_{-n})(x - x_0) \dots (x - x_{-(n-1)}) \qquad (7.14)$$

Bo'lingan ayirmalar o'z argumentining simmetrik funksiyasi bo'lganligi uchun

$$f(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) = f(x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0).$$

(7.14) formulada yana bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtirib va $x = x_0 + th$ deb olib, quyidagini hosil qilamiz;

$$L_n(x_0 + th)$$
$$= f_0 + tf^1_{-1/2}t + f^2_{-1}\frac{t(t+1)}{2} + \cdots$$
$$+ f^n_{-n/2}\frac{t(t-1) \dots [t + (n-1)]}{n!} \qquad (7.15)$$

Bu formulaning qoldiq hadi

$$\frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} t(t+1 \dots (t+n))$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi qoldiq had to'g'risida bir oz to'xtalib o'taylik. Ayrim hollarda, $f^{(n+1)}(\xi)$ xususan f_i qiymatlar tajriba yo'li bilan hosil qilingan bo'lsa, ni baholash ancha mushkul bo'ladi. Shuning uchun qo'pol bo'lsa ham, soddaroq yo'l bilan baholash ma'quldir. Qaralayotgan oraliqda hosila $f^{(n+1)}(x)$, demak, ayirma f_i^{n+1} ham sekin o'zgaradi deb faraz qilib, (7.13) formula bilan berilgan qoldiq hadda qatnashuvchi hosilani ayirma bilan alamashtiramiz, natijada

$$R_n \approx \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n-1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} \qquad (7.16)$$

hosil bo'ladi. Shuningdek (7/15) formula o'rnida, quyidagi taqribiy, lekin qulay formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n \approx \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} \qquad (7.17)$$

Yuqoridagi formulalar ancha qo‘pol, ulardan foydalanishda hushyor bo‘lish kerak. Agar hosila sekin o‘zgarmasa, u holda ma’nosiz natijaga ega bo‘lamiz. Masalan,

$$f(x) = x + Nsin\pi x$$

funktsiyani olib, interpolyaiiya tugunlari sifatida butun $x_i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ qiymatlarni olaylik. Bu holda ikkinchisidan boshlab barcha ayirmalar nolga teng. Demak, qo‘pol tarzda $f\ (x)$ ni chiziqli funksiya deb olishimiz mumkin. Lekin, N yetarlicha katta bo‘lganda $x + Nsin\pi x$ funksiya chiziqli funksiyadan keskin farq qiladi.

7.3. Integrallashni farmatsiya sanoatida qo‘llanishi

Hozir dunyoda sodir bo'layotgan jarayonlar uchun mutaxassislardan chuqur yuqori sifatli bilimlarini talab qiladi. Bugungi kunda globallashuv tufayli har yili texnologiyalar takomillashmoqda, tibbiyot sohasida yangi bilimlar va tadqiqotlar paydo bo'layapdi.

Texnologiyani yaratish uchun olimlar hisob-kitoblarga muhtoj, bu erda ular differentsial tenglamalarsiz hech narsa qila olmaydilar. Dunyoda faoliyat o'zgarib bormoqda matematik modellashtirish bilan bog'liq tibbiy xodimlar, amaliyotda qo'llaniladigan statistika va boshqa hodisalar.

Iqtisodiy ta'lim mutaxassislari o’z bilim va qobiliyatini turli sohalarda qo'llashni nazarda tutadi. Kasbiy vakolatlarni shakllantirishda matematik bilimlarni tibbiyotda qo'llash orqali ko’rib chiqamiz.

Matematikaning tibbiyotdagi roli diagnostik protseduralarni amalga oshirishda yordam berishdan iborat. Hozirgi vaqtda kasalliklarni davolash usullari va diagnostikasi sezilarli darajada kengaytirilgan. Tibbiy markazlarning ayrim yo’nalishlari bo’yicha matematik modellashtirish usullardan foydalanadi, bu tashxisni aniq qo’yilishini oshiradi.

Shifokorlar tomonidan matematika asoslarini bilishi inson tanasida sodir bo'ladigan jarayonlarning xususiyatlarini o’rganishda qo’llaniladi. Ko'plab ta'lim institut talabalari asosiy tibbiy fanlar bilan bir qatorda matematika fanini o’rganadi. Amaliy matematikadagi asosiy muammo bu matematik modelni tanlashdir, hech qanday bilim sohasida buni sezmaysiz, biologiya va tibbiyotda bo'lgani kabi.

Zamonaviy matematikada "Differentsial tenglamalar" mavzusi eng katta bo'limlardan biridir. U ko'plab faoliyat sohalari bilan kesishgan.

Dastlab, differentsial tenglama - bu noma'lumni o'z ichiga olgan hosila tenglama yoki differentsial belgisi ostidagi funktsiya. Ular uchun asosan ishlab chiqarishda qo'llaniladigan va ishlab chiqilgan ilmiy ishlarni tuzish zamonaviy iqtisodiyot va boshqa sohalar uchun muhim.

Shuningdek differentsial tenglamalar amalda keng qo'llaniladi. Masalan, natija kimyoviy reaktsiyalar, kompaniyaning ko'pchilik daromadlarini hisoblash, joriy quvvat dinamikasi vaqt o'tishi bilan ma'lum bir mintaqadagi demografik vaziyat differentsial tenglamalardan foydalangan holda hisoblab chiqiladi.

Har yili olimlar yangi kasalliklarni aniqlaydilar, dori-darmonlarni topadilar, yangi davolash usullari va bularning hech biri matematikasiz hal etilmaydi.

Muayyan tibbiyotda ishlatiladigan narsani hal qilish uchun differentsial tenglamalarni qo'llash vazifalarini ko'rib chiqamiz.

Tabletka shaklidagi dori moddalarini eritish.

"Eritma" tajribasi ta'sir etuvchi modda miqdorini aniqlashga mo'ljallangan bo'lib, qo'llanmada ko'rsatilgan sharoitlarda yoki normativ hujjatlarga ko'ra, ma'lum bir vaqt ichida aniq dozalangan qattiq shakldan eritma shakliga keladi. Aytaylik, bu yerda t erish vaqti, n tabletkadagi modda miqdori bo`lsin.

Unda

$$\frac{dn}{dt} = -kn.$$

bu erda k - doimiy eritish tezligi. Ushbu tenglamada minus shuni anglatadiki, vaqt o'tishi bilan dori shaklidagi modda miqdori kamayib boradi.

Yechimni ko'rib chiqaylik.

Differentsial tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz:

$$\frac{dn}{n} = -kdn,$$

$$\int \frac{dn}{n} = -\int kdt$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$ln|n| = -kt + ln|C|$$

Logarifm xossasidan foydalanib, quyidagiga erishamiz:

$$|n| = C_1 e^{-kt},$$

bu erda $C_1=e^c$ – ixtiyoriy o'zgarmas son.

Modul xususiyati bo'yicha quyidagini hosil qilamiz:

$$n = C_2 e^{kt},$$

Bu erda $C_2 = \pm C_1$ ixtiyoriy o`zgarmas.

$t = 0$ $n = n_0$ ekanini hisobga olsak, quyidagini hosil qilamiz $C_2 = n_0$, ya'ni:

$$n = n_0 e^{-kt}$$

Quyidagi formula dori shaklidagi moddaning erish qonunining integral formasini anglatadi.

$$n = n_0 e^{-kt}$$

tenglamadan doimiy tarqalish tezligi k ni topamiz:

$$K = \frac{1}{t ln(\frac{n_0}{n})}$$

Tabletkalarning yarim erish davri $t = t_{\frac{1}{2}}, n = \frac{n_0}{n}$:

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-kt_{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt_{\frac{1}{2}}}$$

Tenglamani ikki tomonini logarifmlasak:

$$ln\frac{1}{2} = -kt_{\frac{1}{2}}$$

$t_{\frac{1}{2}}$ ni ifoda etib, $t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{k} = \frac{0{,}693}{k}$ ega bo'lamiz.

Endi dori vositasining inson tanasida parchalanish misolni ko'rib chiqamiz.

Misolning sharti:

Bemorning tanasiga dori yuborildi, 8 soatdan so'ng uning qancha qismi parchalanib ketadi, agar 4 mg preparat yuborilganda 4 soat o'tgach, uning vazni ikki baravar kamaydi?

Yechish:

Ushbu muammoni hal qilish uchun vaqti-vaqti bilan tanadagi dori miqdorni o'zgarishiga bog'liqlikni o'rnatish kerak.

