Бозоров Э.Х., Кубаев А.Э

МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ АН УЗБЕКИСТАН

**Бозоров Э.Х
Кубаев А.Э**

МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО

Учебно-методическое пособие

Самарканд – 2024

УДК: 616.95

Бозоров Э.Х., Кубаев А.Э. Метод Монте-Карло. Учебно-методическое пособие. – Самарканд: Издательство «СамГИИЯ», 2024. – 25 стр.

Учебно-методическое пособие составлен на основе лекционного курса "основы математического моделирования", который преподается бакалаврам направления методическое применение - математическое моделирование. Рассмотрены основные понятия математического моделирования. Представлены математические модели и принципы их построения. Описаны примеры математических моделей в физике, химии, биологии. Пособие предназначено для студентов вузов, аспирантов и специалистов, изучающих процессы математического моделирования.

Мы благодарим авторов учебников на основе педогогического анализа материалов, написанных в рамках инновационного проекта под названием "создание мультимедийных учебников для бакалавров и магистров в областях ядерной энергетики, ядерной медицины и технологий", "радиационная медицина и технологии" № AM-PZ-2019062031.

Рецензенты: Институт ядерной физики УзР АН, старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., доцент: **Н.Сулаймонов**

Заведующий кафедрой "Информатика, информационные технологии" Самаркандского государственного медицинского университета, доцент: **С.А.Карабаев**

Рекомендовано учебно-методическим советом СамГМУ в качестве учебно-методического пособия приказ № 3 от 1 ноября 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Различные элементы математического моделирования применялись одновременно споявлением точных наук. С данным фактом связано то, что часть из них носят имена Корифеев науки, например, Ньютона и Эйлера, а сло- во «алгоритм» происходит от имени средневекового ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х — начала 50-х годов XX века и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами: появлением компьютеров, хотя и скромных по нынешним меркам, но тем не менее избавивших ученых от огромной по объему рутинной вычислительной работы, и беспрецедентным социальным заказом на выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Спомощью математического моделирования данная задача была решена. Напервом этапе ядерные взрывы и полеты ракет моделировались посредством ЭВМ, ауже впоследствии были реализованы напрактике. Данный факт способствовал дальнейшему развитию методологии моделирования, без который в настоящее время не реали- зуется ниодни крупномасштабный технологический, экологи- ческий или экономический проект.

Технические, экологические, экономические и иные си- стемы, изучаемые современной наукой, больше не поддают- ся исследованию обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих си- стем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. По этому математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Математическое моделирование, являясь методологией, используется как инструмент внаучных дисциплинах подобно математике, физике и биологии и не конкурирует с ними. Практически во всех сферах творческой деятельности применяется моделирование, начиная от исследователей и заканчивая военачальниками. Математическое моделирование должно обеспечиваться выполнением следующих требований: четкая формулировка основных понятий и предположений, основанная наопыте (апостериорный), анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и т.д. При моделировании трудноформализуемых объек- тов нужно дополнительно учитывать разграничение математических и нематематических терминов, а также особенности использования существующего математического аппарата к из- учению объектов.

1. МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО

При существовании теоретического описания метода напротяжении длительного периода времени метод Монте–Карло получил широкое распространение только споявлением ЭВМ, т.е. задача генерации и использования в расчетах случайных величин достаточно трудоемкая задача.

Метод Монте–Карло — общее название группы численных методов, основанных наполучении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали саналогичными величинами решаемой задачи . Название метода происходит отодноименного города вкняжестве Монако, где развита игорная индустрия, поскольку наи- более простым механическим устройством для генерации случайных величин является рулетка.

1.1 История метода Монте–Карло

Возникновение идеи использования случайных явле- ний в области приближенных вычислений принято относить к 1878 году, когда появилась работа Холла об определении чис- ла □□с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу. Существо дела заключается в том, чтобы экспериментально воспроизвести событие, вероятность которого выражается через число □, и приближенно оценить эту вероятность. Метод Монте–Карло был впервые предложен в 1949 г. Метрополисом и Уламом в статье «Метод Монте–Карло» американского журнала ассоциации статистиков. Создателями метода считают Дж. Неймана и С. Улама. Отечественные работы по методу Монте–Карло появились в 1955–1956 годах. С того времени накопилась обширная библиография по методу Монте–Карло. Даже беглый просмотр названий работ позволяет сделать вывод о применимости метода Монте–Карло для решения прикладных задач из большого числа областей науки и техники.

Первоначально метод Монте–Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались мало пригодными. Далее его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. Метод Монте–Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной мате- матики (например, развитие методов численного интегрирования) и при решении многих задач успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как есте- ственностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

1.2 Принципы получения случайных величин на ЭВМ

Наиболее простым механизмом получения случайных величин является рулетка, где неподвижная стрелка в момент остановки вращающегося диска с цифрами указывает на конкретное значение случайной величины.

