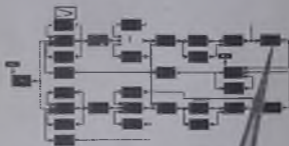


*Имаев Д.Х., Ковальски З., Яковлев В.Б.,  
Кузьмин Н.Н., Пошихонов Л.Б., Цапко Г.П.*

# АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ



**CLASSIC**



Санкт-Петербург, Гданьск, Сургут, Томск

1998

УДК 681.5  
ББК 32.965  
И

Д.Х.Имась, З.Ковальски, Н.Н.Кузьмин, Л.Б.Пошехонов, Г.П.Цапко, В.Б.Яковлев  
«АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ» ТЕОРИЯ. МЕТОДЫ. При-  
меры решения типовых задач с использованием персонального компьютера.  
Гданьск, Санкт Петербург, Сургут, Томск, 1997, - 172 с.

ISBN

Рассматриваются модели, задачи исследования, методы анализа и синтеза линейных динамических систем управления. Приводятся примеры решения типовых задач. Основное внимание уделено методам расчета в частотной области.

Желающим получить навыки решения конкретных задач будут полезны предлагаемые практические занятия. При наличии персонального компьютера с установленной программой CLASSiC такие занятия дадут возможность получить достаточно глубокие знания в области анализа и синтеза систем управления.

Предназначена для специалистов в области управления техническими объектами и процессами, преподавателей и студентов вузов.

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 550200 - "Автоматизация и управление" и специальности 210100 - "Управление и информатика в технических системах".*

*Директору издательству  
И.И.И.И.И.  
И.И.И.И.И.  
И.И.И.И.И.  
И.И.И.И.И.*

## Предисловие

В последние десятилетия резко возрос объем материала, включаемого в курсы теории управления технических вузов. Компьютеризация обучения является сегодня, по-видимому, единственным средством, позволяющим достичь компромисса между широтой охвата материала и глубиной его освоения.

Наличие программных средств, использующих вычислительные, интерактивные и графические возможности компьютеров, дает возможность создавать привычные образы структур систем и характеристик их поведения. В случае относительно простых систем предельно упрощается построение частотных характеристик и траекторий корней, получение временных характеристик и реакций на заданные воздействия, вычисление показателей качества и т.д. Легко преобразуются друг в друга различные формы представления моделей, что позволяет отказаться от преимущественной ориентации на какую-либо одну форму. Анализ констатирующего типа, например, выявление факта устойчивости, инвариантности или малой чувствительности систем, может дополняться исследованиями, позволяющими объяснить зависимость этих свойств от принципов управления и структур систем, от алгоритмов управления и значений параметров элементов.

Применение персональных компьютеров при изучении и использовании методов теории управления требует наличия адекватного программного и методического обеспечения. Полномасштабные коммерческие программы (*MATLAB/SIMULINK* фирмы *The MathWorks, Inc.* [33], *MATRIX<sub>x</sub>* фирмы *Integrated Systems, Inc.* [28] и др.) в силу своей универсальности и ориентации на задачи проектирования сложных систем требуют значительных усилий на их освоение, что не всегда удобно при их непосредственном использовании в учебном процессе по основам теории управления. Применение программы *СС* фирмы *Systems Technology, Inc.* [35] также вызывает определенные трудности.

В последние годы получают распространение малые и средние специализированные программы для изучающих основы теории управления [32]. К классу средних можно отнести программу *CLASSiC*, разработанную сотрудниками Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета и Гданьской Политехники. Алгоритмическая основа программы *CLASSiC* во многом заимствована у комплекса программ *АРДИС* для *СМ ЭВМ* [16]. Графические и интерактивные возможности персональных компьютеров позволили создать качественно новое программное средство *CLASSiC* для компьютеров типа *IBM-PC* [10,27].

Книга предназначена для изучения классических, преимущественно частотных методов расчета систем управления. Применительно к одномерным системам автоматического регулирования эти методы получили широкое признание благодаря целому ряду достоинств. Богатая информативность графических образов частотных характеристик, относительная независимость отрезков характеристик на различных диапазонах частот и другие особенности частотной области позволяют наиболее естественным и наглядным образом выявлять взаимосвязи структур и поведения систем, обеспечивать декомпозицию задач анализа и синтеза, учитывать ограничения на область адекватности моделей. Использование компьютеров

позволяет устранить основные недостатки частотных методов и расширить область их применения на многомерные [24,31], сложные и иерархические [13] системы. Частотные методы помогают найти решение задач в ситуациях со значительной исходной неопределенностью, а также в тех практически важных случаях, когда постановки задач синтеза формализуемы не полностью. Методы анализа и синтеза в частотной области в комбинации с другими подходами являются хорошей основой для развития человеко-машинных процедур проектирования систем управления.

Изложение каждой главы книги является относительно независимым и сопровождается множеством примеров типовых задач анализа и синтеза. Это позволяет читателю найти способ решения его частной задачи без необходимости изучать книгу целиком.

В приложении предлагаются одиннадцать практических занятий для самостоятельного изучения основ теории управления или для проведения лабораторного практикума. При наличии персонального компьютера с установленным программным средством *CLASSiC* эти занятия обеспечат достаточно хороший уровень освоения материала и позволят получить навыки решения конкретных задач анализа и синтеза.

Программа *CLASSiC* чрезвычайно проста в использовании. Большинство действий, необходимых для работы с программой, являются интуитивно ясными, и на освоение ее возможностей требуется не более часа. Чтобы начать пользоваться этой программой, достаточно ознакомиться с ее описанием в приложении к данной книге.

Если Вы не имеете программы *CLASSiC* или у Вас есть какие-либо замечания или вопросы по книге, просим обращаться по адресу: 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, кафедра Автоматики и процессов управления. Тел. (812) 234-3798.

Авторы благодарят разработчиков программы *CLASSiC* инженеров В.Н. Богданова и А.Л. Герасимова, а также д-ра Р. Арендта и инженеров Т.Р. Белинскую, Д.С. Демидова, Д.А. Озерова за помощь при подготовке рукописи к печати.

## Список основных обозначений и сокращений

$M$  - модель

$M_S$  - модель системы

$M_E$  - модель среды

$M_{YSF}$  - модель системы со средой

$M_{RS}$  - модель расширенной системы

$\mathcal{M}$  - множество моделей

$\mathcal{W}$  - множество элементов (звеньев) системы

$\mathcal{L}$  - множество переменных

$N$  - число элементов системы

$R$  - ранг неопределенности модели

$L$  - уровень иерархии модели

$n$  - порядок системы

$D, G, B, C$  - полиномы

$D(s)$  - характеристический полином (ХП)

$A, B, C, D$  - матрицы состояния, входа, выхода и обхода модели в форме пространства состояний

$D, B, C$  - полиномиальные матрицы

$y$  - управляемая переменная, выход объекта или системы

$u$  - вектор переменных выхода

$u$  - управляющее воздействие

$f$  - воздействие среды, возмущение

$g$  - задающее воздействие

$e$  - переменная ошибки системы

$x$  - внутренняя переменная системы

$x$  - вектор внутренних переменных

$v$  - переменная состояния

$v$  - вектор переменных состояния

$p = d/dt$  - оператор дифференцирования по времени

$\mathcal{L}$  - оператор преобразования Лапласа

$s$  - комплексный аргумент

$\omega$  - круговая частота

$Y(s), F(s), U(s), X(s)$  - изображения переменных по Лапласу

$W(s), \Phi(s)$  - передаточные функции (ПФ)

$W(s)$  - передаточная матрица

$A(\omega)$  - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$\phi(\omega)$  - фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

- $L(\omega)$  - логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)  
 $i(t)$  - импульсная переходная функция  
 $h(t)$  - переходная характеристика  
 $T(s), S(s)$  - абсолютная и относительная функции чувствительности (ФЧ)  
 $\Delta(s)$  - определитель графа  
 $P(s), K(s)$  - передаточные функции пути и контура графа
- $I$  - показатель качества, интегральная квадратичная оценка (ИКО)  
 $t_p$  - время регулирования  
 $\sigma$  - перерегулирование  
 $\omega_{ср}$  - частота среза  
 $\omega_p$  - резонансная частота  
 $\Delta L$  - запас устойчивости по модулю  
 $\Delta\varphi$  - запас устойчивости по фазе  
 $\eta$  - степень устойчивости  
 $\mu$  - колебательность корней  
 $M$  - показатель колебательности

# 1. МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. О моделях систем управления

Динамические модели объектов и систем управления строятся для объяснения и предсказания их поведения - изменений во времени состояния и наблюдаемых выходных переменных, вызванных внутренними процессами и/или воздействиями среды.

Изучение конкретного объекта требует его вычленения из окружающей среды, что, вообще говоря, приводит к искажению явлений, так как в природе все явления в той или иной степени взаимосвязаны и взаимообусловлены. Рассмотрение взаимодействия системы управления со средой связано с обособлением и локализацией собственно системы  $S$  и выделением ее связей со средой через переменные входа  $f$  и выхода  $y$  (рис.1.1а). Система оказывается звеном в искусственно разорванной цепи причинно-следственных отношений "среда-система-среда". Условием разрыва замкнутого контура взаимодействия является слабое влияние контура на изучаемые процессы. В противном случае необходимо расширять границы системы, включив в нее существенные замкнутые взаимодействия.

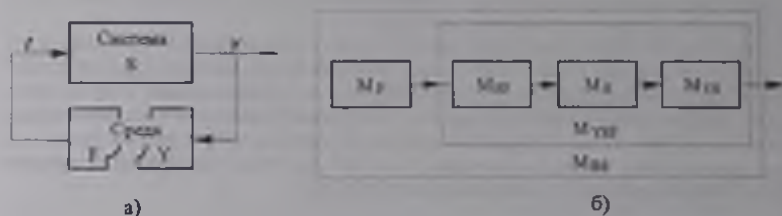


Рис.1.1. Взаимодействие системы со средой (а) и расширенная система  $M_{RS}$  (б)

В теории и расчетной практике объектами исследований оказываются модели собственно систем управления  $M_S$ , модели систем со связями со средой  $M_{YSF}$  и модели расширенных систем  $M_{RS}$  (рис.1.1б). Модели  $M_S$  позволяют выявить свойства свободных движений автономных систем. Модели  $M_{YSF}$  получаются дополнением  $M_S$  моделями связей системы со средой на входе  $M_{SF}$  и со средой на выходе  $M_{YS}$ ; они позволяют выявлять свойства каналов передач от входов к выходам при неполной определенности о переменных входа  $f(t)$ . Модели  $M_{RS}$  получаются дополнением  $M_{YSF}$  моделями среды  $M_F$  и привлекаются для изучения вынужденных движений переменных выхода  $y(t)$  при адекватных моделях воздействий.

В зависимости от объема и характера априорной информации о системе  $M_{RS}$  используются различные подходы к моделированию: экспериментальный (идентификационный) или аналитический.

### 1.1.1. Экспериментальный подход к моделированию

В том случае, когда природа объекта изучена недостаточно или слишком сложна для аналитического описания, для построения математических моделей прибегают к так называемому методу "черного ящика" (рис.1.2). Изучая и обрабатывая входные  $f(t)$  и выходные  $y(t)$  сигналы, можно идентифицировать реально су-

существующие и доступные для экспериментального исследования объекты - построить модели в терминах "вход-выход", представляющие собой операторы преобразования переменных

$$y(t) = w \{f(t)\} .$$

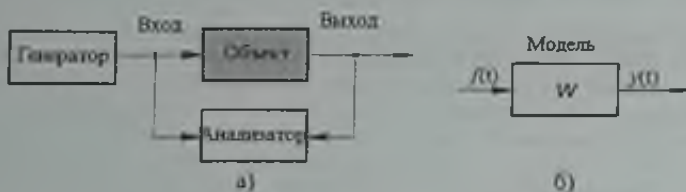


Рис. 1.2. Экспериментальное исследование системы (а) и модель "вход-выход" (б)

Ясно, что полученная таким путем модель обусловлена не только свойствами системы, но и параметрами входных сигналов.