Boshlang'ich vaqtida dori miqdori sonini (mg) $N_0 = 8$ desak. Ikki soatdan keyin dori miqdori soni N_2=4 bo'ladi, bu erda N - istalgan vaqtdagi dori miqdori soni. Dori miqdorining o'zgarish tezligi dori soni miqdori bilan proportsional ma'lum bir vaqtda:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Ushbu differentsial tenglamani echish orqali, quyidagi izlanayotgan bog'liqlikni topish mumkin:

$$N = Ce^{kt}$$

Boshlang`ich shartga ko`ra C aniqlaymiz:

$$8 = Ce^{k0},$$

shunday qilib $e^0 = 1, \quad C = 8$

Shunday qilib $N = 8e^{kt}$. Ma'lumki, preparat tanaga yuborilgandan so'ng, 4 soatdan keyin uning massasi ikki baravar kamaydi. k ni aniqlaymiz. Buning uchun oxirgi tenglamaga t = 4 qo'ysak, N = 4 qiymatda quyidagiga ega bo`lamiz:

$$4 = 8e^{k4},$$

$$0{,}5 = e^{4k}$$

Tenglamaning ikkala tomonini logarifmlasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$ln0{,}5 = lne^{4k},$$

$$ln0{,}5 = 4k\ lne$$

$lne = 1$ bo`lsa, u holda

$$k = \frac{ln0{,}5}{4}$$

Organizmdagi dori miqdorining bog'liqligini vaqt bo'yicha quyidagicha yozish mumkin:

$$N = 8e^{\frac{ln0{,}5}{4}t}$$

Endi biz moddaning miqdorini 8 soatdan keyin bilib olamiz (8 = 4), buning uchun vaqtni tenglamaga qo'ysak quyidagiga ega bo`lamiz:

$$N = 8e^{\frac{ln0{,}5}{4} \times 8}.$$

$$N = 8e^{\ln(0{,}5)\times 2}$$

$ln0{,}5 = -0{,}693\ bo'lsa, unda\ \ln(0{,}5) \times 2 = -1{,}386.$

Shuday qilib,

$$N = 8e^{-1{,}386} = 8 \times 0{,}25 = 2.$$

8 soatdan keyin tanada 2 mg preparat qoladi. Shu vaqt ichida 8-2=6 mg parchalanib ketdi. Natijada 6 mg modda 8 soat ichida parchalandi.

8-§. Texnologik jarayonlarni matematik modelini aniqlash, tajriba, statistik usuli. Statistik gipotezalarni tekshirish

8.1. Tajriba turlari, passiv va faol tajriba

Sinov tadqiqotlami o'tkazishda tajribalar faol va passiv tajribalarga farqlanadi.

Passiv tajribalashtirish uslubiyati kirish o'zgaruvchilari x ning ketma-ket variatsiyalangan qiymati va chiqish o'zgaruvchilari y (laboratoriya tajribasi yoki o'tish qurilmasidagi tajriba)ni o'lchash natijalarining tahlili bilan katta sinov tadqiqotlarini amalga oshirishga mo'ljallangan.

Qabul qilingan passiv tajribaga yan'a sanoat qurilmasini ishlatish rejimidagi sinov ma'lumotlari to'plami - sanoat tajribasi ham tegishli.

Passiv tajriba natijalarini qayta ishlash regression va korrelatsion usullar hamda empirik modellar (regressiya tenglamasi) turini tanlash, ya'ni yetarlicha murakkab masala hisoblanuvchi strukturali identifikatsiya masalasini yechish yordamida amalga oshiriladi.

Bu tajriba ma'lumotlarining tanlanmasi bo'yicha olingan regressiyaning empirik chizig'i grafigidagi o'zgaruvchilarning o'zgarish tavsifi bo'yicha aniqlanishi lozim boigan regressiya tenglamasining turiga bog'liq.

Bunday masalalarni yechish uchun bitta kirish o'zgaruvchi x ni, xuddi kirish o'zgaruvchilari (x) , uchun boigani kabi chiqish o'zgaruvchilari (y) uchun ham koordinatalar tizimini o'zgartirishni nazarda tutuvchi samarali usullar keltiriladi. Kirish o'zgaruvchilari $(x_i,..,x_m)$ ning soni katta boigan regressiya tenglamalarini turini aniqlashning ishonchli usullari hozirgi vaqtda mavjud emas.

Faol tajriba nafaqat tajriba o'tkazishning optimal shartlarini aniqlash masalasining qo'yilishi bilan, balki jarayonni optimallashtirish (tajribani optimal rejalashtirish) bog'liq holda oldindan tuzilgan reja asosida o'tkaziladi.

Bunda regressiya tenglamasi (empirik modellar) asosan ikki chegaralangan sohalardagi faol tajriba ma'lumotlarini tavsiflaydi va quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

- chiqish o'zgaruvchisi y ning ekstremum qiymatidan ancha uzoqdagisi:

$$\hat{y}^I = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \sum_{u=2}^{m} a_{ju} x_j x_u \qquad (8.1)$$

- chiqish o'zgaruvchisining ekstremum qiymatiga yaqindagisi («deyarli statsionar sohada»):

$$y^{II} = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j x_j + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{u=2}^{m} a_{ju} x_j x_u + \sum_{j=1}^{m} a_j x_j^2 \qquad (8.2)$$

Keltirilgan tenglama $\bar{a}$ regressiya koeffitsiyentlariga nisbatan chiziqli hisoblanadi va yetarlicha sodda ko'rinishga ega.

Ular ikkita o'zaro ta'sirli kirish o'zgaruvchilar

$$\left(\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{u=2}^{m} a_{ju} x_j x_u \right) \text{ ga}$$

$$u > j$$

ega qo'shiluvchilami mujassamlashtiradi va ehtimolhgi kichik boigan, yuqori tartibli (uchinchi, to'rtinchi va h.k.) o'zaro ta'sirlami hisobga olmaydi.

Oxirgi tenglama kirish o'zgaruvchilari

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_j^2 \right) \text{ ning}$$

kvadratlari bilan qo'shiluvchilarni mujassamlashtiradi va uning koeffitsiyentlari II - tartibli (y: y^{II} da yuqori indeks II) faol tajriba natijalarini qayta ishlashda olinadi, masalan, TOMKR - tajribaning ortogonal markaziy kompozitsion rejasi.

Oxiridan oldingi tenglama kirish o'zgaruvchilami kvadratlari bilan qo'shiluvchilami o'z ichiga olmaydi va uning koeffitsiyentlari I - tartibli (y: y^I da yuqori indeks I) faol tajriba natijalarini qayta ishlash natijasida olinadi, masalan, TFT-to'liq faktorli tajriba.

Empirik modellardan foydalanib (masalan, Boks - Vilson usuli bilan) jarayonni kechishining optimal shartini aniqlashda chiqish o'zgaruvchisi y optimallik mezoni yoki maqsad funksiyasi hisoblandi.

Faol tajribalashtirish nazariyasida chiqish (bog'liq) o'zgaruvchilarni *javob funksiyasi*, kirish (mustaqil) o'zgaruvchilarini esa - *faktorlar* deb atash qabul qilingan. Muvofiq ravishda $x_1, x_2, \dots, x_m$ koordinatali koordinata fazosi - faktorli fazo, faktorli fazoda javob funksiyasining geometrik tasvirlanishi esa-javob yuzasidir.

Faol tajriba uning regression va korrelatsion tahlil usuli bilan olingan natijalarini qayta ishlash uchun rejalashtiriladi.

Faol tajribalashtirishda foydalaniladigan tajribalarning ortogonal rejalari regression tahlildagi korrelatsiya matritsasi $\bar{\bar{C}}$ ning diagonal ko'rinishi va mos ravishda regressiya koeffitsiyentlarining statistik mustaqilligini ta'minlaydi.

Faol tajribalashtirishning boshqa afzalliklariga quyidagilar tegishli:

•amalga oshirilishi mumkin bo'lgan sinovlar sonini bashorat qilish imkoni;

•sinovlar amalga oshiriladigan faktorli sohadagi nuqtalami aniqlash;

•regressiya tenglamalarini tanlash bilan bog'liq muammolarning yo'qligi;

•tajriba - statistik usul bilan jarayonning optimal parametrlarini aniqlash imkoniyati;

• sinov tadqiqotlarining hajmini qisqartish.

8.2. Faktorlar va ularning turlari

To'liq faktorli tajriba (TFT) tenglama $\hat{y}^I$ lari kvadratdagi faktorlami o'z ichiga olmaganligini tavsiflovchi I - tartibli tajribaga tegishli.