Циклическим процессом запуска и остановки рулетки с по следующим объединением полученных в каждом цикле цифр в группы можно составлять таблицу случайных цифр. Более миллиона цифр содержит самая большая подобная таблица.

Достаточно сложной задачей является получение таблиц случайных чисел. Для создания подобной таблицы необходима ее проверка, поскольку физический прибор генерирует отличные от равномерного распределения случайные числа. При работе с большими таблицами случайных чисел необходим большой объем памяти, который будет занимать соответствующий файл, хранящий данную таблицу.

Наиболее простым решением в данном случае было бы подключение рулетки кЭВМ. При этом быстродействие генерации случайных чисел значительно снизится. В этой связи наиболее эффективным генератором случайных величин будут являться шумы в электронных лампах при реализации следующего алгоритма: при превышении порогового значения уровня шума четное количество раз в разряд будет устанавливаться едини- ца, в противном случае — ноль.

На практике количество генераторов равно сумме разрядов псевдослучайного числа, в которые записываются нули и единицы. При этом на каждом шаге формируется одно полноразрядное число, имеющее равномерное распределение в интервале .

Недостатки этого метода генерации:

1) Вероятное отсутствие равновероятности нулей и единиц из-за неисправности электронных генераторов шума.

2) Невозможность воспроизводимости случайной последо- вательности чисел с целью проверки работоспособности программы.

Псевдослучайные числа

Применение указанных выше датчиков в ЭВМ является достаточно дорогостоящим, поскольку случайные числа в расчетах используются редко. В качестве решения указанной проблемы возможно использование псевдослучайных чисел. Получение псевдослучайных чисел выполняет ЭВМ на основе алгоритмов и функций, заложенных в математическом опи- сании. Указанные алгоритмы и функции постоянно проверя- ются, поэтому качество генерации псевдослучайных чисел как правило обеспечивается. Однако, поскольку все действия ЭВМ заранее запрограммированы, псевдослучайные числа, получен ные таким образом, трудно назвать случайными. В целях объективного применения псевдослучайных последовательностей необходимо понимать их особенности. Определим сначала, что называется псевдослучайным числом. К таким числам относятся числа, рассчитанные, как правило, по рекуррентной формуле и удовлетворяющие ряду требований, свойственных случайной величине.

Дж. фон Нейман в 1951 г. разработал первый алгоритм создания последовательности псевдослучайных чисел, который называется метод середины квадратов, заключающийся в следующем:

Пусть задано произвольное 4-значное целое число n_1 = 5243. При возведении его в квадрат получается 8-значное число n_1^2 = 27489049. Берем 4 средние цифры из этого числа и обозначаем их как n_2= 4890. После возведем уже новое число в квадрат n_2^2 = 23912100 и берем следующие 4 средние цифры. В результате получается число n_3 = 9121. Продолжая указанные рекуррентные действия, будем иметь n_4 = 1926; n_5 = 7094; n_6 = 3248 и т.д. Таким образом, псевдослучайная последовательность чисел записывается в следующем виде: 0,5243; 0,4890; 0,9121; 0,1926; 0,7094; 0,3248 и т.д.

Из указанного выше простого алгоритма были созданы более сложные. Однако механизм генерации последовательности псевдослучайных чисел не изменился и заключается в последо- вательном получении следующего значения из предыдущего.

Преимущества методов получения псевдослучайных чисел:

1) Скорость получения случайных чисел пропорциональ- на быстродействию работы ЭВМ, поскольку необходимо минимальное количество простых операций для получения псевдослучайного числа.

2) Алгоритмы и программы генерации псевдослучайных чисел очень простые за счет применения рекуррентных формул.

3) Воспроизводимость последовательности псевдослучайных чисел.

4) Возможность постоянного использования последовательности псевдослучайных чисел воднотипных задачах без дополнительных процедур по их аттестации и описания изменения параметров.

1.3 Сущность метода Монте–Карло

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно:

$$M(X) = a.$$

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ и принимают x в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \Box a^* \Box\Box x.\!-\!- \quad (1)$$

Поскольку метод Монте–Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют методом статистических испытаний. Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти ее возможные значения. В частности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка.

Метод Монте–Карло применяется очень часто, порой некритично и неэффективным образом. Он имеет некоторые очевидные *преимущества*:

1. Он не требует никаких предложений о регулярности, за ис- ключением квадратичной интегрируемости. Это может быть полезным, так как часто случайная величина — очень сложная функция, чьи свойства регулярности трудно установить.

2. Он приводит к выполнимой процедуре даже в многомерном случае, когда численное интегрирование

неприменимо, например, при числе измерений, большем 10.