Операторы преобразования переменных, то есть математические модели, в зависимости от особенностей объектов, воздействий среды, целей и задач исследования могут быть различных классов: линейными или нелинейными, непрерывными или дискретными, стационарными или нестационарными, детерминированными или стохастическими, с сосредоточенными (конечномерными) или распределенными параметрами. Ниже рассматривается класс линейных непрерывных стационарных детерминированных конечномерных моделей.

### 1.1.2. Аналитический подход к моделированию

Аналитический подход применяется для моделирования физических систем хорошо изученной природы, которые допускают идеализированное представление в виде принципиальных схем с сосредоточенными компонентами (рис. 1.3а). Принципиальные схемы - это, по существу, модели на специализированных языках, связанных с физическими законами, которым подчиняются явления, происходящие в компонентах.

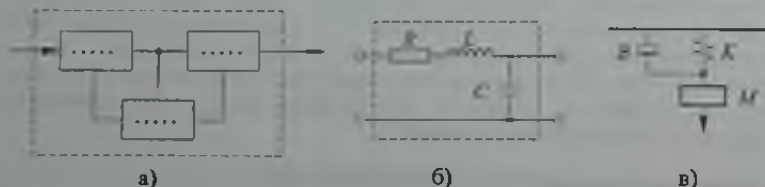


Рис. 1.3. Физические системы с сосредоточенными компонентами

Представителями физических систем с сосредоточенными компонентами служат электрические цепи (рис. 1.3б). Резисторы ( $R$ ), конденсаторы ( $C$ ) и индуктивности



( $L$ ) являются пассивными компонентами схемы. В механических схемах (рис.1.3в) аналогичную роль играют механическое сопротивление (вязкое трение  $B$ ), масса ( $M$ ) и упругость ( $K$ ). Идентичные компоненты можно выделить в системах и иной физической природы: акустических, гидравлических, тепловых, смешанных. Аналитически обрабатывая информацию, содержащуюся в принципиальных схемах, можно получить математические модели в требуемой форме.

Связи между компонентами и внутренними переменными структурных моделей физических систем не ориентированы, а взаимодействия систем со средой - ориентированы; поэтому выделяются входы и выходы систем (рис.1.3,а).

На практике, когда об объекте имеется частичная априорная информация, комбинируются оба подхода к моделированию - аналитический и экспериментальный.

### 1.1.3. Особенности структурных моделей систем управления

Особенностью математических моделей систем управления является то, что они не только содержат априорную информацию о динамических свойствах, необходимую для изучения поведения системы в целом, но также отражают процессы получения и обработки текущей информации о цели системы, состоянии управляемого объекта и воздействиях среды для принятия решения по оказанию на объект надлежащего управляющего воздействия. При построении моделей систем управления и выборе форм их представления учитываются не только динамические, а также информационные и алгоритмические аспекты проблемы. Систему или ее элемент можно интерпретировать и как оператор преобразования переменных, и как алгоритм обработки текущей информации, носителями которой являются сигналы.

Понятие модели системы управления неотделимо от понятия структуры. Под структурой систем управления понимают причинно-следственные взаимосвязи элементов (подсистем) направленного действия.

Именно ориентированность элементов и их взаимодействий отличает модель систем управления от структурных моделей систем вообще. На рис.1.4 иллюстрируется система управления с раскрытой структурой.

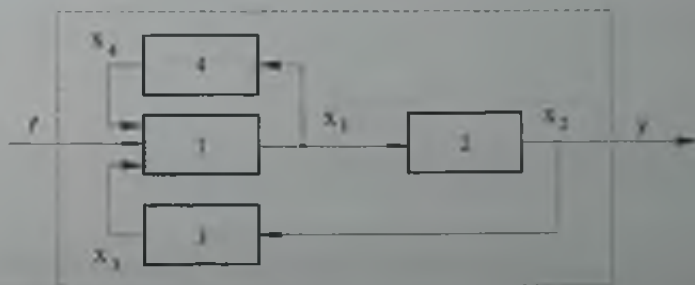


Рис.1.4. Система управления с раскрытой структурой

Построению моделей систем управления с раскрытой структурой предшествует выделение частей, рассматриваемых как преобразователи сигналов. Моделирова-

ние "по частям" связано с принятием допущения об однонаправленности элементов. Элементы, как правило, выделяются по функциональному признаку, причем сами эти функции понимаются в контексте операций управления: объект управления; измерительные, преобразовательные и усилительные элементы; управляющее устройство; исполнительный механизм. Например, элемент 2 в системе, изображенной на рис.1.4, может соответствовать объекту управления, элементы 1 и 4 - управляющему устройству, а элемент 3 - датчику обратной связи.

#### 1.1.4. Многоуровневые структуры систем управления

Модели в терминах "вход-выход" (рис.1.2б) и структурные модели физических систем (рис.1.3), с точки зрения специалиста по управлению, имеют нулевой уровень причинно-следственной структуры. Модель, изображенная на рис.1.4, имеет первый уровень. Дальнейшее раскрытие структур подсистем приводит к многоуровневым моделям.

Раскрытие структуры системы или подсистемы означает переход к нижележащему уровню исследования. В зависимости от глубины раскрытия структуры получают модели различных уровней причинно-следственной интеграции  $L = 0, 1, 2, \dots$ . На рис.1.5 иллюстрируется модель системы второго уровня ( $L = 2$ ), построенная на подсистемах первого уровня ( $L = 1$ ). Иерархический подход к моделированию, анализу и синтезу позволяет разработать методы исследования и проектирования сложных систем управления.

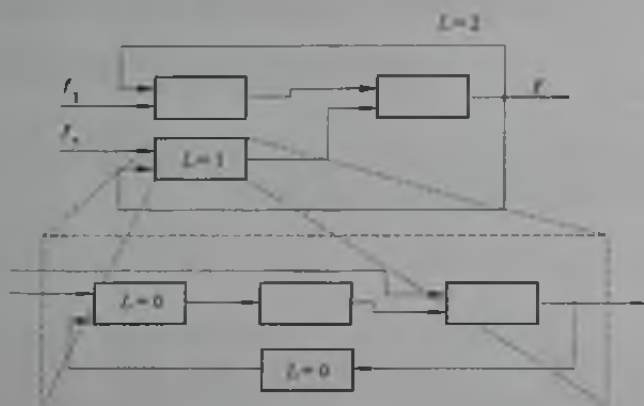


Рис. 1.5. Модель второго уровня

В силу одного из основных принципов системологии - принципа рекуррентного объяснения [13] - поведение системы  $L$ -го уровня объясняется свойствами подсистем непосредственно нижележащего -  $(L-1)$ -го - уровня и особенностями их взаимосвязей. Ниже ограничимся рассмотрением моделей нулевого ( $L=0$ ) и первого ( $L=1$ ) уровней.

## 1.2. Модели систем управления в терминах "вход-выход"

Модели в терминах "вход-выход" (рис.1.26) - операторы преобразования входных переменных систем в выходные - могут быть представлены в различных формах.

### 1.2.1. Дифференциальные уравнения

Математические модели рассматриваемого класса представляются в форме обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$d_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + d_1 \frac{dy}{dt} + d_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f. \quad (1.1)$$

Более компактная запись дифференциального уравнения (1.1) получается при использовании символа  $p = d/dt$  оператора дифференцирования по времени:

$$D(p) y(t) = B(p) f(t), \quad (1.2)$$

где  $D(p)$  и  $B(p)$  - операторные полиномы.

Системы с несколькими входами и выходами (многомерные системы) описываются совокупностью уравнений

$$D_{qr}(p) y_q(t) = B_{qr}(p) f_r(t); \quad q = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, l,$$

попарно связывающих переменные входа  $f_r$  и выхода  $y_q$ .

Уравнения (1.1), (1.2) являются моделями  $M_{YS}$  системы со связями со средой. Модель  $M_S$  собственно системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$D(p) y(t) = 0. \quad (1.3)$$

Модели  $M_{SF}$  - связи системы со средой на входе - отвечает операторный полином  $B(p)$ , а модель  $M_{YS}$  - связи системы со средой на выходе - в этом случае получается тривиальной ( $y \equiv y$ ).

Дифференциальные уравнения (1.1) - (1.3) дополняются начальными условиями  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ , отражающими предысторию системы.

Модели "вход-выход" появляются в результате моделирования объектов и систем управления в целом при недостаточной априорной информации о внутренней организации или при ее игнорировании. Вместе с тем можно говорить о структуре оператора, представляемого в форме дифференциальных уравнения (1.1) - (1.2). После указания степеней  $n$  и  $m$  операторных полиномов  $D$  и  $B$  для полной опреде-

ленности оператора остается только конкретизировать значения коэффициентов этих полиномов.

### 1.2.2. Передаточные функции

Преобразование дифференциального уравнения (1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях формально сводится к замене символа  $p$  оператора дифференцирования по времени на символ комплексного аргумента  $s$ . В результате вместо дифференциального уравнения получим алгебраическое

$$D(s) Y(s) = B(s) F(s),$$

где:  $F(s)$  и  $Y(s)$  - изображения переменных входа и выхода;  $D(s)$  и  $B(s)$  - полиномы комплексного аргумента с теми же коэффициентами, что и операторные полиномы  $D(p)$  и  $B(p)$ .

Передаточная функция (ПФ), по определению, равна отношению изображений переменных при нулевых начальных условиях, т.е.

$$W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{D(s)}. \quad (1.4)$$

Многомерные системы описываются передаточными матрицами

$$W(s) = \left\{ W_{qr}(s) = B_{qr}(s) / D_{qr}(s) \right\}, \quad (1.5)$$

связывающими векторы изображения переменных входа  $F(s)$  и выхода  $Y(s)$

$$Y(s) = W(s) F(s).$$

В частном случае одномерная система имеет один вход и один выход, а свернутая форма оператора представляет собой одно дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка или одну передаточную функцию. Это случай обыкновенного звена классической теории автоматического регулирования.

В более общем случае линейное звено суммирует переменные входа (если их несколько) и преобразует сумму в соответствии с оператором звена в переменную выхода

$$x_i = w_i \left( \sum_j x_j \right).$$

Таким образом, линейное звено общего вида (рис.1.6а) - это обыкновенное звено, дополненное сумматором - рис.1.6б.

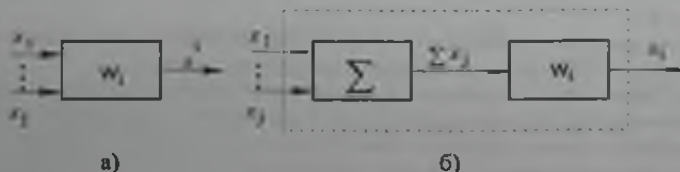


Рис.1.6. Линейное звено общего вида

### 1.2.3. Частотные характеристики

Частотные методы анализа и синтеза систем управления, в основном, используют модели в форме передаточных функций и частотных характеристик, связывающих изображения переменных по Лапласу и Фурье.