Ikki (x_1, va x) faktorlar uchun faktorlarning o'zaro ta'sirlarini hisobga olmagan holda mavjud empirik modelni quyidagicha yozish mumkin:

$$y^I = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \qquad (8.3)$$

TFT nazariyasiga ko'ra sinov tadqiqotlarini amalga oshirishda faktorlaming har biri faqat ikki - minimal (kodlangan qiymati -1) va maksimal (kodlangan qiymati +1) sathlarda variatsiyalanadi.

Bunda faktorlarning minimal va maksimal qiymatlarining mumkin bo'lgan kombinatsiyalari ishlab chiqiladi, natijada TFT dagi sinovlarning umumiy soni (n) 2^m ga teng boiadi va to'liq faktorli tajriba odatda 2^m tipli TFT deb ataladi.

Sinovlar sonini aniqlash uchun quyidagi formula qo'llaniladi:

$$n = 2^m$$

Oxirgi tenglama x_j larning o'rniga qiymati quyidagi kodlashtirish sxemasi bo'yicha olinadigan z_j faktorlarning kodlangan qiymatlarini o'z ichiga oladi:

$$z_j = \frac{x_j - x_j^0}{\Delta x_j}, \quad j = 1, \dots m$$

bu yerda

$$x_j^{(0)} 0.5(x_j^{min} + x_j^{man})$$

$$\Delta x_i = \frac{x_j^{min} - x_j^{man}}{2}, \qquad j = 1, \dots m$$

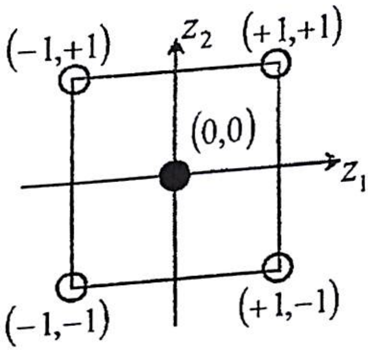
Natijada yuqorida aytib o'tilganlar va faktorlarni kodlashtirishni hisobga olib tajribani o'tkazish rejasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: (faktorlar soni $2 - m = 2$ ga, sinovlar soni $n = 2^m = 2^2 = 4$ ga teng)

$n \backslash p$	z_0	z_1	z_2	y^e
1	+1	-1	-1	y_1^e
2	+1	+1	-1	y_2^e
3	+1	-1	+1	y_3^e
4	+1	+1	+1	y_4^e

Bunda sinov ma'lumotlarini tavsiflovchi regressiya tenglamasi z_j $(j = 0,1,2)$ kodlangan faktorlardan foydalanib yoziladi va regressiya $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2$, ning kodlangan koeffitsiyentlariga muvofiq:

$$y = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z_1 + \tilde{a}_2 z_2 \qquad (8.4)$$

Kodlangan faktorlar fazosida tajriba o'tkazishning ko'rsatilgan rejasiga muvofiq tarzda o'tkaziladigan sinovlar kvadrat uchlarining nuqtalari bilan ko'rsatiladi:



8.3. Regressiya masalasining qo‘yilishi

Regressiyaning kodlangan tenglamalami identifikatsiyalashtirish uchun quyidagi uch bosqichni o‘z ichiga oluvchi regression tahlil usulidan foydalaniladi:

•eng kichik kvadratlar usuli bilan regressiya tenglamasi $\bar{\bar{a}}$ ning kodlangan koeffitsiyentlarini aniqlash;

•Styudent mezoni - t dan foydalanib, regressiyaning kodlangan koeffitsiyentlarini baholash;

•Fisher mezoni - G dan foydalanib, regressiyaning kodlangan tenglamasining monandligini tekshirish.

So‘nggi ikki bosqich dispersiyalar bir jinsliligi xossasining bajarilishi (regression tahlilning talablaridan biri) da va parallel sinovlarning o‘tkazilishida, masalan, $z_1 = 0$ va $z_2 = 0$ koordinatali nuqta (reja markazi, rasmda qora nuqta) da amalga oshirilishi mumkin.

Rejaning markazi $y_{os}^E, s = 1, \dots k$ da k parallel sinovlarni o‘tkazishda y_c^E o‘rta qiymat barcha parallel sinovlardagi o‘lchashlarning o‘rta arifmetigi kabi aniqlanadi:

$$y_c^E = \frac{\sum_{S=1}^{k} y_{os}^E}{k}$$

8.4. Xatoliklar. Tajriba oldi rejasi, korrelyatsion tahlil. Koxren, Styudent gipotezalarni tekshirish

Bajarilgan tajriba yoki kuzatish natijalari tajriba turi, texnikasi, o‘tkazilish sharoiti, uning qanchalik to‘g‘ri qo‘yilganligi va boshqa harakteriga ko‘ra olingan natijalar aniqligida qo‘pol, tasodifiy va tizimli xatoliklar bo‘lishi mumkin. Bular tajriba va kuzatishda sodir bo‘ladi.

Tajriba va kuzatishda bo‘ladigan bunday holatlarni xatoliklari nazariy asoslar fanida o‘rganiladi. Shu fanning ko‘rsatmasiga binoan o‘lchash miqdori qancha ko‘p bo‘lsa, xatolik ehtimoli ham shunchalik kam bo‘ladi, ya’ni katta xatoliklar kichik xatolikga nisbatan kam uchraydi, ko‘p aniq natija hisoblanadi va u yoki bu natijaning namoyon bo‘lishi normal qonuni bilan izohlanadi.

Ilmiy izlanish amaliyotidan shu ma’lumki, agar xabar ko‘rsatkichi o‘lchash soni n>30 bo‘lsa, unda ularning o‘rtacha arifmetik qiymati haqiqatga ancha yaqin hisoblanadi va uning o‘rtacha arifmetik qiymati ishonchli – aniq deb qabul qilinadi. Agar, n<30 bo‘lsa, unda turli xildagi xatoliklarni aniqlash metodlari orqali aniqlanadi.

Tajriba natijalarini qayta ishlovi va ularning metodlarga aniqligini ishonchlilik ehtimoli yordamida intervalli baholash, eng kam o'lchash miqdorini aniqlash va qayta ishlovi grafik metodi, emperik formulalarni tanlash, regression analiz, nazariy yechimlarining adekvatligini aniqlash, tajribalarni rejalashtirish metodlari qo'llaniladi.

Tizimli xatoliklar sababi aniqlangandan so'ng uni bartaraf etish mumkin. Qo'pol xatolar tajriba qoidalarining buzilishidan paydo bo'ladi.

Ammo tasodifiy xatoliklar hamma vaqt ham to'g'ri aniqlanmaydi.

O'lchashning aniqlik bahosini o'rtacha kvadrat xatolik σ yoki xatoliklar dispersiyasi σ^2 belgilaydi.

Intervalli baholash metodida o'lchashning bir xilligini *tavsiflochi dispersiya* (D) va uning qanchalik o'zgarib turishini ko'rsatuvchi *variatsiya koeffitsiyenti* (R_b) yordamida *ishonchlilik ehtimoli* (P_d) aniqlanadi.

Ishonchlilik intervali (x_d) esa haqiqiy natijaning tushgan intervalli, ya'ni $a \leq x_d \leq b$ chegaralariga tushuniladi. Bu kattalik foizlarda yoki birning bo'laklarida o'lchanadi. Masalan, agar $P_d = 0{,}95$ bo'lsa, unda natijaning ishonchliligi 95 % deb olinadi.

Albatta, bu ko'rsatkichlar matematikaning ehtimollar nazariyasi, statistika va boshqa maxsus bo'lim – fanlarida chuqur o'rganiladi.

Bularning mohiyatini quyidagicha tushuntirish mumkin.

Shunday qilib, *dispersiya* o'rtacha kvadrat og'ishganligining kvadratiga teng, ya'ni

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{i-\bar{x}})^2}{(n-1)},$$

variatsiya koeffitsiyenti esa: $R_b = \frac{\sigma}{\bar{x}}$,

Ishonchlilik ehtimoli: $R_b = P[a \leq x_d \leq b] = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\varphi(b-\bar{x})}{\sigma-\varphi(a-\bar{x})/\sigma}\right]$.

bu yerda $\varphi(t)$- Laplas integral funksiyasi (jadval shaklida beriladi).

Ishonchli intervalning yarmi:

$$\mu = \sigma \cdot arg \cdot \varphi(P_d) = \sigma \cdot t$$

Bunda t – kafolatlovchi koeffitsent. $t = \mu/\sigma$, bunda $\mu = b - \bar{x}$, $\mu = -(a - \overline{x})$;

$arg \cdot \varphi(P_d)$ - Laplasning argumentli funksiyasi.

Ko'pincha ishonchli intervalni 0,90; 0,95; 0,9973 deb qabul qilinadi.