3. Его легко применять при малых ограничениях или без предварительного анализа задачи.

Он обладает, однако, некоторыми *недостатками*, а именно:

1. Границы ошибки не определены точно, но включают некую случайность. Это, однако, более психологическая, чем реальная, трудность:

2. Статическая погрешность убывает медленно.

3. Необходимость иметь случайные числа.

1.4 Оценка погрешности метода Монте–Карло

Пусть для получения оценки a^* математического ожидания M случайной величины X было произведено n независимых испы- таний (разыграно n возможных значений X) и по ним была най- дена выборочная средняя x, которая принята в качестве искомой оценки: a^* □□x. Ясно, что если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения X, следовательно, другая средняя, а значит, и другая оценка a^*. Уже отсюда следует, что получить точную оценку математического ожидания невозмож- но. Естественно возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся отысканием лишь верхней границы δ до- пускаемой ошибки с заданной вероятностью (надежностью) γ:

$$P(X \square a \square \square) \square \square \square. \qquad (2)$$

Интересующая нас верхняя грань ошибки δ есть «точность оценки» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов. Рассмотрим следующие три случая.

1. Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратичное отклонение δ известно. В этом случае с надежностью □□верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (3)$$

где n — число испытаний (разыгранных значений X); t — значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, σ — известное среднее квадратичное отклонение X.

2. Случайная величина X распределена нормально, причем ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. В этом случае с надежностью γ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}, \qquad (4)$$

где

n — число испытаний;

s — «исправленное» среднее квадра- тическое отклонение,

$t\gamma$ - находят по табличным значениям.

3. Случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального. В этом случае при достаточно большом числе испытаний ($n > 30$) с надежностью, приближенно равной γ, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (3), если среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X известно; если же □□неизвестно, то можно подставить в формулу (3) его оценку s — «исправленное» среднее квадратическое отклонение либо воспользоваться формулой (4). За- метим, что чем больше n, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному. Из изложенного следует, что метод Монте–Карло тесно связан с задачами теории вероятностей, математической статистики и вычислительной математики. В связи с задачей моделирования случайных величин (в особенности равномерно распределенных) существенную роль играют также методы теории чисел.

Среди других вычислительных методов метод Монте–Карло выделяется своей простотой и общностью. Медленная сходимость является существенным недостатком метода, однако, могут быть указаны его модификации, которые обеспечивают высокий порядок сходимости при определенных предположе ниях. Правда, вычислительная процедура при этом усложняется и приближается по своей сложности к другим процедурам вычислительной математики. Сходимость метода Монте–Карло является сходимостью по вероятности. Это обстоятельство вряд ли следует относить к числу его недостатков, ибо вероятностные методы в достаточной мере оправдывают себя в практических приложениях. Что же касается задач, имеющих вероятностное описание, то сходимость по вероятности является даже в какой-то мере естественной при их исследовании.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ–КАРЛО К МОДЕЛИРОВАНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Суть решения физических задач методом Монте–Карло заключается в том, что физическому явлению сопоставляется имитирующий вероятностный процесс, отражающий его динамику (другими словами, каждому элементарному акту процесса сопоставляется некоторая вероятность его осуществления). Затем этот процесс реализуется с помощью набора случайных чисел. Интересующие нас значения физических величин находятся усреднением по множеству реализаций моделируемого процесса.

Основным преимуществом метода Монте–Карло по сравнению с классическими численными методами состоит в том, что с его помощью можно исследовать физические явления практически любой сложности, которые иначе решить просто невозможно. Например, решить уравнения, описывающие взаимодействие двух атомов, будет сравнительно несложно, однако решить такую же задачу для сотни атомов уже не реально. Кроме того, для метода Монте–Карло часто характерна простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания (шага модели). Затем это испытание повторяется необходимое число раз, причем каждый последующий шаг не зависит от всех остальных.

Метод Монте–Карло можно также назвать «теоретическим экспериментом». Действительно, если точно известны законы элементарных актов, а вместе с ними и вероятности элементарных событий, результаты, получаемые этим методом, были бы подобны экспериментальным данным.