Частотные характеристики элементов и систем представляют собой зависимость между входными и выходными гармоническими сигналами всех частот в установившихся режимах.

Частотные характеристики получаются из передаточной функции (1.4) при рассмотрении только чисто мнимых значений комплексного аргумента, т.е. при подстановке  $s = j\omega$ ,  $\omega \geq 0$ :

$$W(s)|_{s=j\omega} = W(j\omega) = A(\omega) \exp(j\varphi(\omega)). \quad (1.6)$$

Здесь  $A(\omega)$  - амплитудная, а  $\varphi(\omega)$  - фазовая частотные характеристики. Часто используются логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

### 1.2.4. Временные характеристики

Оператор преобразования переменной входа системы управления  $f(t)$  в переменную выхода  $y(t)$  может быть представлен в форме временной характеристики. В качестве временных характеристик часто принимают импульсную переходную функцию (функцию веса)  $w(t)$  - реакцию системы на единичный идеальный импульс  $\delta(t)$  при нулевых начальных условиях. Переменная выхода определяется в виде интеграла свертки

$$y(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau) d\tau.$$

Другая временная характеристика - переходная характеристика  $h(t)$  - реакция системы на единичную ступенчатую функцию  $1(t)$  при нулевых начальных условиях.

Отметим, что частотные и временные характеристики относятся к неструктурированной форме представления оператора.

## 1.3. Системы дифференциальных уравнений

### 1.3.1. Системы дифференциальных уравнений различных порядков

В результате аналитического подхода к моделированию получаются математические модели в форме систем дифференциальных уравнений различных порядков:

$$\sum_{j=1}^N D_j(p) x_j(t) = \sum_{\Gamma=1}^l B_{\Gamma}(p) f_{\Gamma}(t); \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.7)$$

$$y_q(t) = \sum_{i=1}^N C_{qi}(p) x_i(t); \quad q = 1, \dots, k.$$

В этих уравнениях  $x_i(t)$  - внутренние переменные системы, а операторные полиномы  $D_{ij}(p)$ ,  $B_{ij}(p)$ ,  $C_{qi}(p)$  могут быть любыми, в том числе нулевых степеней.

Каждое из уравнений (1.7) обычно отражает физический закон, которому подчиняются явления, происходящие в выделенных сосредоточенных компонентах системы. При этом связи между компонентами не обязательно имеют односторонний характер. В силу этого отдельные уравнения системы (1.7) не имеют причинно-следственной формы [3], т.е. не уточняется, которая из переменных в каждом уравнении является следствием остальных. Важно подчеркнуть, что уравнения (1.7) хотя и раскрывают внутреннюю организацию объекта, однако эта информация не может считаться структурой в том смысле, как это принято в теории управления.

В векторно-матричной форме уравнения (1.7) записываются так:

$$\begin{aligned} D(p) x(t) &= B(p) f(t); \\ y(t) &= C(p) x(t), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где:  $x$ ,  $f$ ,  $y$  - векторы переменных: внутренних, входа и выхода;

$D(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$  - матрицы операторных полиномов соответствующих размеров.

Уравнения (1.7), (1.8) описывают модель  $M_{YSF}$  системы со связями со средой. Модель  $M_S$  собственно системы имеет вид однородных дифференциальных уравнений

$$D(p) x(t) = 0, \tag{1.9}$$

а модели  $M_{SF}$  и  $M_{YS}$  связей системы со средой задаются операторными матрицами  $B(p)$  и  $C(p)$  соответственно.

### 1.3.2. Дифференциальные уравнения в форме пространства состояний

При определенных условиях системы дифференциальных уравнений (1.1) - (1.3) и (1.7) - (1.9) допускают запись в форме Коши - системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \dots + b_{i1}f_1 + \dots + b_{il}f_l; \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.10}$$

дополненной уравнениями выходов:

$$y_q(t) = c_{q1}v_1 + \dots + c_{qn}v_n; \quad q = 1, \dots, k. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10), (1.11) в векторно-матричной форме пространства состояний в терминах "вход-состояние-выход" записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= Av + Bf; \\ y &= Cv, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где:  $v$  -  $n$ -мерный вектор переменных состояния;  
 $f$  -  $l$ -мерный вектор переменных воздействия;  
 $y$  -  $k$ -мерный вектор выходных переменных;  
 $A, B, C$  - числовые матрицы соответствующих размеров.

Модель  $M_S$  собственно системы в форме пространства состояний имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = Av, \quad (1.13)$$

матрица  $B$  представляет модель  $M_{SF}$  связи системы со средой на входе, а матрица  $C$  - модель  $M_{YS}$  связи системы со средой на выходе.

Форма пространства состояний (1.12) является частным случаем модели вида (1.8) со следующими матрицами:

$$D(p) = (pI - A); \quad B = B; \quad C = C, \quad (1.14)$$

где  $I$  - единичная матрица.

Между переменными состояниями  $v_i$  в общем случае нет причинно-следственной связи. Вектор состояния  $v$  в уравнениях (1.12) может быть выбран с точностью до невырожденного преобразования.

## 1.4. Структурные схемы и графы систем управления

Графы являются универсальным средством описания структур систем. Граф - понятие теоретико-множественное - это отношение на множестве. При небольшом числе элементов и связей весьма наглядны диаграммы графов, т.е. их геометрические образы. В силу указанных выше особенностей структурных моделей систем управления в теории управления чаще всего используются ориентированные графы.

В зависимости от элементов множеств рассматриваются различные типы графов.

### 1.4.1. Структурные схемы (С-графы)

Структурная схема является ориентированным графом и состоит из множества вершин  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_N\}$  и множества дуг  $\mathcal{L} = \{(w_i, w_j)\}$  - упорядоченных пар вершин [7]. Дугам графа соответствуют переменные  $x_i$ ;  $i = 1, \dots, N$ , а в вершинах происходит суммирование переменных и преобразование сумм в соответствии с передаточными функциями:

$$X_i(s) = W_i(s) \sum_j X_j(s). \quad (1.15)$$

Для того чтобы отличать рассматриваемый граф от сигнальных графов других типов, назовем его  $C$ -графом. На языке теории бинарных отношений  $C$ -граф определяется как пара множеств

$$(\mathcal{W}, \mathcal{X}),$$

а структурная схема - геометрический образ - называется также диаграммой графа (рис.1.7).

Вершина  $C$ -графа - звено общего вида, по определению суммирует переменные входящих дуг. Это позволяет отказаться от специального элемента суммирования, что отличает  $C$ -графы от классических структурных схем.

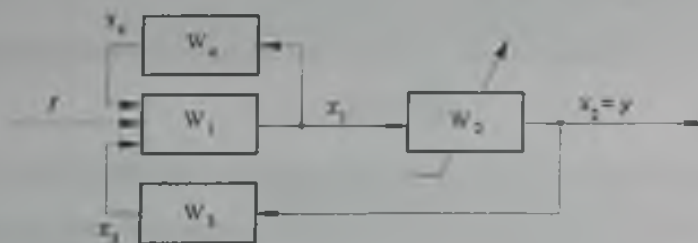


Рис. 1.7. Структурная схема ( $C$ -граф)

Дуга  $C$ -графа - элемент  $(w_i, w_j)$  отношения  $\mathcal{X}$  - задает причинно-следственную связь между двумя звеньями, причем выход  $j$ -го звена является входом  $i$ -го. Дуге  $(w_i, w_j)$  соответствует переменная  $x_j$ .

Теоретико-множественное описание систем дает естественный способ ввода и редактирования моделей систем управления как последовательного раскрытия неопределенности [7, 13]. Для этого модели упорядочиваются по рангам неопределенности  $R = 0, 1, 2, 3$ .

Множество  $\mathcal{W}$  звеньев задает модель нулевого ранга  $M_S(0)$ . Для примера  $C$ -графа, диаграмма которого изображена на рис.1.7, множество перечисляется так:

$$\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

В случае однотипных звеньев можно ограничиться заданием числа вершин графа (звеньев), т.е. мощности множества  $|\mathcal{W}| = N = 4$ .

Дополнение модели  $M_S(0)$  множеством  $\mathcal{X}$  дает модель первого ранга  $M_S(1)$  - это топология (топография) системы. Для примера  $C$ -графа (рис.1.7) множество перечисляется так:

$$\mathcal{X} = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}.$$

В перечислении приведены только индексы (номера) звеньев.



Дальнейшее раскрытие неопределенности достигается при задании структур операторов вершин. Для рассматриваемого класса систем передаточные функции являются отношениями полиномов:

$$W_i(s) = \frac{B_i(s)}{D_i(s)} \quad (1.36)$$

Задание их структур сводится к указанию степеней  $m_i$  и  $n_i$  полиномов  $B_i$  и  $D_i$ . Когда для всех звеньев заданы структуры операторов, образуется модель системы структурного ранга  $M(2)$ .

Пусть для рассматриваемого примера системы (рис.1.7) передаточные функции звеньев имеют вид:

$$W_1(s) = k_1; \quad W_2(s) = k_2 / (1 + T_2 s)^2; \quad W_3(s) = -1; \quad W_4(s) = -\tau_4 s / (1 + T_4 s).$$

Информацию о структуре можно закодировать массивами степеней полиномов числителей и знаменателей передаточных функций:

$$\{0,0,0,1\} \text{ и } \{0,2,0,1\}.$$

Результатом конкретизации значений всех коэффициентов полиномов является полностью определенная модель третьего, параметрического ранга  $M_3(3)$ .

Выше изложено описание собственно системы (автономной системы). Для описания связей системы со средой следует указать звено, ко входу которого подается воздействие, и звено, выход которого является выходом системы. На примере  $S$ -графа (рис.1.7) номер входного звена  $r = 1$ , а выходного -  $q = 2$ . В результате оказывается определенной модель системы со связями со средой  $M_{YSF}(3)$ .

При изучении влияния вариаций звеньев на характеристики системы указывается варьируемое звено. На рис.1.7 им является звено  $W_2$ .

#### 1.4.2. Сигнальные графы

Сигнальный граф или граф Мэсона (Mason) является одной из удобных в теории и расчетной практике форм представления моделей систем управления.

Модель системы в форме сигнального графа определяется как бинарное отношение  $\mathcal{W}$  на множестве переменных  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ :

$$\mathcal{W} = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W} \rangle.$$

Элементам отношения  $\mathcal{W} = \{(x_i, x_j)\}$  ставятся в соответствие операторы преобразования переменных. На диаграммах сигнальных графов переменным отвечают вершины, где суммируются сигналы заходящих дуг, а элементам отношения - дуги.

Способы задания моделей различных рангов в форме сигнальных графов - те же, что и для  $S$ -графов.

На рис.1.8 изображена диаграмма сигнального графа - модель топологического ранга, несущая ту же информацию о системе, что и структурная схема (рис.1.7).

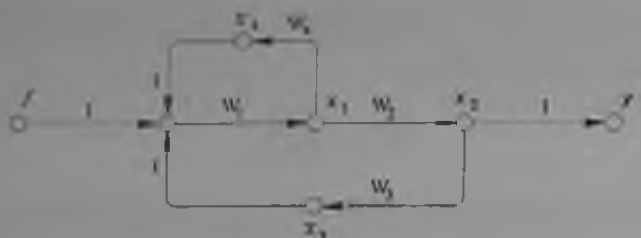


Рис. 1.8. Диаграмма сигнального графа

В заключение подчеркнем, что формы представления моделей и способы их отображения могут быть различными - символическими или алгебраическими (уравнения, матрицы), геометрическими или топологическими (диаграммы графов). Однако информация о моделях различных рангов  $R$  последовательно раскрывается описанием множеств, задающих:  $R=0$  - состав элементов;  $R=1$  - топологию причинно-следственных связей между ними;  $R=2$  - структуры операторов;  $R=3$  - параметры.