Ishonchli interval o'lchash aniqligini bildirsa, ishonchlilik ehtimoli esa uning ishonchli ekanligini tasdiqlaydi.

Masalan, paxtali material chidamliligini izlanishi 30 marta o'lchanib, o'rtacha chidamlilik moduli $E = 170$ МПа ekanligi va bunda o'rtacha kvadrat og'ish $\sigma = 3{,}1$МПа ekanligi ma'lum bo'lsa, unda ishonchlilik ehtimoli darajasini $Pg = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}9973$ deb qabul qilamiz va Laplas integral funksiyasi jadvalidan bu uchun t ning miqdorini $t = 1{,}65;\ 2{,}0;\ 3{,}0$ aniqlaymiz. Bunda $\mu = \pm 3{,}1 \cdot 1{,}65 = 5{,}1$; $\mu = \pm 3{,}1 \cdot 2{,}0 = 6{,}2$; $\mu = \pm 3{,}1 \cdot 3{,}0 = 9{,}3\ MPa$.

Uning o'rtachasi $\mu = \pm 7\ \ M\Pi a$ uchun $t = 2{,}26$ va $Pg = 0{,}97$. Ya'ni olingan natija 97 % ishonchli hisoblanadi.

Ko'p holda tajribalarda ishonchli natija olish uchun bir necha marotaba qayta o'lchashligi ham hisoblanib topiladi. Bu esa amaliyotda juda ko'p uchraydi.

Tajribadagi aniqlik darajasi:

$$\Delta = \frac{\sigma_0}{\bar{x}}$$

bilan aniqlanadi, bunda σ_0 - o'rtacha kvadrat og'ishning o'rtacha arifmetik qiymati, ya'ni $\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. Amaliyotda σ_0 ni o'rtacha xatolik deb ham ataladi.

Agar o'lchashlar soni $n < 30$ bo'lsa, 1908 yili ingliz matematigi V.S.Gosset (laqabi Styudent) taklif etgan metod bilan hisoblanadi. Bunda ishonchli interval kengligini tanlash uchun

$$\mu_{cm} = \sigma_0 \cdot \alpha_{cm}$$

bo'ladi va α_{cm} - Styudent koeffitsiyenti deb ataladi, bu koeffitsiyent ham ishonchli intervalga bog'liq bo'lgan jadvaldan, ya'ni Styudent koeffitsiyenti jadvalidan aniqlanadi.

Tajribadagi qo'pol xatolarni ham aniqlash metodlariga uch sigma metodi, ya'ni tasodifiy xatoliklarning o'rtacha qiymatdan sochilishi uch sigmadan katta bo'lmasligi kerak:

$$X_{max,min} = \bar{x} \pm 3\sigma.$$

Xuddi shuningdek V.I.Romanovskiy kriteriyasini topishga asoslangan metod ham mavjuddir.

Ishonchli va aniq tajriba natijalari yana ma'lum tajriba sharoitida takrorlanadigan bo'lishi ham kerak. Buning mohiyati shundaki, bir necha parallel o'tkazilgan tajribalarning har birida o'rtacha arifmetik qiymatlar ($\bar{x}_i$) aniqlanadi, bu seriyalarning har birida n=3...4 ga teng bo'lishi mumkin. Shulardan dispersiya D_i aniqlanadi va uning takroran yana shunday natija berish-bermasligini baholovchi Koxren kriteriyasi aniqlanadi, ya'ni

$$k_{kp} = maxD_i / \sum_{1}^{m} D_i$$

bu yerda: $maxD_i$ – parallel m seriyalardagi eng katta dispersiya soni;

$\sum_{1}^{m} D_i$ – m seriyalardagi dispersiya yig'indisi.

Agar $k_{kp} \leq k_{km}$ bo'lsa, ya'ni k_{km} - Koxren kriteriyasini jadval qiymati, bu ishonchlilik ehtimoli P_d va ozodlik darajasi soni $q = n - 1$ ga bog'liqligi qabul qilingan. Bu yerda m - seriyalarning kuzatishlar soni; n – seriyadagi o'lchashlar soni. Masalan, jadvalda korxonaning biror-bir iqtisodiy ko'rsatkichi $m = 3$ seriyada $n = 5$ marotoba takror-takror kuzatilib, olingan.

Shuning ishonchli-takrorlanishini aniqlash kerak bo'lsin.

Korxona biror-bir iqtisodiy ko'rsatkichini kuzatish natijalari va uning qayta ishlovi

Jadval

Kuzatuv seriyasi	Ko'rsatkichlarni miqdori va takrorlash						Hisoblash
	1	2	3	4	5	$\bar{x}$	D_i
1	7	9	6	8	4	6,8	3,7
2	9	7	8	6	5	7,0	2,0
3	8	8	7	9	8	8,0	0,5

Unda Koxren kriteriyasi:

$$k_{kp} = maxD_i / \sum_{1}^{m} D_i = \frac{3,7}{3,7 + 2,0 + 0,5} = 0,59.$$

Ozodlik darajasi soni $q = n - 1 = 5 - 1 = 4$

Koxren kriteriyasi jadvalida $P_d = 0,95$ uchun $m = 3, q = 4$ da $k_{kt} = 0,74$.

Demak, kuzatilgan kattalik aniq takrorlanuvchi, chunki $0,59 \leq 0,74$ dan. Agar teskarisi bo'lganda, unda m ni yoki n ni sonini oshirishga to'g'ri kelar edi.

Tajriba natijalari qayta ishlovi natijasida turli xildagi grafiklar, diagrammalar va formulalar ishlab chiqiladiki, ularning qanchalik darajada haqiqatni anglatishini baholash – *adekvatlik* deb yuritiladi.

Adekvatlikning aniqlanishi, bu tajriba natijalari aproksimotsiyasining ("aksini" yaratish) nechog'lik xatoligi borligini aniqlash demakdir. Buning uchun Fisher statistik kriteriyasi tajriba natijalari bo'yicha - $k_{\phi э}$ va nazariy (hisobiy) natijalari - $k_{\phi т}$ hisoblab, bir-birini taqqoslash va agar $k_{\phi э} < k_{\phi m}$ bo'lsa, unda yaratilgan model adekvat – deb qabul etiladi.

Fisherning tajriba kriteriyasi:

$$k_{\phi э} = \frac{D_a}{D_{cp}}.$$

Bu yerda: D_a – adekvatlik dispersiyasi,

$$D_a = \sum_{1}^{n} \frac{(y_{it} - \bar{y}_{iэ})^2}{n-d};$$

D_{sr} – o'rtacha tajriba natijalari dispersiyasi,

$$D_{sr} = \sum_{1}^{m}\sum_{1}^{n} (y_{it} - \bar{y}_{iэ})^2 / m \cdot n:$$

Bunda: y_{it} - har bir o'lchashdagi nazariy funksiya qiymati;

$y_{iэ}$ - funksiyaning tajriba qiymati;

$\bar{y}_{iэ}$- m seriya o'lchashdagi o'rtacha tajriba qiymatlari funksiyasi;

n – har bir tajribadagi o'lchashlar soni;

d – nazariy regressiya tenglamasi koeffitsiyentlar soni;

k_{ft} Fisher kriteriyasi jadvalidan ishonchli intervali 0,95 va ozodlik soni $q_1 = n - d, q_2 = n(m-1)$ olinadi.

Maqsadga muvofiq shuni aytish mumkinki, Fisher kriteriyasi kichik sonli o'lchash sonlarida qo'llaniladi, katta sonli $(n > 30)$ o'lchashlarda esa Pirson, Romanovskiy, Kolmogorovlar kriteriyalari qo'llaniladi.

9-§. Dispersion tahlil. Regressiya tengiamalarini tanlash va baholovchi koeffisientlarini aniqlash

9.1. Dispersion tahlil

Har qanday eksperiment natijalarida noaniqlar mavjud bo'ladi. Chunki eksperiment o'tkazishda turli chegaralar, sharoitlar mavjud bo'ladi. Shu tufayli eksperimentni amalga oshirishda tajribalar bir nuqtada bir xil sharoitda, omillarning bir xil qiymatlarida bir marta o'tkazilib xulosa qilinmaydi. Balki bir xil sharoitda bir necha marotaba tajribalar takrorlanadi. Qanchalik ko'p takrorlansa xatolikga yo'l qo'yishi kamayib boradi. Lekin cheksiz takrorlab borish moddiy qiyinchiliklar tug'diradi.