2.1 Использование монте-карло моделирования для оценки дозовых нагрузок на органы и ткани пациента во время рентгенологических исследований

В настоящее время широкое применение для целей дозиметрии рентгенологических исследований в медицине приобрели численные методы расчета переноса ионизирующего излучения, в частности метод Монте-Карло. [1]. Это было обусловлено бурным развитием вычислительной техники и созданием весьма эффективных программных продуктов, таких как EGS [2], MCNP [3] и MCNPX [4]. Для работы названных программных продуктов требуются такие исходные данные для расчета дозы в теле человека, как модель объекта облучения и модель источника рентгеновского излучения. Настоящая работа посвящена моделированию источника рентгеновского излучения и созданию программы оценки дозы облучения различных органов во время типичных рентгенологических исследований (требуемый для таких исследований энергетический диапазон лежит выше 40 кэВ и не охватывает маммографию). Анализ вопросов, связанных с разработкой эффективной модели спектра рентгеновской трубки для дозовых вычислений, показал, что проблему вычисления дозовых нагрузок на все тело человека и его отдельные органы во время радиологических процедур целесообразно решать в два этапа. На первом этапе рассчитывается распределение дозы для моноэнергетического источника гаммаквантов. На втором этапе проводится свертка моноэнергетического отклика со спектром излучения реального рентгеновского источника. Это разбиение обусловлено исключительно сложностью разработки эффективной модели рентгеновской трубки, справедливой для широкой области изменения более чем десятка параметров, описывающих различные режимы работы рентгеновских аппаратов разного типа. Таким образом, на первом этапе для заданных геометрических параметров рентгенологической процедуры (расстояние источник-поверхность объекта облучения (РИП), пол облучения, координаты центрации пучка, угол проекции и наклон в вертикальной плоскости, размер фокуса) рассчитываются дозовые распределения D(r,E) для любой выбранной точки r облучаемого объекта при фиксированной энергии источника гамма-квантов E. Предполагается, что испускаемые источником гамма-кванты равномерно распределены по фокусному пятну трубки. На этапе разработки, в качестве объекта облучения был взят антропоморфный физический фантом типа Алдерсона – Рендо. Фантом просканировали на компьютерном томографе с целью получения его томографических изображений. Томограммы были затем использованы для создания воксельной модели фантома. Дальнейшая работа проводилась с использованием разработанной воксель ной модели фантома. Соответствующая система координат. принятая при описании фантома Алдерсона – Рендо, показана на рис. 1. Один из вариантов базовой координатной сетки для вычисления объемных дозовых распределений в воксельной модели фантома типа Алдерсона – Рендо (приведен на рис. 2 для сечения z = 46 см, соответствующего разрезу на уровне легких). Точками обозначены места локализации детекторов определенного типа. В задаче оценки поглощенной дозы различными тканями при рентгенографических исследованиях разумно выбрать в качестве элементарного детектора точечный детектор MCNP с неаналоговым ускорением набора необходимой статистики. В указанном слое размещено 108 точечных детекторов MCNP.

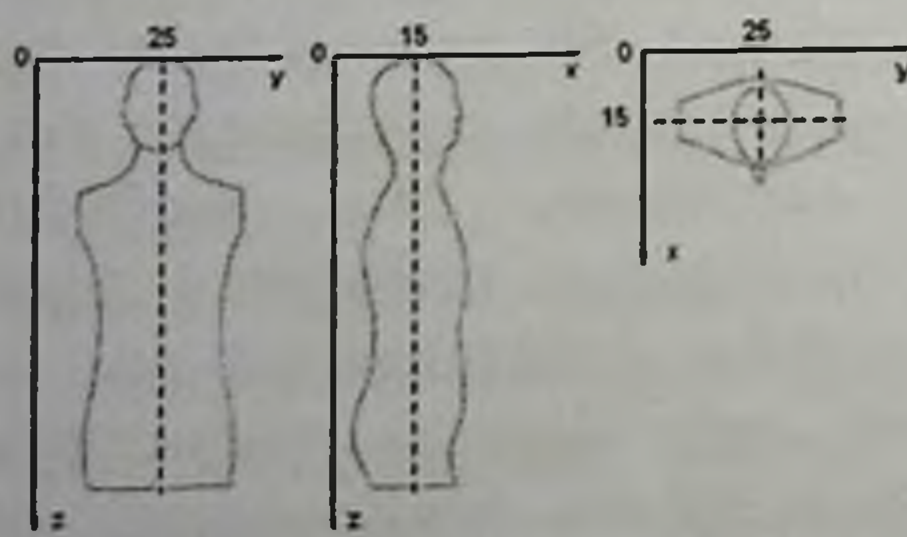


Рис. 1. Система координат для фантома Алдерсона – Рендо

Дискретный шаг в пространстве определяется схемой размещения точечных детекторов MCNP в облучаемом теле.