Теоретико-множественное представление структур систем в форме графов обеспечивает формализацию описания моделей, упрощает их кодирование и графическое отображение, а также разработку алгоритмов анализа систем. На базе  $S$ -графов построено описание систем управления в программе *CLASSIC* для персональных компьютеров класса IBM PC [6, 10], а на базе графа Мэзона - описание систем в программе *АРДИС* для СМ ЭВМ [16].

### 1.5. Модели среды и расширенной системы

Модель среды на входе системы управления  $M_F$  (рис.1.16) - это совокупность воздействий  $f_r$ ;  $r = 1, \dots, l$ . Совокупность моделей среды на входе системы  $M_F$  и модели системы со связями со средой  $M_{YSF}$  образует модель расширенной системы  $M_{RS}$  (рис.1.9).

Воздействия могут задаваться как функции времени. Наиболее часто принимаются следующие типы воздействий:

$$f_r(t) = \delta(t); \quad F_r(s) = 1$$

- единичная  $\delta$ -функция;

$$f_r(t) = 1(t); \quad F_r(s) = 1/s$$

- единичное ступенчатое воздействие;

$$f_r(t) = \left( \frac{t^\lambda}{\lambda!} \right) 1(t); \quad F_r(s) = \frac{1}{s^{\lambda+1}}; \quad \lambda = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

- степенное воздействие (при  $\lambda = 0$  имеем единичное ступенчатое воздействие);

$$f_r(t) = (\sin \omega t) 1(t); \quad F_r(s) = \frac{\omega}{(\omega^2 + s^2)} \quad (1.18)$$

- гармоническое воздействие единичной амплитуды.

Другим способом задания модели среды  $M_F$  является подключение ко входу системы так называемых формирующих фильтров. Некоторое "воздействие - первопричина"  $f_0(t)$  преобразуется так, чтобы получить требуемое воздействие  $f_1(t)$  на входе системы (рис. 1.9).

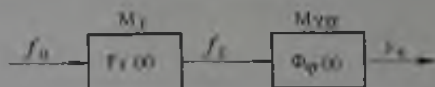


Рис. 1.9. Модель расширенной системы  $M_R$

Если в качестве воздействия  $f_0(t)$  принять  $\delta$ -функцию, то ПФ формирующего фильтра равна изображению воздействия:

$$F_F(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}.$$

Если же принять  $f_0(t) = 1(t)$ , ПФ формирующего фильтра равна

$$F_F(s) = s \mathcal{L}\{f_1(t)\}.$$

Пусть, например, на вход системы подано гармоническое воздействие среды (1.18). Если принять за "воздействие-первопричину"  $f_0 = 1(t)$ , то ко входу системы подключается формирующий фильтр с ПФ

$$F_F(s) = \frac{\omega \beta}{(\omega^2 + s^2)} \quad (1.19)$$

### 1.6. Неопределенность моделей систем управления

Математические модели не отражают исчерпывающим образом динамические свойства систем управления в силу идеализаций и упрощений, неизбежных при моделировании, неточной реализации алгоритмов управления и изменений характеристик объектов и других элементов в процессе эксплуатации. Если изменения характеристик происходят достаточно медленно по сравнению с длительностью процессов управления, то вместо нестационарных моделей (например дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) можно рассматривать множества стационарных моделей.

Модели систем управления строятся для строго оговоренных условий взаимодействия со средой, и их адекватность оригиналам определяется характеристиками воздействий. Значения параметров, структура операторов и класс операторов зависят от амплитуд изменения и частотного спектра сигналов.

Линейные модели обычно строят для малых отклонений переменных от выбранных установившихся режимов. Если амплитуды сигналов превышают некоторое определенное значение  $A$ , то приходится строить нелинейные модели, как правило, учитывающие всевозможные ограничения в реальных элементах. Иногда область адекватности линейных моделей ограничивается малыми амплитудами  $\alpha$ , для которых следует учитывать такие нелинейные явления, как зона нечувствительности, сухое трение и др.

Выбранные структуры операторов (порядки дифференциальных уравнений) обеспечивают адекватность моделей по отношению к сигналам, частоты которых не превышают заданного предела. Границу области адекватности  $\Omega$  обычно удается несколько расширить путем усложнения структуры операторов.

На рис.1.10 иллюстрируется область адекватности моделей на плоскости амплитуд  $a$  и частот  $\omega$  сигналов.

Таким образом, модели систем управления оказываются не полностью определенными. Здесь выделяется несколько ситуаций, которые удобно систематизировать с помощью введенных ранее рангов неопределенности моделей  $R = 0, 1, 2, 3$ .

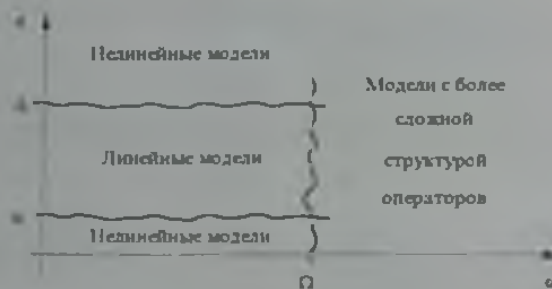


Рис. 1.10 Иллюстрация областей адекватности модели

Прежде всего заметим, что менее определенные модели низких рангов  $R'$  представляют собой множества более определенных моделей высших рангов  $R''$  :

$$M(R') \subseteq \{M(R'')\}; R' < R''.$$

Модель второго ранга  $M(2)$  есть множество моделей третьего ранга  $\{M(3)\}$ , элементы которого различаются значениями параметров. На рис.1.11а условно изображен сигнальный граф  $G$ , причем, подграф  $G'$  определен полностью. Выделенной дуге (a,b) соответствует передаточная функция, параметры которой принадлежат заданному множеству  $Q$ . Следовательно, имеет место множество моделей с различными параметрами - это случай структурированной неопределенности.



Рис. 1.11. Модели различных рангов неопределенности

Модель первого ранга  $M(1)$  является множеством моделей второго ранга  $\{M(2)\}$ , у которых одна и та же топология, однако структуры операторов могут

различаться. В общем случае элементы содержат неструктурированную неопределенность, например в виде аддитивных вариаций передаточных функций или частотных характеристик  $\delta W_1(j\omega)$  дуг графа (рис.1.11б).

Модель нулевого ранга  $M(0)$  представляет собой множество моделей первого ранга  $\{M(1)\}$  с различной топологией. В простейшем случае графы различаются местом включения одной дуги (рис.1.11в), например дуги, моделирующей регулятор или корректирующее устройство.

При интерпретации результатов анализа и синтеза необходимо всегда иметь в виду неполную определенность моделей и учитывать ограниченность области их адекватности. Анализ наряду с выявлением основных свойств поведения систем управления должен включать и исследование чувствительности характеристик к вариациям параметров, структур операторов и топологии систем. Процедуры синтеза должны обеспечивать робастность систем управления, когда вариации характеристик элементов мало сказываются на процессах управления.

### 1.7. Взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и графами

Между дифференциальными уравнениями и графами, как различными формами представления информации о динамических свойствах систем управления, имеется вполне определенная взаимосвязь.

Как указывалось, ориентированные графы несут значительно большую информацию о системе управления по сравнению с системами дифференциальных уравнений в непричинно-следственной форме. Поэтому переход от графов к уравнениям является однозначным, а обратный переход в общем случае не однозначен.

#### 1.7.1. Запись дифференциальных уравнений по графу

Для получения по  $S$ -графу модели в форме системы дифференциальных уравнений вначале записываются алгебраические уравнения для изображений переменных вида (1.15). Далее, формальной заменой символа комплексного аргумента  $s$  на оператор дифференцирования по времени  $p = d/dt$ , получаются дифференциальные уравнения.

Полиномиальные матрицы системы (1.8) непосредственно заполняются по  $S$ -графу. Диагональными элементами полиномиальной матрицы  $D$  являются полиномы знаменателей передаточных функций звеньев (1.16), а ненулевыми недиагональными элементами - полиномы числителей, взятые с обратными знаками, т.е.:

$$D_q(s) = \begin{cases} D(s), & i=j; \\ -B_i(s), & (i, j) \in \bar{I}, \quad i \neq j; \\ 0, & (i, j) \notin \bar{I}, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Матрица  $B(s)$  имеет отличные от нуля элементы  $B_r(s)$  в  $g$ -х строках, где  $g$  - номера входных блоков. Матрица  $C$  состоит из единиц и нулей, причем единицы располагаются в столбцах с номерами  $q$  выходных блоков.

Полученная система дифференциальных уравнений имеет причинно-следственную форму.

Получим вид матриц  $D$  и  $B$  для примера  $S$ -графа, диаграмма которого изображена на рис.1.7. Система уравнений для изображений переменных запишется так:

$$x_1 = W_1(x_3 + x_4 + f);$$

$$x_2 = W_2 x_1;$$

$$x_3 = W_3 x_2;$$

$$x_4 = W_4 x_1.$$

Учитывая выражения для передаточных функций звеньев (1.16), получим после приведения к общему знаменателю и переноса части членов в левую часть:

$$D_1 x_1 - B_1 x_3 - B_1 x_4 = B_1 f;$$

$$-B_2 x_1 + D_2 x_2 = 0;$$

$$-B_3 x_2 + D_3 x_3 = 0;$$

$$-B_4 x_1 + D_4 x_4 = 0.$$

Введем вектор переменных  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  и запишем уравнение в компактной форме (1.8). Соответствующие матрицы имеют вид:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & -B_1 & -B_1 \\ -B_2 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & -B_3 & D_3 & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ].$$

Обратим внимание на то, что структура матрицы задает топологию системы - модель  $M(1)$ . Действительно, пары номеров строк и столбцов  $(i, j)$  ненулевых элементов вне главной диагонали в точности образуют множество  $\bar{L}$ .

### 1.7.2. Построение графов по дифференциальным уравнениям

Для построения ориентированного графа система дифференциальных уравнений (1.8) предварительно преобразуется по Лапласу, в результате чего получается система алгебраических уравнений для изображений переменных. При нулевых начальных условиях эта операция сводится к формальной замене символа оператора дифференцирования  $p = d/dt$  на символ комплексного аргумента  $s$ .

Алгоритм построения графа Мэзона по системе уравнений складывается из следующих операций:

- выбирается такая последовательность уравнений, в которой каждое  $i$ -е уравнение содержит переменную  $x_i(s)$ ;
- каждое  $i$ -е уравнение делится на полином  $D_{ii}(s) \neq 0$ ;

- слагаемые с переменными  $x_j$ ;  $j \neq i$ , вида  $(D_{ij}/D_{ii})x_j$  переносятся в правые части уравнений.

Полученная причинно-следственная форма записи уравнений, по сути, является графом Мэсона.

Для любой системы уравнений (1.8), (1.9) с невырожденной матрицей существует такая последовательность уравнений, когда все элементы  $D_{ii}$  главной диагонали матрицы  $D$  отличны от нуля [3]. Следовательно, для каждой системы уравнений с отличным от нуля определителем  $\det D(s)$  можно построить ориентированный граф. Вместе с тем такая последовательность может быть не единственной, т.е. переход от уравнений к графам в общем случае не является однозначным. Выбор одного из вариантов графа по существу означает дополнение динамической модели информацией о направленных взаимодействиях элементов, т.е. переход к моделям, характерным для теории управления.