Shu tufayli parallel tajribalar o'tkazilib ularning xatoliklari aniqlanishi kerak.Chunki birinchi tajriba natijasini parallel tajriba natijasi bilan taqqoslanadi. Takroriy tajribalarning o'rtacha arifmetik qiymati U aniqlanadi:

$$y = \frac{y_1 + y_1 + \ldots + y_n}{n} = \frac{\sum_{1}^{n} y_2}{n}$$

Har bir tajribadagi o'rtacha arifmetik qiymatidan chetga chikish.

U_q - U kurinishida aniqlanishi mumkin, bu yerda, U_q - alohida tajriba natijasi.

Takroriy tajribalarning natijalari o'zgarib turadi. Bu o'zgarishni o'lchash uchun dispersiyadan foydalaniladi. Dispersiya deb o'rtacha qiymatidan chetga chikishning kvadratiga aytiladi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S^2 = \frac{\sum_{1}^{n} (y_2 - \bar{y})^2}{n-1},$$

bu yerda $(n-1)$ - erkinlik darajasi soni (tajribalar sonidan bitta kamiga aytiladi).

Bitta erkinlik darajasi o'rtacha qiymatni hisoblash uchun ishlatilgan.

O'rtacha kvadratik chetga chiqish quyidagicha aniqlanadi (dispersiyadan kvadrat ildiz chikariladi)

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (y_2 - \bar{y})^2}{n-1}},$$

Yuqoridagi formula har bir tajriba dispertsiyasini aniqlash uchun ishlatiladi.

Optimallashtirilayetgan parametrni dispertsiyasini qo'yidagicha aniqlanadi

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_{1}^{N} \sum_{1}^{n} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)},$$

Bu yerda, $i = 1, 2, \ldots, N$; $q = 1, 2, \ldots, n$.

Ikkita takroriy tajribalar uchun esa yuqoridagi formula qo'yidagi ko'rinishga keladi:

$$S^2\{y\} = \frac{2\sum_{1}^{N} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N},$$

Dispersiyalar aniqlangandan so'ng ularning bir xilligi tekshiriladi. Bunday tekshirish Fisher kriteriysi orqali tekshiriladi.

Ikkita dispersiyani taqqoslash uchun Fisherning F-kriteriysi bo'yicha amalga oshiriladi. Bu katta dispersiyaning kichik dispersiyaga nisbati orqali ifodalanadi.

Tajriba natijasida olingan dispersiya Fisherning jadvali orqali qiymatiga taqqoslanadi.

Agar tajriba asosidagi dispersiya qiymati jadvalda keltirilgan qiymatidan katta bo'lsa, unda dispersiyalar bir-biridan sezilarli darajada fark kiladi va ular bir xil bulmaydi.

Modellarning ahamiyatliligi yoki koeffitsiyentlarning ta'sir darajasi to'grisida gap yuritadigan bo'lsak, albatta statistik natijalarga murojat qilishga to'g'ri keladi.

Tajribalarni bir necha marotaba takrorlash natijasida statistik ma'lumotlarga ega bo'lamiz. Statistik malumotlar asosida tahlilni regression tahlil usulida o'rganiladi. Regression tahlil qolgan barcha statistik usullar kabi aniq taxminlarga ko'ra amalga oshiriladi.

Birinchi taxmin. Optimizatsiyalashtiriladigan parametr U normal tarqalish qonuniga bo'ysunadigan tasodifiy kattalik hisoblanadi. Yuqorida o'rganilgan dispersiyani aniqlash, ana shu tarqalish qonunning bir harakteristikasidir.

Eksperiment materiallari ko'p bo'lganligi sababli normal tarqalish to'grisidagi gipotezani standart statistik usullar bilan tekshirib ko'rish mumkin. Lekin ko'proq U- tasodifiy kattalik degan xulosa to'g'riroq bo'ladi.

Ikkinchi taxmin. $\boldsymbol{U}$ qiymatining dispersiyasi $\boldsymbol{U}$ ning absolyut qiymatiga bog'liklik o'rni yo'q. Bu taxminning bajarilishi har xil nuqtalardagi omillarning dispersiyalarining bir xilligini aniqlash bilan tekshirib ko'riladi. U n*ing* dispersiyasini bir xilga keltiruvchi yoki yaqinlashtiruvchi ko'rinishini axtarish kerak. Bu vazifa U_{ni} logarifmlash yo'li bilan axtariladi.

Uchinchi taxmin. Omillarning qiymatlari notosodifiy qiymatlardir. Bu taxmin shuni anglatadiki, omillarning qiymatlarini bir xil darajada o'rnatish bilan olinadigan natijaning aniqligi oshiriladi. Bu bilan bajariladigan tajriba xatoligi kamayadi degan xulosa qilish mumkin.

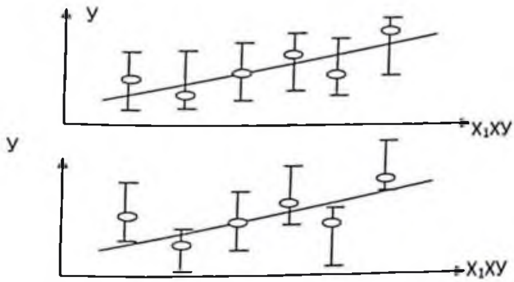
Polinomial modelning koeffitsiyentlari qiymatlarini yuqorida keltirilgan usul bilan aniqlangandan so'ng, uning qiymati qanchalik tasvirganligini va uning zarurligini aniqlash zarur.

Bunday aniqlash usulini biz modelning adekvatligini aniqlash deb ataymiz.

Bu masalani aniqroq tushunish uchun quyidagi misolni tahlil qilamiz:

Quyidagi ikkita eksperiment natijalari bo'yicha rasmlar keltirilgan.

$$b_1 \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4},$$



Rasm 2. Modelning adekvatligini tekshirish chizmasi

Bu keltirilgan rasmlardan ko'rinib turibdiki:

a) rasmda nuqtalarda amalga oshirilgan tajribalar natijalari juda chetki qiymatlarga ega emas va bir-biriga yaqin, demak tajribaning to'g'ri amalga oshirilganligi, natijaga boshqa ta'sirlar ko'p sezilmaganligi ko'rinib turibdi va natijalar regressiya chizigiga yaqin holda joylashgan. Bu olingan eksperiment modelini adekvat deb xulosa qilsak xatoni kam qilamiz.

b) ko'rinishdagi natijalarda esa nuqtalardagi tajriba natijalari bir-biriga nisbatan farqlari ko'proqligi ko'rinib turibdi va regressiya chizigidan uzoqroqda joylashganlar. Bu model adekvat emas deb hisoblansa to'g'ri bo'ladi va uni adekvat holiga keltirish uchun eksperiment yana davom ettiriladi.

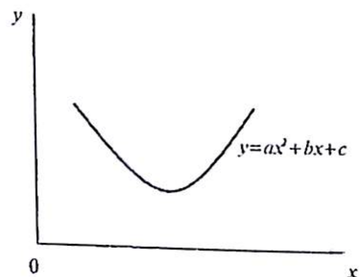
Fisherning F-kriteriysi bo'yicha modelning adekvatligini quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$F = \frac{S^2_{ag}}{S^2\{y\}},$$

bu yerda, S^2_{ag} -adekvatlik dispersiyasi deb ataladi;
erkinlik darajasi esa $f = N - (k + 1)$. qiymatlari orqali aniqlanadi.

9.2. Chiziqli parabolik, transsendent regressiya tenglamalari Matematik model koeffitsientlarini hisoblashda kichik kvadratlar usuli baholovchi koeffitsientlarni qiymatdorlikka tekshirish

Matematik model tuzishning matematik usullaridan biri eng kichik kvadratlar usulini qo'llashdir. Bu usulni qo'llashda tabiat yoki ishlab chiqarish korxonalaridagi biror jarayon yoki hodisalarning vaqt bilan bog'liqligini, boshqa hodisa bilan boglanishini aniqlashga to'g'ri keladi. Erkli o'zgaruvchi miqdor argument bilan funksiyaning o'zgarishi bir vaqt oralig'ida tekshiriladi. Keyin izlanishlar natijasi bog'lanishlarni nazarga oigan holda jadvalga joylashtiriladi. Hosil bo'lgan funksional bog'lanishni Dekart koordinatalar sistemasiga quyüadi, ya'ni nuqtalar tekislikda belgilanadi va shu nuqtalar ustidan shunday chiziq o'tkaziladiki, bu chiziq nuqtalarning ko'pining ustidan o'tsin. Chizmani chizamiz (3.1-rasm)



9.1-rasm.

Chizmadagi egri chiziq parabolaning bir qismini ifodalaydi, ya'ni izlanayotgan hodisa grafigi parabolaga o 'xshash shaklni ifodalaydi. Uning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (9.1)$$

Bu parabola modelini qabul qilamiz.