Выбор шага дискретизации энергетической области определяется спектром рентгеновской трубки, который зависит от анодного напряжения. Этот шаг должен быть подобран таким образом, чтобы воспроизводились все особенности спектра рентгеновской трубки, в частности пики характеристического рентгеновского излучения. Это означает, что для практических целей дискретный шаг в энергетической области должен быть неравномерным – сравнительно большим в области вне пиков характеристического излучения и достаточно мелким в области этих пиков. Окончательный результат для пространственного распределения поглощенной дозы в фантоме будет являться интегральной сверткой моноэнергетического отклика D(r,E) с энергетическим спектром G0 (E) рентгеновской установки в ее фокусе:

$$D(\bar{r}) = \int D(\bar{r}, E) G_0(E) dE. \qquad (1)$$

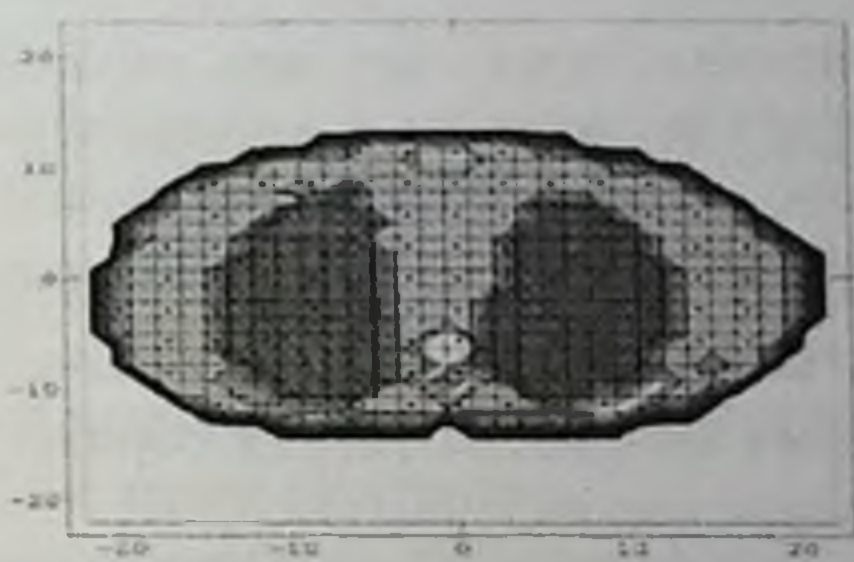


Рис. 2. Один из вариантов базовой координатной сетки для вычисления объемных дозовых распределений в фантоме Алдерсона – Рендо z = 46 см (108 точечных детекторов MCNP в слое)

Фактически, в связи с использованием воксельного фантома, дозовые распределения D(r,E) должны быть рассчитаны для сетки точечных детекторов MCNP для параллелепипеда, разбитого на множество объемных вокселей. Пространственное распределение D(r,E) затем используется для расчета соответствующей дозы в выделенном органе. Несмотря на то что формула (1) в принципе решает задачу вычисления поглощенной дозы в органе от любого источника рентгеновского излучения путем разбиения ее на две части: вычисление дозы от моноэнергетического источника и последующую ее свертку с выбранным модельным спектром рентгеновского аппарата, она оказалась практически неприменимой по техническим причинам. К сожалению, на компьютере с частотой процессора 3 ГГц расчет дозового распределения D(r,E) для моноэнергетического источника с энергией E для одной проекции облучения при фиксированных остальных параметрах длится семь дней. Поэтому в связи с практической невозможностью проведения расчетов с моноэнергетическим источником основное внимание было уделено разработке эффективной модели рентгеновского источника.

2.2 Метод Монте-Карло — один из самых полезных алгоритмов в ИТ

Сегодня сложная тема, но мы объясним её просто и понятно. Разговор пойдёт про алгоритмы и немного про математику.

Методы Монте-Карло — это набор методов в математике для изучения случайных процессов. Случайных — это когда что-то в них происходит непредсказуемым образом, например:

подбрасываем монетку;

кидаем кубик;

опускаем жетоны в ячейки со столбиками;

ловим элементарные частицы;

считаем столкновения молекул;

и что угодно ещё, что происходит полностью случайно и что нельзя предсказать заранее.

Смысл методов Монте-Карло в том, чтобы использовать данные случайных событий, чтобы на их основе получить более-менее точные результаты каких-то других вычислений. Они не будут идеально и математически точными, но их уже будет достаточно, чтобы с ними полноценно работать. Иногда это проще и быстрее, чем считать всё по точным формулам.

Пример такого вычисления — построение маршрута в навигаторе. В исходном виде это задача коммивояжёра, которая требует колоссальных вычислительных ресурсов. Но благодаря приближённым методам с ней справится даже не самый мощный телефон. Один из таких методов — метод Монте-Карло.

В чём идея метода

Если совсем примитивно, то работает так:

Вместо того чтобы строить сложную математическую модель, мы берём простую формулу и пуляем в неё случайные числа. Считаем результат по каждому числу и получаем результат с нужной нам точностью. Чем больше случайных чисел — тем точнее результат.