### 1.8. Построение моделей "вход-выход" по моделям с развернутой структурой

Системы уравнений в не причинно-следственной форме (1.7) - (1.9), в том числе уравнения в форме пространства состояний (1.10) - (1.13) и модели с раскрытой структурой в форме графов (см. 1.4), являются развернутыми моделями объектов и систем управления. Задачи анализа обычно требуют исследования непосредственных связей выходов со входами, т.е. рассмотрения свернутых моделей в терминах "вход-выход": дифференциальных уравнений, передаточных функций, частотных или временных характеристик.

#### 1.8.1. Построение моделей "вход-выход" по системам уравнений

Пусть исходная модель представлена в форме системы дифференциальных уравнений (1.8). После их преобразования по Лапласу задача получения передаточной функции системы управления в целом сводится к решению системы алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами.

В общем случае передаточная матрица многомерной системы выражается так:

$$W(s) = C(s) D^{-1}(s) B(s).$$

Ее вычисление требует обращения полиномиальной матрицы  $D$ .

В частном случае представляет интерес только одна из передаточных функций, связывающая воздействие  $f_r$  с переменной  $x_q$ . Искомая передаточная функция вычисляется по правилу Крамера [14]

$$\Phi_{qr}(s) = \frac{\det D_{qr}(s)}{\det D(s)} \quad (1.20)$$

Здесь матрица  $D_{qr}$  получена заменой  $q$ -го столбца матрицы  $D$   $r$ -м столбцом матрицы  $B$ .



Знаменателем передаточной функции независимо от номеров  $g$  и  $q$  входа и выхода является характеристический полином (ХП) системы в целом

$$D(s) = \det D(s). \quad (1.21)$$

Таким образом, вычисление ХП  $D(s)$  или ПФ системы сводится к раскрытию определителей полиномиальных матриц.

Рассмотрим пример системы уравнений, приведенной в п.1.7.1. ХП, т.е. знаменатель передаточных функций равен

$$D(s) = \det D(s) = (1 + T_2 s)^2 (1 + T_4 s) + k_1 k_2 (1 + T_4 s) + k_1 \tau_4 s (1 + T_2 s)^2.$$

Числитель  $V_{yf}$  передаточной функции  $\Phi_{qr}$  между переменной выхода  $x_2 = y$  и воздействием  $f$  равен определителю матрицы, полученной из матрицы  $D$  путем замены второго столбца столбцом  $B$ , т.е.

$$V_{yf}(s) = \det D_{21}(s) = \det \begin{bmatrix} D_1 & B_1 & -B_1 & -B_1 \\ -B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} = k_1 k_2 (1 + T_4 s)$$

### 1.8.2. Построение моделей "вход-выход" по уравнениям состояния

Модели "вход-выход" по моделям "вход-состояние-выход", т.е. по форме пространства состояний (1.12), могут вычисляться по формуле (1.20). Однако для частного вида матриц (1.14) имеем:

$$\Phi_{qr}(s) = B_{qr}(s) / D(s);$$

$$D(s) = \det (sI - A);$$

$$B_{qr}(s) = C_q (sI - A)^* B_r,$$

где:  $(sI - A)^*$  - матрица, присоединенная к характеристической;

$C_q$  -  $q$ -я строка матрицы выхода  $C$ ;

$B_r$  -  $r$ -й столбец матрицы входа  $B$ .

Можно показать, что полином  $B_{qr}(s)$  числителя передаточной функции  $\Phi_{qr}(s)$  представляет собой определитель следующей матрицы

$$B_{qr}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & B_r \\ -C_q & 0 \end{bmatrix}.$$



### 1.8.3. Построение моделей "вход-выход" по графам

Пусть исходная модель представлена в форме структурной схемы (С-графа) или сигнального графа Мэсона. Для вычисления передаточной функции можно:

- записать систему уравнений (1.7) и воспользоваться формулой (1.20);
- провести последовательную топологическую редукцию графов по правилам эквивалентных преобразований;
- применить топологическую формулу Мэсона [3].

Формула Мэсона для получения передаточных функций сигнальных графов является топологическим аналогом правила Крамера.

Прежде всего, введем несколько понятий из теории сигнальных графов. Путем в графе называется последовательность вершин и дуг, в которой каждый элемент встречается только раз. **Контур** - замкнутый путь. Контур называется некасающимся, если они не имеют общих вершин. Передаточные функции путей и контуров равны произведению передаточных функций образующих их дуг.

Передаточная функция графа от вершины  $g$  (вход) до вершины  $q$  (выход) равна

$$\Phi_{qr}(s) = \frac{\sum_p P_{qr}(s) \Delta_{qr}(s)}{\Delta(s)}, \quad (1.22)$$

причем:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_k K_k(s) + \sum_{k,l} K_k(s) K_l(s) - \sum_{k,l,m} K_k(s) K_l(s) K_m(s) + \dots, \quad (1.23)$$

где  $\Delta(s)$  - определитель графа;

$K_k(s)$  - передаточные функции контуров графа;

$K_k(s)K_l(s)$  - произведения передаточных функций некасающихся пар контуров;

$K_k(s)K_l(s)K_m(s)$  - произведения передаточных функций попарно некасающихся троек контуров;

$P_{qr}^l(s)$  - передаточная функция  $l$ -го пути в графе от вершины  $g$  до вершины  $q$ ;

$\Delta_{qr}^l(s)$  - минор  $l$ -го пути, равный определителю подграфа, полученного удалением из исходного графа  $l$ -го пути.

Рассмотрим пример графа, изображенного на рис. 1.8. Граф имеет два касающихся контура с передаточными функциями:

$$\begin{aligned} K_1(s) &= W_1(s)W_2(s)W_3(s); \\ K_2(s) &= W_1(s)W_4(s). \end{aligned}$$

Определитель графа равен

$$\Delta(s) = 1 - K_1(s) - K_2(s).$$

Между вершиной входа  $f$  и вершиной выхода  $y$  имеется один путь с передаточной функцией

$$P_{yf}^1(s) = W_1(s)W_4(s).$$

После удаления этого пути не остается ни одного контура, поэтому минор пути равен единице

$$\Delta_{yf}^1(s) = 1.$$

Таким образом, передаточная функция графа между вершинами  $f$  и  $y$  в соответствии с формулой (1.22) равна:

$$\Phi_{yf}(s) = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 - W_1(s) W_2(s) W_3(s) - W_1(s) W_4(s)}.$$

Если сюда подставить дробно-рациональные выражения для передаточных функций (п. 1.4.1), то получим:

$$\Phi_{yf}(s) = \frac{B_{yf}(s)}{D(s)} = \frac{k_1 k_2 (1 + T_4 s)}{(1 + T_2 s)^2 (1 + T_4 s) + k_1 k_2 (1 + T_4 s) + k_1 \tau_4 s (1 + T_2 s)^2}$$

Знаменатель этого выражения  $D$  представляет собой ХП системы.

ХП системы, в которой разомкнуты все контуры, равен произведению ХП (знаменателей передаточных функций) всех дуг

$$D_0(s) = \prod_{\gamma=1}^N D_{\gamma}(s).$$

Можно показать [7], что определитель графа равен отношению ХП  $D$  и  $D_0$  соответственно исходной системы и системы, в которой все контуры разомкнуты:

$$\Delta(s) = D(s) / D_0(s).$$

Очевидно, в бесконтурном графе  $D = D_0$  и  $\Delta = 1$ .

Обратный переход от моделей "вход-выход" к моделям с раскрытой структурой не является однозначным. Действительно, одной и той же передаточной функции могут соответствовать сколько угодно систем дифференциальных уравнений различных порядков (1.8), уравнений в форме пространств состояний (1.12), а также сигнальных графов.

Для одномерной системы легко записать матрицы канонических форм пространства состояний по передаточной функции. Построение развернутых моделей для многомерных объектов, описанных, например, передаточными матрицами, представляет задачу так называемой минимальной реализации [36].

## 1.9. Модели систем управления высших уровней

Модели в терминах "вход-выход" (подразд. 1.2) или в форме систем дифференциальных уравнений (подразд. 1.3) описывают в свернутой или развернутой форме системы нулевого уровня причинно-следственной интеграции ( $L=0$ ).

Модели систем первого уровня ( $L=1$ ) образуются как ориентированная взаимосвязь элементов - систем нулевого уровня.

В общем случае моделями систем управления рассматриваемого класса являются причинно-следственные взаимодействия подсистем, описываемых не обязательно причинно-следственными уравнениями. Многие модели объектов и других элементов систем появляются в результате записи физических законов, в которых нет одностороннего характера взаимодействий компонентов. Направленность взаимодействий появ-

ляется благодаря деятельности специалистов по управлению, привносящих информационно-алгоритмический подход к проблеме формирования моделей систем.

На рис. 1.12 изображена топология модели системы управления первого уровня в виде диаграммы графа, в блоках которого вписаны обозначения векторов внутренних переменных  $x^m$  и полиномиальных матриц  $D^m, B^m, C^m$ ;  $m = 1, 2, 3$  систем дифференциальных уравнений. В частном случае блоки описываются уравнениями в форме пространства состояний.

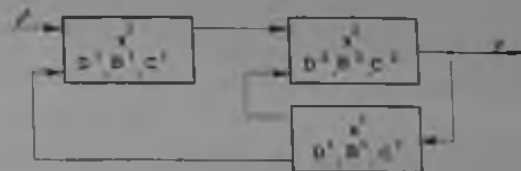


Рис. 1.12. Модель первого уровня в форме блок-графа

Описание моделей высших уровней осуществляется рекурсивно - модель  $L$ -го уровня строится как ориентированная взаимосвязь подсистем  $(L-1)$ -го уровня (п. 1.1.4).

Методы расчета многомерных систем управления обычно рассматривают частный случай моделей в форме векторно-матричных графов, вершинам которых соответствуют блоки с одним и тем же числом входов и выходов. Блоки таких графов описываются матрицами  $(A^m, B^m, C^m)$  уравнений в форме пространства состояний при применении временных методов расчета или передаточными матрицами  $W^m(s)$  и комплексными матрицами частотных характеристик  $W^m(j\omega)$  - при применении частотных методов (рис. 1.13).

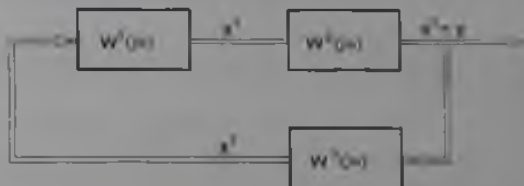


Рис. 1.13. Многомерная система

Классические структурные схемы,  $S$ -графы и сигнальные графы (подразд. 1.4) являются частными случаями моделей первого уровня, построенных на свернутых моделях одномерных звеньев. Для большинства практически важных задач проектирования систем управления эти модели являются наиболее удобными. Для них разработаны правила эквивалентных преобразований (алгебра блок-диаграмм), топологические формулы составления выражений для передаточных функций систем по передаточным функциям звеньев, частотные методы анализа устойчивости и чувствительности, а также методы синтеза.

## 2. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Задачи анализа

Анализ систем управления состоит в изучении их общесистемных свойств, условий выполнения ими своих функций и достижения заданных целей. В результате анализа качественно констатируются свойства поведения систем в целом и количественно оценивается степень удовлетворения требований к процессам управления. Анализ в широком смысле должен также объяснять, почему система с определенной структурой причинно-следственных взаимосвязей элементов с известными характеристиками имеет то или иное поведение.