Bunday funksional bog'lanishda a, b, c noma'lum parametrlar. Noma'lum parametrlarni aniqlash uchun matematik usullardan biri - eng kichik kvadratlar (E.K.K.) usulini qoilaymiz. E.K.K. usuli quyidagi shartni ifodalaydi:

$$f(x)\left[\sum_{i=t}^{n}(y_t - ax_t^2 - bx_t - c)\right] - \min \quad (9.2)$$

E.K.K. usuli funktsiya bilan uning modeli $ax^2 + bx + c$ orasidagi ayirmalarning kvadratlari eng kichik qiymatga teng bo'lishini talab qiladi. Ifodaning darajasi ikkiga teng bo'lishi sharti bu kesmalarning absolut qiymatlari yig'indisi, ya'ni hosil bo'lgan yig'indining kvadrati eng kichik qiymatga erishishi kerak deganidir. Buning ma'nosi shuki, funksiya va modelning qiymatlari taxminan bir-biriga yaqin bo'lishi kerak. Shuning uchun (9.1) tenglik bilan ifodalangan model jarayoni to'g'ri aks etadi. Noma'lum parametrlarni topish uchun ikkinchi formuladan a, b, c noma'lumlar bo'yicha xususiy hosilalar olinib, «0» ga tenglashtiriladi

$$\begin{cases} f_a(x) = \dfrac{df}{da} = 0 \; ya'ni \; \dfrac{df}{da} = 2\sum\limits_{t=1}^{n}[y_1 - ax_1^2 - bx_1 - c] \cdot [-x_1^2] = 0 \\ f_b(x) = \dfrac{df}{db} = 0 \; ya'ni \; \dfrac{df}{db} = 2\sum\limits_{t=1}^{n}[y_1 - ax_1^2 - bx_1 - c] \cdot [-x_1] = 0 \\ f_c(x) = \dfrac{df}{dc} = 0 \; ya'ni \; \dfrac{df}{dc} = 2\sum\limits_{t=1}^{n}[y_1 - ax_1^2 - bx_1 - c] \cdot [-1] = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Quyidagi amallar bajariladi.

2-tenglikdan xususiy hosilalar olinadi.

9.4-tenglamalar sistemasida sistemaning hamma hadlarini ikkiga qisqartirib, qavslarni ochib, ma'lumlarini bir tomonga, noma'lumlarini 2-tomonga o'tkaziladi, unda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} c \end{aligned}\right\} \quad (9.4)$$

Masalan:

$$D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} \quad (9.5)$$

$$Da = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i \, n \end{vmatrix} \qquad (9.6)$$

bunda:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc.$$

9.4-tenglamalar sistemasi 3 noma'lumli (a, b, c) uchta tenglamalar sistemasidan iborat, sistemani yechish uchun Kramer formulasidan foydalanamiz. Noma'lum parametrlar oldidagi 9.4-sistemaning o'ng tomonidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinantning chap tomoni, ozod hadlarni tashkil etadi

$$a = \frac{D_a}{D}, b = \frac{D_b}{D}, c = \frac{D_c}{D}. \qquad (9.7)$$

(D) nolga teng b o 'lmasa, sistema yechimga ega.

$D_a D_b, D_c$ determinantlar esa D determinantning mos ustunlarini sistemamng ozod hadlari bilan almashtirish natijasida hosil qilingan determinantlar hisoblanadi.

Shunday qilib, a, b, c no m a'lum parametrlar hisoblandi, ularni (9.1) tanlangan tenglikka qo'yamiz, bu holda jarayonlar bog'liqligining matematik modeli aniq ko'rinishni qabul qiladi.

$y = \bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}$, bunda $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – aniq son qiymatlar.

Masala: Firmaning qandolat mahsulotlari ishlab chiqarish fabrikalarida mehnat unumdorligi va ishlarni avtomatlashtirish koeffitsiyenti orasidagi bog'lanish aniqlansin. Izlanishlar natijasi 1-jadvalda berilgan. (9.4) sistemaning koeffitsiyentlari shu jadvalda keltirilgan. Bu koeffitsiyentlar qiymatlarini nazarga oigan holda (9.4) sistema quyidagi (9.8) ko'rinishni qabul qiladi:

$$\left.\begin{aligned} 4323158 &= a.487509 + b.26608 + c.1485 \\ 1271{,}57 &= a.26608 + b.1485 + c.85 \\ 73{,}31 &= a.1485 + b.85 + c.4 \end{aligned}\right\} \qquad (9.8)$$

Qandolat mahsulotlari №	Ishning avtomatik koeffitsenti	Mehnat unumdorligi	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$	$\lvert x_2 - x\rvert$	$\lvert y_i - y\rvert$	$\lvert x - x\rvert \lvert y - y\rvert$	$\lvert x_2 - x\rvert^2$	$\lvert y_i - y\rvert$
1	13	12	169	2197	156	2028	4	2,7	10,6	16	7,1
2	15	13,5	225	3375	203,3	3048,7	2	1,1	2,2	4	21
3	17	14,5	289	4913	247,5	4207,8	0	1	0	0	0
4	19	16,2	361	6859	307,8	5848,2	2	1,5	2,0	4	2,3
5	21	17	441	9261	357	7497	4	2,3	9,6	16	5,48
$\sum = 5$	85	73,3	1485	6859	1271,57	43231,58	-	-	25,4	40	16,16

(5) sistemani yechib, noma'lum koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$a = \frac{D_a}{D}, b = \frac{D_b}{D}, c = \frac{D_c}{D},$$

$$c = 299501$$

$$b = -35478$$

$$a = 1041$$

Quyidagi tenglik jarayonning matematik modelini ifodalaydi:

$$y(x) = 1041x^2 - 35478x + 299501 \qquad (9.9)$$

Aniqlangan matematik modelni baholaymiz, buning uchun avval korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz.

Funktsiyasi	Formula	Funktsiyaning chiziqli ko'rinishi	$t=0$ bo'lganda			t≠ 0 bo'lganda	
			a	b	c	a	b
Chiziqli	$y = a + bx$	$y = a + b$	$\frac{\sum y}{n}$	$\frac{\sum y \cdot x}{\sum x^2}$	-	$\frac{\sum y - b\frac{\sum x}{n}}{n}$	$\frac{n\sum xy}{n\sum x^2}$
Parabolik	$y = a + bx + cx^2$	-	$\frac{\sum y}{n} - c\frac{\sum x}{n}$	$\frac{\sum yx}{\sum x^2}$	$\frac{n\sum yx^2 - \sum y \sum x^2}{n\sum x^4 - (\sum x^2)^2}$	-	-
Giperbolik	$y = a + b\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} = z$ $y = a + b$	-	-	-	$\frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum z}{n}$	$\frac{n\sum xy}{n\sum z^2}$
Ratsional kasr	$y = 1/(a + bx)$	$z = \frac{1}{y}$ $z = a + bx$	-	-	-	$\frac{\sum z}{n} - b\frac{\sum x}{n}$	$\frac{n\sum zx}{n\sum x^2}$
Dara-jali	$y = ax^b$	$lny = lna + ax^2$	-	-	-	$ln\frac{lny}{n} - b\frac{\sum lnx}{n}$	$\frac{n\sum ln}{n\sum(ln)} - \frac{-\sum ln}{-(\sum ln)}$

Regressiya tenglamalarning parametrlarini eng kichik kvadratlar usulida hisoblash formulalari quyidagi jadvalda berilgan.

Jadvalda keltirilgan qiymatlardan foydalanib hisoblaymiz. O'zgaruvchilarning o'rtacha arifmetik qiymatlari teng bo'ladi. Shu qiymatlardan foydalanib korrelatsiya koeffitsiyentini ($R = 0{,}95$) hisoblaymiz. Izlanayotgan miqdorlar orasidagi chiziqli tig'izligini tekshirish uchun determinatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$D = R^2 \cdot 100\% = 0{,}952 \cdot 100 - 90\%.$$

Shunday qilib, qandolatchilik fabrikalarida ba'zi ishlarni avtomatlashtirish natijasi bilan mehnat unumdorligi orasida chiziqli tig'iz bog'lanish 90% ni tashkil etadi.