Вот то же самое немного подробнее:

1. Выбираем, что мы хотим найти или посчитать — значение формулы, площадь, объём, распределение материала или что-то ещё.

2. Смотрим, как это считается в математике, и находим нужные формулы.

3. На основе формул составляем критерий проверки — если случайное значение попало в этот критерий, мы его учитываем как совпавшее число, а если не попало — как не совпавшее.

4. Запускаем алгоритм, который выдаёт случайные числа, и проверяем каждое по этому критерию.

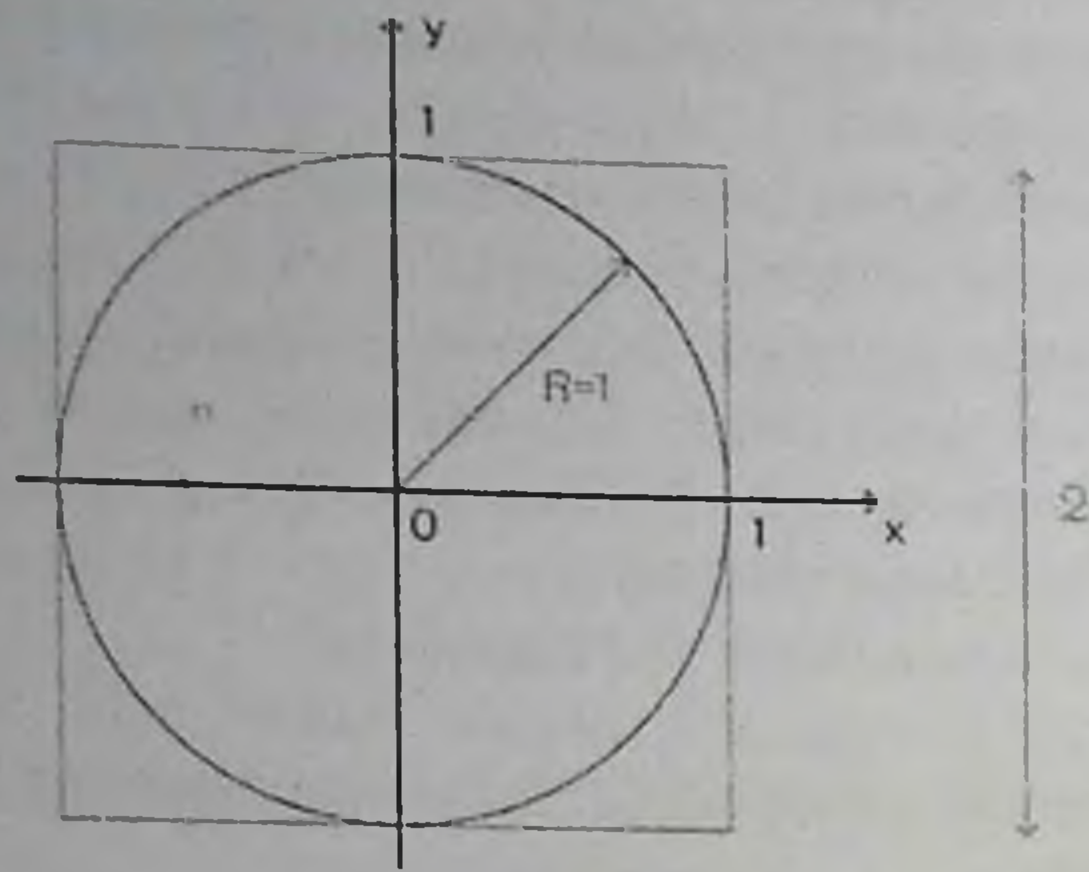
5. Как наберётся достаточное количество случайных чисел — считаем результат. Обычно это соотношение чисел, которые попали в критерий и которые не попали.

Чем больше будет случайных чисел — тем точнее результат.

Плюс этого метода в том, что нам не нужно запрягать весь математический аппарат для решения задачи — достаточно подставлять числа в формулу и смотреть, получилось верное значение или нет.

2.3 Как найти число пи методом Монте-Кар

Для примера покажем классическое использование метода Монте-Карло — найдём число пи. Для этого нам понадобится круг, вписанный в квадрат, причём у круга радиус будет равен 1. Это значит, что сторона квадрата равна 2 — это диаметр (или два радиуса) круга:



В этот квадрат мы будем случайным образом кидать песчинки и смотреть, попадут они в круг или нет (но останутся в границах квадрата). Исходя из этого набора данных мы можем посчитать отношение всех песчинок, которые попали в круг, ко всем песчинкам.