Безусловными требованиями к свойствам поведения систем управления являются:

- устойчивость движений;
- инвариантность управляемой переменной к возмущениям и ковариантность с задающим воздействием;
- грубость (параметрическая инвариантность, робастность), т.е. ограниченная чувствительность свойств системы к вариациям характеристик элементов или связей.

Требования удобно рассматривать как множество систем  $\mathcal{M}^d$ , поведение которых удовлетворительно. Формально анализ при этом сводится к проверке принадлежности системы  $M$  к множеству удовлетворительных:

$$M \in \mathcal{M}^d. \quad (2.1)$$

При описании множества  $\mathcal{M}^d$  учитываются требования к свободным движениям собственно систем ( $M_S$ ), свойствам каналов передач систем со связями со средой ( $M_{YSF}$ ) и вынужденных движений расширенных систем  $M_{RS}$ , а также к дополнительным движениям, вызванным вариациями характеристик элементов и неполной определенностью моделей.

Описание множества  $\mathcal{M}^d$ , как правило, сводится к указанию допустимого отклонения от желаемой системы  $M^*$ . В идеальной желаемой системе мгновенно затухают переходные процессы, управляемая переменная абсолютно инвариантна к возмущениям, а вариации характеристик элементов не сказываются на этом идеальном поведении. Сопоставление с идеалом не всегда конструктивно. Часто формируют желаемые системы  $M^*$ , учитывающие естественную динамику объектов управления, характеристики воздействий среды, ресурсы управления и ограничения на переменные. Желаемые системы задают в виде типовых распределений корневых характеристических полиномов, нулей и полюсов передаточных функций, временных или частотных характеристик.

Показатели качества являются количественной мерой отклонения  $\rho(M, M^*)$  анализируемой системы  $M$  от желаемой системы  $M^*$ .

В том случае, когда анализируемая система определена не полностью, т.е. является множеством  $\{M\}$  полностью определенных моделей (см.1.6), процедура анализа сводится к проверке условия теоретико-множественного включения

$$\mathcal{M} = \{M\} \subset \mathcal{M}^d. \quad (2.2)$$

Если результат проверки положителен, т.е. при всех вариациях удовлетворяются требования, то анализируемая система робастна.

Непосредственная проверка условий (2.1), (2.2) возможна, если множества  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{D}$  заданы одним и тем же способом. Основная проблема анализа во многих случаях обусловлена различием языков описания систем и требований.

Таким образом, задачами анализа систем управления являются:

- установление фактов устойчивости, инвариантности и робастности;
- вычисление показателей качества;
- вывод об удовлетворительном (или неудовлетворительном) поведении системы.

## 2.2. Анализ устойчивости

Устойчивость по начальным условиям (по Ляпунову) - свойство собственно системы  $M_S$ . Если система устойчива, то затухают все составляющие свободных движений, вызванные ненулевыми начальными условиями. Свойство устойчивости анализируется по моделям типа  $M_S$  в форме однородных дифференциальных уравнений (1.3) или уравнений в форме пространства состояний (1.13).

### 2.2.1. Свободные движения

Преобразуя дифференциальные уравнения (1.3) по Лапласу при ненулевых начальных условиях

$$D(s) Y(s) = D_0(s),$$

легко получить изображение свободных движений

$$Y_c(s) = D_0(s)/D(s).$$

Коэффициенты полинома  $D_0(s)$  определяются начальными условиями. Если корни  $s_i$ ;  $i=1, \dots, n$ , ХП  $D(s)$  простые, то выражение для свободных движений имеет вид

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i(s)}{D'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.3)$$

Знак (') в выражении (2.3) означает дифференцирование полинома по  $s$ .

### 2.2.2. Условие устойчивости

Как видно из выражения (2.3), необходимым и достаточным условием затухания экспонент является отрицательность действительных частей корней ХП:

$$\forall i = 1, \dots, n; \operatorname{Re} s_i < 0. \quad (2.4)$$

Наилучшим решением задачи анализа устойчивости является формирование ХП системы и вычисление всех его корней, что вполне реально в условиях применения соответствующих компьютерных программ. Существуют критерии устойчивости Рауса-Гурвица (Routh-Hurwitz), Михайлова и др., позволяющие устанавливать выполнение условия (2.4) без вычисления корней ХП.

### 2.2.3. Требования к свободным движениям

Устойчивость - необходимое, но не достаточное условие работоспособности систем управления. Практически требуется принадлежность корней ХП некоторой подобласти левой полуплоскости (рис.2.1). Эта подобласть, по существу, является геометрическим выражением модели требований  $M_S$ . Параметры подобласти  $M_S$  являются корневыми показателями качества собственных движений - переходных процессов в системах управления. Наиболее часто ограничивают следующие корневые показатели качества:  $\eta$  - степень устойчивости (быстродействие), которая определяет абсолютное затухание;  $\mu$  - колебательность, определяющая относительное затухание (рис.2.1).

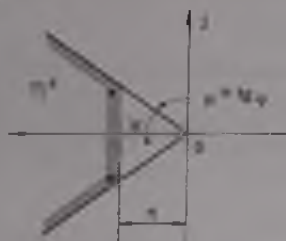


Рис.2.1. Корневые показатели качества

Для идеальных систем переходные процессы затухают мгновенно, т.е.  $\eta \rightarrow \infty$ , корни ХП стремятся в бесконечность, оставаясь в левой полуплоскости.

## 2.3. Анализ инвариантности

### 2.3.1. Формы инвариантности

Под абсолютной инвариантностью переменной  $y(t)$  понимается полная независимость вынужденных движений от воздействия среды  $f(t)$ . Если вынужденные движения при ограниченных воздействиях ограничены, то говорят об инвариантности до  $\epsilon$ .

Основным для классической теории инвариантности является случай, когда о воздействиях нет никакой информации, в том числе и статистического характера.

Селективная инвариантность означает независимость (ограниченную зависимость) установившейся реакции системы на воздействия среды определенного вида.

Ковариантность переменных означает их совпадение (близость). Управляемая переменная  $y(t)$  должна быть ковариантной с задающим воздействием  $g(t)$ . Это значит, что переменная ошибки системы управления

$$e(t) = g(t) - y(t)$$

должна быть инвариантной к заданию.

Теоретически без потери общности ограничиваются рассмотрением только условий инвариантности переменных. Практически для следящих систем преимущественно

щественно исследуют условия ковариантности, а для систем стабилизации и подавления возмущений - условия инвариантности.

Инвариантность - свойство систем по преобразованию сигналов. Инвариантность абсолютная и до  $\epsilon$  анализируются по моделям систем со связями со средой  $M_{YSF}$  (рис. 1.16). Свойство селективной инвариантности анализируется по моделям расширенной системы  $M_R$ .

### 2.3.2. Вынужденные движения систем управления

Изображение реакции системы на воздействие  $F$  при нулевых предначальных условиях

$$Y(s) = \Phi(s)F(s)$$

равно произведению ПФ системы

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (2.4)$$

на изображение воздействия

$$F(s) = \frac{B_f(s)}{D_f(s)} \quad (2.5)$$

Функция времени  $y(t)$  - оригинал изображения  $Y(s)$  - имеет установившуюся и переходную составляющие

$$y(t) = y_Y(t) + y_H(t),$$

которые для случая простых полюсов  $Y(s)$  запишутся так:

$$y_Y(t) = \sum_{k=1}^{n_Y} \frac{B(s_k)}{D(s_k)} \frac{B_f(s_k)}{D_f(s_k)} \exp(s_k t); \quad (2.6)$$

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{D'(s_i)} \frac{B_f(s_i)}{D_f(s_i)} \exp(s_i t). \quad (2.7)$$

Характер установившейся составляющей  $y_Y(t)$  определяется полюсами функции  $F(s)$   $\{s_k; k=1, \dots, n_f\}$ , иначе - комплексным спектром изображения воздействия (2.5), а переходной  $y_H(t)$  - полюсами  $\{s_i; i=1, \dots, n\}$  ПФ системы (2.4), иначе - собственным спектром системы.

### 2.3.3. Условия инвариантности

Условие абсолютной инвариантности переменной  $y(t)$  записывается так:

$$\forall s: \Phi(s) = 0.$$



Ясно, что при этом не будет ни установившейся, ни переходной составляющей реакции при любых ограниченных воздействиях. Однако будут свободные движения из-за ненулевых предначальных условий.

Если выполняется условие

$$\forall s: |\Phi(s)| < \varepsilon > 0,$$

то реакция системы на любое ограниченное воздействие ограничена.

Селективная абсолютная инвариантность достигается, как это следует из выражения (2.6), при условии обращения в нуль ПФ системы на спектре воздействия

$$\forall s_k: \Phi(s_k) = 0. \quad (2.8)$$

Установившаяся реакция отсутствует при взаимной компенсации нуля ПФ системы и полюса изображения воздействия, т.е. при условии

$$B(s_k) = 0. \quad (2.9)$$

Выполнение условия селективной инвариантности до  $\varepsilon$

$$\forall s_k: |\Phi(s_k)| < \varepsilon > 0$$

обеспечивает ограниченность установившихся составляющих реакции.

Селективная инвариантность является обобщением понятия астатизма систем управления на воздействия произвольного вида. Как известно, астатические системы способны подавлять и/или воспроизводить степенные воздействия с нулевой или постоянной установившейся ошибкой. Изображения степенных воздействий (1.17) имеют нулевые полюсы кратности  $(\lambda + 1)$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ . Соответственно, ПФ астатических систем от точки приложения воздействия до переменной ошибки имеют нули необходимой кратности  $\nu$ . В случае селективной инвариантности к воздействию произвольного вида  $f(t)$  ПФ системы обращается в нуль на не обязательно нулевых полюсах изображения  $F(s)$ . При этом селективная абсолютная инвариантность обобщает случай, когда порядок астатизма  $\nu$  превышает степень воздействия ( $\nu > l$ ), а селективная инвариантность до  $\varepsilon$  - случай, когда порядок астатизма равен степени воздействия ( $\nu = l$ ).

Установившаяся ошибка селективно абсолютно инвариантной системы управления равна нулю независимо от параметров воздействия и параметров системы. Действительно, из выражения (2.6) для установившегося движения видно, что при условии (2.9) оно равно нулю для любых значений  $\text{Br}(s_k)/D^*(s_k)$  и  $D(s_k) \neq 0$ . Таким образом, селективно абсолютно инвариантные системы робастны в смысле качества установившихся процессов.

### 2.3.4. Показатели качества инвариантных систем

Все работоспособные системы управления инвариантны в той или иной форме, однако количественная мера инвариантности может быть различной. Требования



к свойствам каналов преобразования при отсутствии информации о свойствах среды формализуются в виде модели  $M_{\text{УСР}}^d$ .

Абсолютная инвариантность - свойство идеальных систем, которое практически нереализуемо и не нуждается в количественной оценке.

Количественные оценки инвариантности до  $\varepsilon$  являются мерами отклонения реакций анализируемой системы от абсолютно инвариантной системы. В условиях полной неопределенности среды рассматриваемый канал удобно оценивать интегрально

$$I = \int_0^{\infty} w^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi(s) \Phi(-s) ds, \quad (2.10)$$

где:  $w(t)$  - импульсная переходная функция;

$\Phi(j\omega)$  - комплексная частотная характеристика;

$\Phi(s)$  - ПФ анализируемого канала.