9.3. Matematik model koeffitsientlarini hisoblashda kichik kvadratlar usuli baholovchi koeffitsientlarni qiymatdorlikka tekshirish

X va Y belgili ikki o'lchovli bosh to'plamdan n hajmli tanlanma olamiz. (x_i, y_k) juftlarning kuzatilgan qiymatlarini tegishli chastotalari bilan ushbu korrelyasion jadvalga joylashtiramiz:

y \ x	$y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m$	$\sum_i n_{i,j}$	$\bar{y}(x_1)$
x_1 x_2 . . . x_i	$n_{11} \quad n_{12} \quad \dots \quad n_{1m}$ $n_{21} \quad n_{22} \quad \dots \quad n_{2m}$ $. \quad . \quad \dots$ $n_{l1} \quad n_{l2} \quad \dots \quad n_{lm}$	n_{x_1} n_{x_2} . . . $n_{x_{1i}}$	$\bar{y}(x_1)$ $\bar{y}(x_2)$ . . . $\bar{y}(x_i)$
$\sum n_{i,j}$	$n_{y_1} \quad n_{y_2} \quad \dots \quad n_{y_m}$		
$x(y_j)$	$\bar{x}(y_1) \quad \bar{x}(y_2) \quad \dots \quad \bar{x}(y_m)$		

Jadvaldagi ma'lumotlar bo'yicha O_{xy} tekislikda (x_i, y_i) koordinatali nuqtalarni belgilab tarqoqlik diagrammasini tuzish mumkin (1-shakl). Bu diagrammani har bir nuqtasida n_{ik} massa joylashgan), (x_i, y_k) nuqtalar to'plami deb talqin etish mumkin. U holda

$$\bar{y}(x_i) = \sum_k y_k n_{ik} / \sum_k n_{ik}.$$

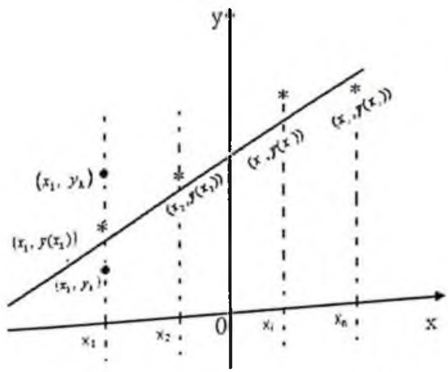
ni $X = x_i$ vertikal to'g'ri joylashgan va y_k ordinataga ega bo'lgan n_{ik} massalarining markazi sifatida talqin etish mumkin. Barcha $(x_i, y(y_i)$ nuqtalarni tutashtirib, X ning Y ga regressiyasining empirik chizig'ini hosil qilamiz.

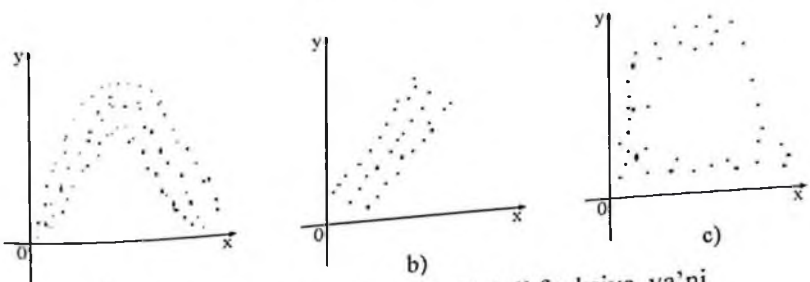
X ning Y ga regressiyasining empirik chizig'i ham xuddi shunday yasaladi, bunda uning har bir nuqtasi $y = y_k$ gorizontal to'g'ri chiziqlarda yotib, x_i absissaga ega bo'ladi.

Shu tarzda regressiya chizig'ining umumiy ko'rinishi haqida tasavvur hosil qilib, regressiyaning empirik funksiyasi tenglamasini eng kichik kvadratlar usuli bilan topish mumkin.

Masalan, quyidagi tarqoqlik diagrammalarini ko'raylik (2-shakl).

Bu yerda a) holda, ravshanki, regressiya chizig'i parabola, b) holda to'g'ri chiziq, v) holda esa korrelyatsiya aftidan mavjud emas deb faraz qilish mumkin.





a) b) c)

Y ning X ga regressiya funksiyasi chiziqli funksiya, ya'ni

$$\bar{y}_x = ax + b$$

deb faraz qilishga asos bo'lsin.

a va b koyffitsentlarni eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha topamiz.

Ordinata bo'yicha $(x_i, \overline{y}_x)$, $i = \overline{1, m}$; $k = \overline{\overline{1, l}}$ koordinatali nuqtaning to'g'ri chiziqdagi mos nuqtalardan chetlanish kvadratlarning yig'indisini qaraymiz:

$$\Delta(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b - \overline{y}_i)^2 \, n_{x_i} \qquad (3.1)$$

$\Delta(a, b)$ni ikkinchi o'zgaruvchining funksiyasi sifatida qarab, a va b uchun shunday qiymatlar topamizki, $\Delta(a, b)$ ning qiymati eng kichik bo'lsin. Bir necha o'zgaruvchili funksiya uchun ekstrmum mavjud bo'lishining zaruriy shartlari uning barcha o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarining nolga teng bo'lishidan iboratdir. Bu shartni Δ ga qo'llaymiz:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} 2(ax_i + b - \overline{y}_i) x_i n_{x_i} \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - \overline{y}_i) n_{x_i} \qquad (3.3)$$

Har ikkala tenglamani $2n$ ga bo'lib va a hamda b ga ega hadlarni guruhlab,
quyidagiga ega bo'lamiz:

$$a\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i}}{n} + b\frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{y_i} n_{x_i}}{n},$$
$$a\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i}}{n} + b\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{y_i} n_{x_i}}{n} \qquad (3.4)$$

Bizga ma'lumki,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i}}{n} = 1, \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i}}{n} = x, \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{y_i n_{x_i}}}{n} = y, \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i}}{n} = x^2, \qquad (3.5)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i y_i n_{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} \frac{\sum_{k=1}^{l} y_i n_{x_k}}{n_{x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{k=1}^{l} y_k n_{i_k} = \frac{\sum_i \sum_k x_i y_k n_{i_k}}{n} = \overline{xy} \qquad (3.6)$$

U holda (2.5) tenglamalar ushbu ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} a\overline{x} + b = \overline{y}, \\ a\overline{x^2} + bx = \overline{xy} \end{cases} \qquad (3.7)$$

Hosil bo'lgan sistemani yechib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y - \bar{y} = p_{y!x}(x - \bar{x}), \qquad (3.8)$$

by yerda $p_{y!x} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^{-2}}$ – Y ning X ga regressiya koeffitsiyenti, σ_x - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishi.

(3.9) tenglama Y ning X ga regressiyasi to'g'ri chizigining tanlanma tenglamasi deyladi.

X ning Y ga regressiya to'g'ri chizigining tanlanma tenglamasi xuddi shunga o'xshash quyidagi ko'rinshda hosil qilish mumkin:

$$x - \bar{x} = p_{y!x}(y - \bar{y}), \qquad (3.9)$$

bu yerda $p_{x!y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^{-2}}$, σ_y – tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Ko'ramizki, tanlanma regressiya to'g'ri chiziqlari $\overline{(x, y)}$ koordinatali nuqtadan, ya'ni massalar markazidan o'tadi va regressiya koeffitsientlari bir xil ishoraga ega, binobarin, tanlanma regressiya to'g'ri chiziqlarining burchak koeffitsientlari bir xildir.

Ilgari, korrelyasiya koeffitsientiga ta'rif berilgan edi, shundan foydalanib tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tushunchasi kiritamiz:

$$r_t = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y}$$

Tanlanma korrelyatsiya koyffitsiyenti r_t korrelyatsiya koeffitsienti

$$r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y}$$

ning bahosi bo'lishini istbot qilish uchun:

r_t ni (3.8) va (3.9) ga qo'yib,

$$P_{xy} = r_1 \frac{\bar{\partial}_y}{\bar{\partial}_x} \qquad (3.10)$$

$$P_{\frac{x}{y}} = r_1 \frac{\bar{\partial}_y}{\bar{\partial}_x} \qquad (3.11)$$

larni topamiz.

U holda tanlanma regressiya to'g'ri chiziqlarining (3.10) va (3.11) tenglamalarni qo'yidagi simmetrik shaklda yozish mumkin:

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r_1 \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \qquad (3.12)$$

va

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = r_1 \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} \qquad (3.13)$$

Misol: To‘g‘ri to‘rtburchak plitkalarning uzunliklari $x(sm)$ va massalari $y(kg)$ bo‘yicha taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Misol: To‘g‘ri to‘rtburchak plitkalarning uzunliklari $x(sm)$ va massalari bo‘yicha $y(kg)$ taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

x \ y	6	8	10	12	14	n_x
30	2	17	9	-	31	31
35	-	10	17	-	36	36
40	-	3	24	13	56	56
45	-	-	6	12	42	42
50	-	-	2	22	35	35
n_y	2	30	58	63	47	200

Regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini tuzing.