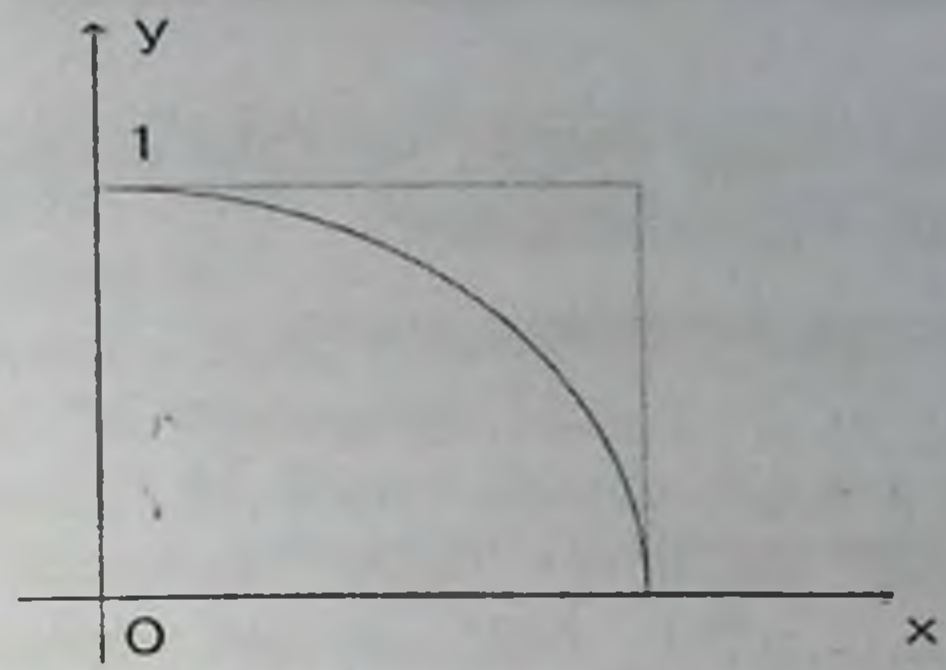
Теперь смотрим на формулы:

- площадь квадрата со стороной 2 равна четырём;
- площадь круга радиусом 1 равна $\pi R^2 \rightarrow \pi \times 1^2 = \pi$.

Если мы разделим площадь круга на площадь квадрата, то получим π / 4. Но мы ещё не можем по условию посчитать площадь круга, потому что мы не знаем число π. Вместо этого мы можем разделить количество одних песчинок на другие — в этом и суть метода Монте-Карло.

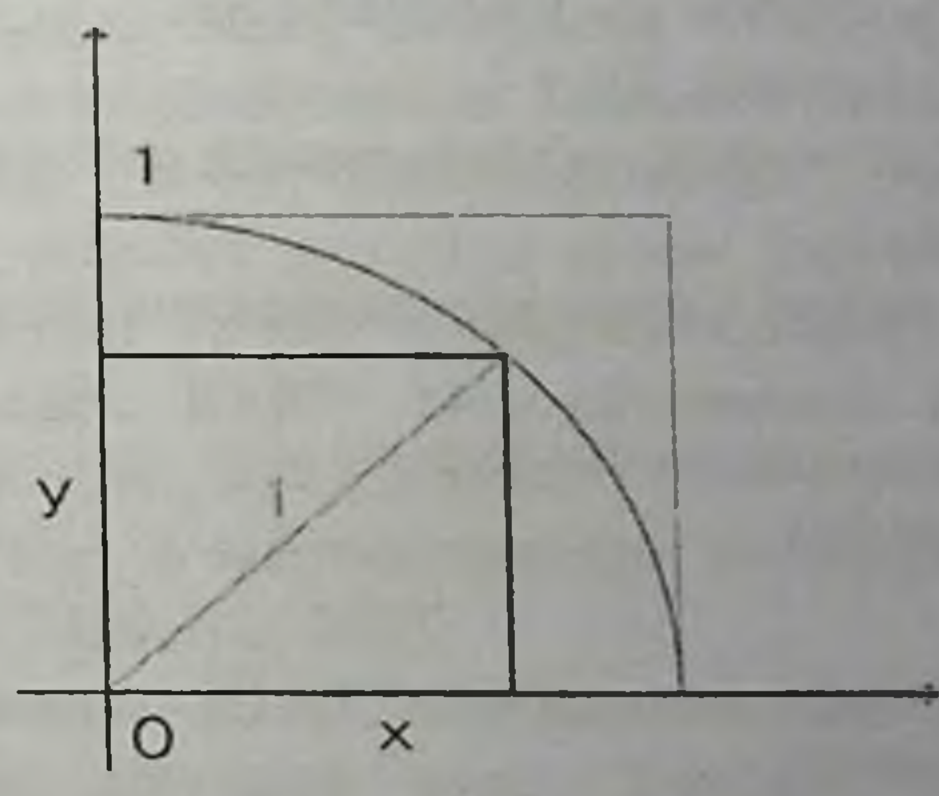
Это соотношение даст нам результат — π / 4. Получается, что если мы умножим этот результат на 4, то получим число π, причём чем больше песчинок мы кинем, тем точнее будет результат.