Другой показатель качества оценивает "расстояние" до абсолютно инвариантной системы как максимум амплитудно-частотной характеристики на всем диапазоне частот

$$\varepsilon = \max_{\omega \geq 0} |\Phi(j\omega)|.$$

На рис.2.2а изображены графики амплитудно-частотных характеристик абсолютно инвариантной (прямая 1, совпадающая с осью абсцисс) и инвариантной до  $\varepsilon$  (кривая 2) систем.

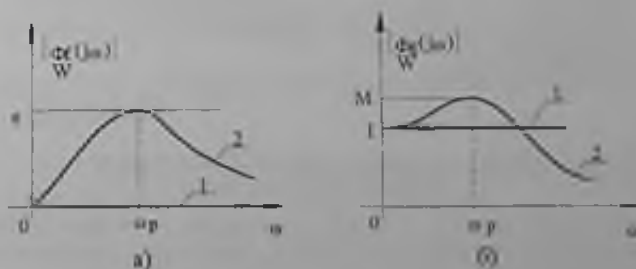


Рис.2.2. Амплитудно-частотные характеристики инвариантных (а) и ковариантных (б) систем

Если оценивается канал воспроизведения задающего воздействия, то его свойства сопоставляются с идеальной системой, в которой выход абсолютно ковариантен со входом. На рис.2.2б изображены графики амплитудно-частотных характеристик абсолютно ковариантной (прямая 1) и ковариантной до  $\varepsilon$  (кривая

2) систем. Обычно используются следующие косвенные показатели качества:  $\omega_p$  - резонансная частота;  $M$  - показатель колебательности.

Требования к расширенным системам  $M_R$  характеризуют свойства каналов по преобразованию сигналов для известной модели среды. Модель требований  $\sigma\%$  количественно оценивает свойства селективной инвариантности по отношению к указанным воздействиям.

Селективно абсолютно инвариантные системы имеют нулевую установившуюся ошибку.

В селективно инвариантных до  $\varepsilon$  системах значения отличных от нуля установившихся ошибок при указанных воздействиях принимаются за показатели качества.

Если о воздействиях нет полной определенности, а указано только множество существенных частот  $\Omega_f$  воздействия, то селективная инвариантность до  $\varepsilon$  количественно оценивается по амплитудно-частотной характеристике  $|\Phi(j\omega)|$

$$\max_{\omega \in \Omega_f} |\Phi(j\omega)|.$$

Выполнение условий селективной абсолютной инвариантности (2.8) обеспечивает равенство нулю установившейся составляющей (2.6) реакции системы, однако, как видно из выражения (2.7), на выходе системы могут наблюдаться переходные процессы. Прямые показатели качества ограничивают непосредственно переходные процессы (рис.2.3а), а их вычисление, как правило, связано с построением этих процессов.

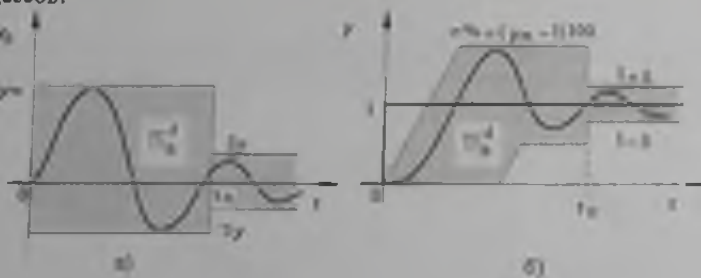


Рис.2.3. Прямые показатели качества инвариантных (а) и ковариантных (б) систем

На рис.2.3 показаны области допустимых процессов, т.е. модели требований.

Наиболее часто ограничивают максимум  $y_m$  переходной ошибки и время процессов  $t_p$ , по истечении которого ошибка не выходит за пределы достаточно малой окрестности  $\delta y$  оси абсцисс.

Если оценивается канал воспроизведения задающего воздействия, то переходные процессы сопоставляются с реакцией абсолютно ковариантной системы (рис.2.3б). Прямыми показателями качества, ограничивающими протекание процессов, являются: перерегулирование  $\sigma\%$ , время процессов  $t_p$  и др.

Переходные процессы часто оцениваются интегрально

$$I = \int_0^{\infty} y_n^*(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Y_n(s) Y_n(-s) ds,$$

что соответствует оценке "расстояния" до идеальной системы ( $y_n^*(t) \equiv 0$ ). Более конструктивные оценки сравнивают анализируемые процессы с желаемыми

$$I = \int_0^{\infty} (y_n^*(t) - y_n(t))^2 dt.$$

Для количественной оценки переходных процессов также используются обобщенные квадратичные функционалы

$$I_p = \int_0^{\infty} [a_0 y^2(t) + a_1 \dot{y}^2(t) + \dots + a_p (y^{(p)})^2(t)] dt,$$

безусловные экстремали которых  $y_n^*(t)$  отвечают желаемым процессам, для которых  $I_p = I_p^*$ , а разница

$$\delta I_p = I_p^* - I_p$$

между значениями функционала служит мерой расстояния анализируемых систем от желаемых.

В том случае, когда модели объектов управления представляются в форме пространства состояний (1.12), функционалы качества описываются в виде:

$$I = \int_0^{\infty} (v^T Q v + u^T R u) dt. \quad (2.11)$$

где:  $v$  - вектор состояния;  
 $u$  - вектор управления;  
 $Q, R$  - матрицы весовых коэффициентов.

#### 2.4. Управляемость и наблюдаемость (полнота характеристик) систем управления

Если ПФ (2.4) системы между рассматриваемыми точками вырождается, т.е. имеет некоторое число равных друг другу нулей и полюсов  $s_i$  (диполей), то, как видно из (2.7), в силу

$$B(s_i) = 0$$

реакция системы на воздействие неполная - в ней отсутствуют соответствующие моды - переходные составляющие  $\exp(s_i t)$ . В более общем случае говорят о неполной управляемости или неполной наблюдаемости состояния системы по рассматриваемому каналу.

Временные и частотные характеристики системы отражают только свойства полной части системы.

Потеря части собственных свойств систем особенно существенна, если  $s_1$  - правый корень. Поэтому следует избегать сокращения общих делителей полиномов В и D ПФ, по крайней мере, до того, как будет установлена удовлетворительность динамики неполной части системы.

Свойство полноты относится к модели системы со связями со средой  $M_{YSF}$  (рис.1.16). Выявление управляемости и наблюдаемости объектов и систем составляет важную часть анализа систем управления.

Анализ полноты сводится к выявлению нетривиальных общих делителей полиномов В и D числителя и знаменателя ПФ (2.4). Во-первых, можно непосредственно сопоставить нули и полюсы ПФ. Достоинство этого способа в том, что здесь выявляются и приближенные диполи. Во-вторых, наибольший общий делитель полиномов можно найти их делением по алгоритму Евклида. В-третьих, можно исследовать результат полиномов - специальный определитель, построенный из коэффициентов полиномов В и D.

Если модель системы представлена в форме пространства состояний (1.12), то для анализа управляемости и наблюдаемости Калманом (R. Kalman) предложены матричные критерии. Состояние системы управляемо полностью, если матрица управляемости не вырождена, т.е.

$$\det (B | AB | \dots | A^{n-1}B) \neq 0.$$

Состояние системы полностью наблюдаемо, если не вырождена матрица наблюдаемости, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

## 2.5. Анализ влияния вариаций характеристик элементов на свойства систем управления

Из-за неполной идентификации или последующего упрощения моделей, неточной реализации алгоритмов управления или изменения свойств элементов в процессе эксплуатации систем их модели отличаются от оригиналов. При построении математических моделей и проектировании систем управления возникает задача оценки степени влияния неполной определенности моделей или вариаций характеристик элементов на установившиеся и переходные процессы систем в целом.

Необходимым условием нормального функционирования систем управления является их робастность (грубость, параметрическая инвариантность), т.е. ограниченная чувствительность основных свойств системы (устойчивости и инвариантности) к вариациям характеристик элементов и/или связей. Поэтому анализ систем управления должен содержать этап оценки дополнительных движений, вызванных воздействиями среды, приводящими к изменениям динамических свойств элементов этих систем (параметров, структур операторов или даже топологии связей). Результаты такого анализа также помогают объяснить, почему данная система

имеет то или иное поведение, каковы средства его изменения при синтезе в требуемом направлении.

При некоторых условиях вариации систем можно рассматривать как их неполную определенность, а соответствующие модели представлять как множества полностью определенных моделей (подразд.1.6). В подразд.2.1 отмечалось, что анализ в этом случае сводится к проверке условия теоретико-множественного включения (2.2) множества анализируемых систем  $\{M\}$  в множество требуемых  $M^d$ .

Выше обсуждались задачи анализа полностью определенных моделей третьего ранга  $M(R=3)$ . В этом подразделе рассматриваются задачи анализа различных ситуаций для не полностью определенных моделей.

### 2.5.1. Анализ систем при параметрических вариациях

В случае модели  $M(2)$  имеет место множество систем, различающихся параметрами (рис.1.11а). Модели  $M(2)$  имеют фиксированную структуру операторов всех элементов, поэтому такая ситуация называется структурированной неопределенностью.

Простейшим методом анализа систем при параметрических вариациях является вычисление приращений характеристик систем при конечных вариациях тех или иных параметров, т.е. многократный анализ систем с различными параметрами.

Разработаны методы анализа устойчивости так называемых интервальных систем, коэффициенты характеристических полиномов которых принадлежат заданным интервалам (критерий В.Л. Харитонова).

Для тех ситуаций, когда неизвестны интервалы изменения параметров, в рамках теории чувствительности систем управления разработаны методы анализа параметрической чувствительности характеристик и показателей качества [20].

### 2.5.2. Анализ систем при неструктурированных вариациях операторов элементов

Модели первого ранга  $M(1)$  имеют фиксированную топологию, однако структуры операторов некоторых элементов определены не полностью. Такую ситуацию неструктурированной неопределенности можно попытаться доопределить до рассмотренного выше случая параметризованных вариаций, однако здесь более плодотворно использование структурной теории чувствительности [20]. Рассмотрение структуры и свойств в частотной области позволяет выявить роль элементов и неструктурированной неопределенности их характеристик в формировании свойств системы в целом.

Для исследования влияния неструктурированных вариаций элементов на условия инвариантности системы используются функции чувствительности (ФЧ) ПФ систем  $\Phi(s)$ . Логарифмические ФЧ

$$S_i^{\Phi}(s) = \frac{\partial \ln \Phi(s)}{\partial \ln W_i(s)} = \frac{\partial \Phi(s)}{\partial W_i(s)} \cdot \frac{W_i(s)}{\Phi(s)}$$

позволяют оценить относительное влияние вариаций ПФ элементов на ПФ системы:

$$\frac{\delta \Phi(s)}{\Phi(s)} = S_i^{\Phi}(s) \frac{\delta W_i(s)}{W_i(s)}$$



Для анализа относительного влияния различных дуг графа или звеньев системы на устойчивость можно использовать ФЧ определителя графа  $\Delta(s)$  или ХП  $D(s)$ . Напомним, что определитель графа равен отношению ХП замкнутой  $D$  и разомкнутой  $D_0$  систем.

Логарифмические ФЧ  $S_{ab}^{\Delta}$  определителя графа к дуге  $(a,b)$  и ФЧ ХП к полиному числителя  $V_{ab}$  ПФ дуги равны (рис.2.5):

$$S_{V_{ab}}^{\Delta}(s) = S_{ab}^{\Delta}(s) = -\Phi_{ca}(s).$$

Ясно, что ФЧ определителя графа и ХП отличаются только знаком от ФЧ тех передач графа, по отношению к которым варьируемая дуга занимает позицию 2.