Yechish. Agar formulalardan o‘zgaruvchilarni quyidagicha almashtirsak, barcha koeffitsiyentlarning hisoblanishi ancha soddalashadi:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_i}, \qquad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2}$$

C_1 va C_2 - mos ravishda x va y o‘zgaruvchilarning variatsion qatorning taxminan o‘rtasida joylashgan qiymatlar;

h_1 va h_2 - mos ravishda x va y o‘zgaruvchilarning qo‘shni qiymatlari orasidagi masofa.

$C_1 = 40,\ h_1 = 5,\ C_2 = 2,\ h_2 = 2$ deb olamiz, natijada quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz:

v \ u	-2	-1	0	1	2	n_u
-2	2	17	9	3	-	31
-1	-	10	17	9	-	36
0	-	3	24	16	13	56
1	-	-	6	24	12	42
2	-	-	2	11	22	35
n_v	2	30	58	63	47	200=n

Jadval yordamida quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\bar{u} = \frac{\sum u \cdot n_u}{n} = \frac{-2 \cdot 31 - 1 \cdot 36 + 0 \cdot 56 + 1 \cdot 42 + 2 \cdot 35}{200} = 0.07;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum v n_y}{n} = \frac{-2 \cdot 2 - 1 \cdot 30 + 0 \cdot 58 + 1 \cdot 63 + 2 \cdot 47}{200} = 0.62;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{\sum u^2 - nu}{n} = 1.71, \qquad \bar{v}^2 = \frac{\sum v^2 n_v}{n} = 3.16,$$

$$\bar{\sigma}_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = 1{,}3, \qquad \bar{\sigma}_v = \sqrt{v^2 - (\bar{v})^2} = 1{,}67.$$

$\sum n_{uy} n v$ yig'indini hisoblash uchun ushbu hisoblash jadvalini tuzamiz:

v \ u	-2	-1	0	1	2	$V = \sum v n_{uv}$	$u \cdot V$
-2	-4 2 -4	-17 17 -34	0 9 -18	3 3 -6		-18	36
-1	–	10 10 -10	0 17 -17	9 9 -9		-1	1
0	–	-3 3 0	0 34 0	16 16 0	26 13 0	39	0
1	–		0 6 6	24 24 24	24 12 12	48	48
2	–		0 2 4	11 11 22	44 22 -14	55	110
$V = \sum v n_{uv}$	-4	-44	-25	31	56		195
$u \cdot V$	8	44	0	31	112	195	

Korrelyatsion jadval har bir katagining yuqoridagi o‘ng burchagiga vn_{uv} ko‘paytmani yozamiz.

Barcha kataklarning yuqoridagi o‘ng burchagida va quyidagi chap burchagida joylashgan sonlarni qo‘shib, $V = \sum vn_{uv}$ va $U = \sum un_{uv}$ qiymatlarni hosil qilamiz. Barcha uV va Uv ko‘paytmalarni hisoblab, natijalarni q‘shimcha satr va ustunga yozamiz, bunda $\sum V_u = \sum U_v$ko‘paytma nazorat uchun xizmat qiladi. U holda

$$\sum n_{uv}uv = \sum Vu = \sum Uv.$$

Ushbu formula bo‘yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_i = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{195 - 200 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}062}{200 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}67} \, 0{,}43.$$

Endi regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tenglamalarni tuzamiz:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_i \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}(x - \bar{x}),$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_t \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y}(y - \bar{y}).$$

$\bar{x}$ va $\bar{y}$ lar uchun $\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1$, $\overline{y = \bar{u}h_2 + C_2}$, formulalarni osonligini hosil qilish mumkin. Shuning uchun

$$\bar{x} = 0{,}07 \cdot 5 + 40 = 40{,}35,$$

$$\bar{y} = 0{,}62 \cdot 2 + 10 = 11{,}24,$$

$$\bar{\sigma}_x = h_1\bar{\sigma}_u = 6{,}5, \qquad \bar{\sigma}_y = h_2\bar{\sigma}_v = 3{,}34.$$

U holda X ning Y ga tanlanma regressiya to‘g‘ri chizig‘i tenglamasi esa

$$\bar{y}_x - 11{,}24 = 0{,}43\frac{3{,}34}{6{,}5}(x - 40{,}35) \;\; yoki \;\; \bar{y}_x = 0{,}22x + 2{,}32$$

ko‘rinishda, X ning Y tanlanma regressiya to‘gri chizig‘i tenglamasi esa

$$\bar{x}_y = 0{,}84y + 30{,}94$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Yunusov I.I., Artikov A.A., Hamidov B.T. «Kimyo Biotexnologik tizimlari sintezi» ma'ruza matnlari Toshkent: TKTI, 2005 y.

2. Yunusov I.I., Artikov A.A., Hamidov B.T. «Kimyo Biotexnologik tizimlari sintezi» laboratoriya ishlarini bajarish bo'yicha uslubiy ko'rsatma Toshkent: TKTI, 2005 y.

3. Yynusov I.I., Artikov A.A., Ismatullaev P.R. Kimyo va oziq-ovqat texnologiyasida EHM ni qo'llash Toshkent: TKTI, «NISIM». 2001

4. Sh. Sh. Shohamidov. Amaliy matematika unsurlari. Toshkent, "Fan va texnologiya", 2004 yil, 212 b.

5. Закгейм А.Ю., Шишилов О.Н., Кацман Е.А. Под ред. Закгейма А.Ю., -Учебно-методическое пособие. Москва. ИПЦ МИТХТ им. М.В. Ломоносова, **2010 г.**

6. Yynusov I.I., Hamidov B.T. Kimyo texnologiya tizimlari sintezi fanidan talabalaming mustaqil ishlarini tashkil etish. - Uslubiy qo'llanma. TKTI. 2009 y.

7. Zaynutdinov H.S. va boshq. Farmatsevtika ishini tashkil qilish va iqtisodiyoti. Tibbiyot kollejlari uchun o'quv qo'llanma (2-nashri).T. «ILM ZIYO», 2016. -448 b.

8. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad12, Mathlab 7, Maple 9. 2007

9. Очков В.Ф. "Советы пользователям Mathcad". (Второй выпуск, советы 100-...) Mathcad 2001 – что нового. Компьютер Пресс, 4'2001

10. Eshdovlatov B. Informatika kurs ishlari uchun uslubiy qo'llanma.T.,2011 y.

11. Boyzaqov A., Qayumov Sh. Hisoblash matematika asoslari. T., 2000 y/Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O'zbekiston", 2003

12. Shohamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari»,T., "O'zbekiston", 1997

13. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O'quv qo'llanma. Toshkent 2000.

14. N.R.Yusupbekov, D.P.Muxitdinov. Texnologik jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish asoslari. -T.: «Fan va texnologiya», 2015, 440 bet.

15. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М., 1984. – 295 с.

16. Гилярова, М. Г. Математика для медицинских колледжей / М. Г. Гилярова. –Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 416 с.

17. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток [Электронный ресурс] // Poznayka.org. – Режим доступа: https://poznayka.org/s8157t1.html. – Дата доступа: 19.03.2019.

18. Рубецков, Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней / Д. И. Рубецков // Известия Вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – № 2. –С. 69–87.

19. Гурман В.Е Теории вероятностей и математической статистике. М.: Высщая школа, 2003.

20. Yaxshiboyev M.U., Hamrayev A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to‘plami, 3-qism. 2014.

MUNDARIJA

A.M. VOXIDOV, M.R.MALIKOV,
S.B.ABDULLAYEVA, D.A.VOXIDOV

AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

(farmatsiya yo'nalishida tahsil olayotgan talabalarga mo'ljallangan)

I - QISM
(o'quv qo'llanma)

Muharrir: G.Rahimova
Musahhih: Sh.Abduraximov
Tex.muharrir: H.Amirdinov

Nashriyot tasdiqnomasi:
№ 1243-7560-5999-432c-2125-1811-8655

Bosishga ruxsat etildi: 19.07.2022-yil.
Ofset bosma qog'ozi. Qog'oz bichimi 60x84 1/12.
"Times New Roman " garniturasi. Ofset bosma usuli.
Hisob-nashriyot t.: 8,5. Shartli b.t.: 5,2.
Adadi: 100 nusxa. Buyurtma №09/1.

SamDCHTI nashr-matbaa markazida chop etildi.
Samarqand sh., Bo'stonsaroy ko'chasi, 93-uy.