Кидать песчинки будем так: в качестве координат попадания X и Y будем брать случайные числа от 0 до 1. Это значит, что все числа попадут только в один квадрант — правый верхний:



Но так как в этом квадранте ровно четверть круга и ровно четверть квадрата, то соотношение промахов и попаданий будет таким же, как если бы мы бросали песчинки в целый круг и целый квадрат.

Чтобы проверить, попадает ли песчинка в круг, используем формулу длины гипотенузы: $x^2 + Y^2 = 1$ (так как гипотенуза — это радиус окружности):



Если длина гипотенузы меньше единицы — точка попадает в круг. В итоге мы посчитаем и общее количество точек, и точек, которые попали в круг. Потом мы разделим одно на другое, умножим результат на 4 и получим приближённое значение числа π.

2.4 Программируем поиск числа π по методу Монте-Карло

Алгоритм на языке Python, читайте комментарии, чтобы лучше разобраться в происходящем:

```
# подключаем модуль случайных чисел
import random

 # функция, которая посчитает число пи
def count_pi(n):
        # общее количество бросков
   i = 0
        # сколько из них попало в круг
   count = 0
   # пока мы не дошли до финального броска
   while i < n:
 # случайным образом получаем координаты x и y
      x = random.random()
      y = random.random()
      # проверяем, попали мы в круг или нет
      if (pow(x, 2) + pow(y, 2)) < 1:
                # если попали — увеличиваем счётчик на 1
         count += 1
                # в любом случае увеличиваем общий счётчик
      i += 1
   # считаем и возвращаем число пи
   return 4 * (count / n)

# запускаем функцию
pi = count_pi(1000000)
# выводим результат
print(pi)
```

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Метод Монте-Карло.Илья Меерович Соболь М.: Наука, 1968. 64 с.Тираж 79000 экз. Серия Популярные лекции по математике, выпуск 46
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование.– М. Физматлит. 2005.
3. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс; Невский Диалект, Бином. Лаборатория знаний - Москва, 2009. - 192 с.
4. Калинина Дарья Папа Карло из Монте-Карло; Эксмо - Москва, 2013. - 320 с.
5. Новожилов Б. Н. Метод Монте-Карло; Знание - Москва, 2008. - 317 с.
6. Соболь И. М. Метод Монте-Карло; Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука" - Москва, 2010. - 319 с.
7. Соболь, И.М. Метод Монте-Карло; М.: Наука - Москва, 2012. - 191 с.
8. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. Ташкент, Университет. 2002 г.
9. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: учеб. пособие для студ вузов/ Зарубин В.С.-2-е изд..- Москва.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. -496 с.
10. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. – М., УРСС, 2003.
11. Введение в математическое моделирование. Под.ред. В.П.Трусова. – М.Логос. 2005.
12. Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: Учебное пособие / Ю.Ю. Тарасевич. - М.: ЛИБРОКОМ, 2013. - 152 с.
13. Галушко, В. А. Г16 Электротехника и основы электроники: учеб.-метод. пособие для для студентов факультета — Управление процессами перевозокǁ / В. Н. Галушко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.– Гомель : БелГУТ, 2012. – 186 с

14. Арнольд В.И. Жесткие и мягкие математические модели. М., МСНМО. 2000.

15. Дмитрий Златопольский: Основы программирования на языке Python; Редактор · Мовчан Д. А.; Издательство · ДМК-Пресс, 2018 г. ; ISBN · 978-5-97060-641-4 ;

16. Х.С Далиев, Э.Х Бозоров в/б. Медицинская электроника. -Т.:, «Fan va texnologiya», 2019,400 стр.

17. Бозоров Э.Х. Медицинская информатика. -Т.: «Fan va texnologiya», 2019,352 стр.

Бозоров Э.Х
Кубаев А.Э

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Учебно-методическое пособие

Издательство, «Самаркандский государственный институт иностранных языков» – 2024
Адрес: 140104, г. Самарканд, ул. Бустонсарой, д. 93.

Редактор: С. Каримова
Корректор: З. Усманова
Тех.редактор: Ш. Абдурахимов

Лицензия на печать:

4268

Потверждение издательство:
№ 1243-7560-5999-432с-2125-1811-8655

Подписано в печать 15.01.2024 г.
Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага офсетная. Объем 2,0 п.л.
Отпечатано офсетным способом. Тираж 100 экз. Заказ №15/01.

Отпечатано в типографии СамГИИЯ.
Адрес: г. Самарканд, ул. Бустонсарой, д. 93.