Рис. 2.5. Вычисление чувствительности ХП

### 2.5.3. Анализ устойчивости систем при топологических вариациях.

#### Критерий Найквиста

Модель нулевого ранга  $M(0)$  - это множество систем, различающихся топологией. При рассмотрении таких систем предполагается, что вариации могут быть столь радикальными, что приводят к изменению числа элементов, разрыву связей между ними или появлению новых связей.

Наиболее интересен анализ влияния топологических вариаций систем на устойчивость процессов.

Если элементы системы не образуют контуров, то ее ХП равен произведению ХП звеньев

$$D(s) = D_0(s) = \prod_{\gamma=1}^N D_{\gamma}(s),$$

а множество его корней есть объединение подмножеств корней ХП звеньев. Вариации связей бесконтурных систем не изменяют их условия устойчивости и характер собственных движений.

В системах автоматического управления, реализующих принцип отрицательной обратной связи, важнейшее значение имеет анализ роли контуров систем в пере-



мещении корней ХП относительно мнимой оси. Целью анализа является определение числа корней ХП, переходящих через определенный контур на комплексной плоскости (для ХП  $D(s)$  - контур Найквиста, т.е. мнимая ось) в результате замыкания или размыкания контура или групп контуров системы.

Частотный метод и его варианты, базирующиеся на принципе аргумента, дают возможность анализировать влияние топологических вариаций на устойчивость и качество процессов.

**Критерий Найквиста:** для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) разомкнутой системы  $p/2$  раз охватывала против часовой стрелки точку с координатами  $(-1, j0)$ , где  $p$  - число правых полюсов ПФ разомкнутой системы.

В частности, если разомкнутая система устойчива ( $p=0$ ), то для устойчивости замкнутой системы АФХ разомкнутой системы  $W(j\omega)$  не должна охватывать точку  $(-1, j0)$ . В общем случае анализ числа охватов АФХ критической точки позволяет определить число корней ХП системы, переходящих через мнимую ось при замыкании или размыкании контуров системы.

Критерий Найквиста принципиально отличается от критериев устойчивости типа Рауса-Гурвица и Михайлова. С одной стороны, по виду частотных характеристик разомкнутой системы нельзя констатировать устойчивость замкнутой системы, если предварительно не проведен анализ устойчивости разомкнутой системы и не определено число  $p$  полюсов ПФ разомкнутой системы вне левой полуплоскости. С другой стороны, роль критерия Найквиста более значительна. Его достоинством является возможность анализа системы в зависимости от характеристик элементов, образующих контур.

Частотные характеристики разомкнутых контуров в форме АФХ  $W(j\omega)$  (рис.2.6а) или соответствующих логарифмических частотных характеристик  $L(\omega)$   $\varphi(\omega)$  (рис.2.6б) содержат более богатую информацию, чем это необходимо для установления факта устойчивости замкнутой системы.



Рис.2.6. Частотные характеристики контура и косвенные показатели качества

По расположению частотной характеристики относительно точки  $(-1, j0)$  можно судить о ближайших к мнимой оси - доминирующих - корнях ХП замкнутой системы, в основном определяющих переходные процессы в системах управления. На практике часто используют следующие косвенные показатели качества, оценивающие расстояние от частотной характеристики до критической точки:



$$\Delta K = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|} : \Delta L = 20 \lg \Delta K$$

- запас устойчивости по модулю и

$$\Delta \varphi = \varphi(\omega_{ср}) + \pi$$

- запас устойчивости по фазе. Частота среза контура  $\omega_{ср}$  удовлетворяет условию

$$|W(j\omega_{ср})| = 1; \quad L(\omega_{ср}) = 0.$$

а на частоте  $\omega_\pi$  фазовая характеристика контура  $\varphi(\omega)$  имеет значение  $-\pi$  рад.

При привлечении этих косвенных показателей для анализа и оценки качества процессов следует иметь в виду условия их применения. Предполагается, что разомкнутая система устойчива и не сильно колебательна. В результате замыкания контура корни ХП перемещаются и часть из них приближается к мнимой оси. Запасы устойчивости по модулю  $\Delta K(\Delta L)$  и по фазе  $\Delta \varphi$  показывают относительное расстояние от доминирующих корней до мнимой оси - границы устойчивости. Если разомкнутая система неустойчива или сильно колебательна, то частотные показатели качества следует определять иначе.

#### 2.5.4. Анализ грубости систем управления

Важное значение при анализе систем управления имеет исследование их грубости.

Система называется грубой (по А.А. Андронову), если малые изменения параметров не приводят к качественному изменению ее поведения. В линейных системах негрубость имеет место, если в результате малых изменений параметров корни ХП переходят через мнимую ось.

Строго говоря, система, находящаяся на границе устойчивости, является негрубой. Наиболее опасен переход корней из левой полуплоскости в правую через бесконечность. Если при конечном, так называемом бифуркационном, значении некоторого параметра происходит обнуление старшего коэффициента ХП, т.е. понижение его степени, то корень ХП уходит в бесконечность. В случае малых изменений параметра старший коэффициент может стать отрицательным, т.е. корень с бесконечно большим модулем переходит в правую полуплоскость, а соответствующая составляющая процесса катастрофически расходится.

Условием катастрофической негрубости является

$$n < n_0 = \sum_{\gamma=1}^N n_\gamma.$$

Здесь:  $n = \deg D$ ;  $n_0 = \deg D_0$  - степени ХП системы;  $n_\gamma$  - степени ХП звеньев  $D_\gamma$ .

## 2.6. Анализ многоуровневых систем управления

Анализ динамических систем управления со сложной структурой предполагает предварительное построение частных моделей, соответствующих выявляемым свойствам:

- характеристических полиномов - при анализе устойчивости;
- передаточных функций, временных и частотных характеристик - при анализе инвариантности и ковариантности;
- возвратных отношений, т.е. передаточных функций и частотных характеристик разомкнутых систем - при анализе роли контуров;
- функций чувствительности - при анализе влияния вариаций звеньев на свойства систем.

Методы и алгоритмы построения перечисленных и других характеристик разработаны для систем 0-го уровня, представленных в форме систем дифференциальных уравнений (1.7), (1.8), а также для сигнальных графов и структурных схем.

Напомним, что классические структурные схемы, *S*-графы и сигнальные графы являются моделями 1-го уровня частного вида и, как ясно из 1.4, строятся на элементах, описываемых одномерным оператором (с одним входом и одним выходом - типа SISO). Для моделей *L*-го уровня общего вида (рис. 1.12), образованных произвольной ориентированной взаимосвязью подсистем (*L*-1)-го уровня со многими входами и выходами (типа MIMO), в классической теории регулирования не создавались специальные методы анализа. Вместе с тем процедуры исследования систем произвольного уровня *L* в некоторых случаях могут быть развиты на основе известных методов.

Из определения многоуровневых систем, введенного в 1.9, следует, что исследование системы любого уровня *L* можно проводить по методам и алгоритмам, разработанным для систем 0-го и 1-го уровней.

Ниже рассмотрены некоторые способы анализа систем 1-го уровня общего вида, базирующиеся на методах, разработанных для систем 0-го уровня и систем 1-го уровня частного вида.

### 2.6.1. Понижение уровня модели

Если объединить подсистемы уравнений блоков системы 1-го уровня (рис. 1.12), то получится система уравнений с блочными матрицами **D**, **B** и **C**:

$$\begin{aligned} D\dot{x} &= Bf; \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Диагональными блоками матрицы **D** будут матрицы подсистем  $D^m$ ;  $m = 1, \dots, M$ ; связи между подсистемами представляются недиагональными элементами, позиции которых определяются топологией связей подсистем. В блочной матрице **D**, а также в матрицах **B** и **C** сохраняется исходная информация о системе 1-го уровня.

Приведем для примера структуру блочных матриц системы, изображенной на рис.1.12:

$$y = \begin{bmatrix} D & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} x$$

$D = \begin{bmatrix} D^1 & & B_2^1 \\ B_1^1 & D^2 & B_2^2 \\ & B_2^3 & D^3 \end{bmatrix}$ 
 $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \end{bmatrix}$ 
 $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \end{bmatrix}$

Игнорируя блочный характер матриц  $D$ ,  $B$  и  $C$ , получаем обыкновенные матрицы системы 0-го уровня, к которым применимы известные методы получения характеристического полинома и передаточных функций (п.1.8.1).

Ясно, что анализ системы любого уровня  $L$  таким образом можно последовательно свести к анализу системы 0-го уровня.

Недостатками этого способа являются:

- невозможность исследования зависимости свойств системы от характеристик подсистем;
- увеличение размеров системы уравнений, которое может вызвать вычислительные проблемы.

По объединенной системе уравнений (2.13) можно построить абстрактный граф (п.1.7.2) - систему 1-го уровня частного вида. Это позволяет использовать топологические методы (например, формулу Мэсона) для анализа системы в целом. Однако из-за несоответствия топологии графа реальным элементам системы управления содержательные задачи теории управления по таким графам в общем случае не решаются.

### 2.6.2. Построение системных графов

Пусть по каждой из подсистем уравнений системы 1-го уровня построен свой подграф  $G^m$ ;  $m = 1, \dots, M$ . Если подграфы соединить согласно связям между подсистемами, то получится так называемый системный граф [13]. На рис. 2.7 показан пример системного графа, соответствующего структуре на рис.1.12.

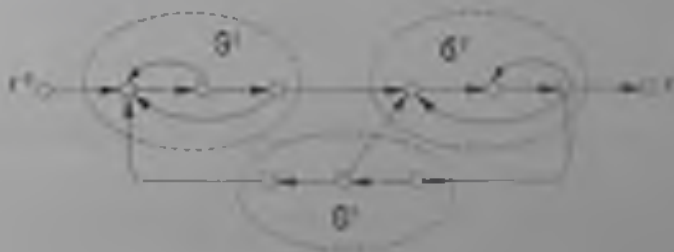


Рис.2.7. Пример системного графа

В системном графе, как и в блочных матрицах, полностью сохраняется исходная информация. Кроме того, благодаря дополнительной информации, привлекаемой при построении подграфов по системам уравнений, полученная система имеет 2-й, искусственно созданный уровень. Для анализа системных графов необходимо разрабатывать и применять свои методы.

### 2.6.3. Топологическая редукция

Для реализации принципа рекуррентного объяснения необходимо иметь процедуры, позволяющие строить характеристики систем  $L$ -го уровня - характеристические полиномы, передаточные функции, частотные и другие характеристики - по характеристикам подсистем  $(L-1)$ -го уровня.

Характеристики, иначе неизбыточные частные модели подсистем, получаются путем исключения внутренних переменных в уравнениях или топологической редукции подграфов.

Задача решается просто, если все подсистемы имеют один вход и один выход (типа SISO). В результате топологической редукции подсистемы описываются скалярными операторами - передаточными функциями, частотными характеристиками. Сворачивание подсистем дает обыкновенный граф, для анализа которого применяются известные методы теории управления.

Если подсистема имеет несколько входов и несколько выходов (типа MIMO), то исключение всех внутренних переменных означает описание подсистемы в виде передаточной матрицы  $W$  или пары  $\langle D, B \rangle$ , где:  $D$  - характеристический полином;  $B$  - полиномиальная матрица числителей передаточных функций. В результате подсистема "распадается" на несколько параллельно соединенных звеньев (рис.2.8а).

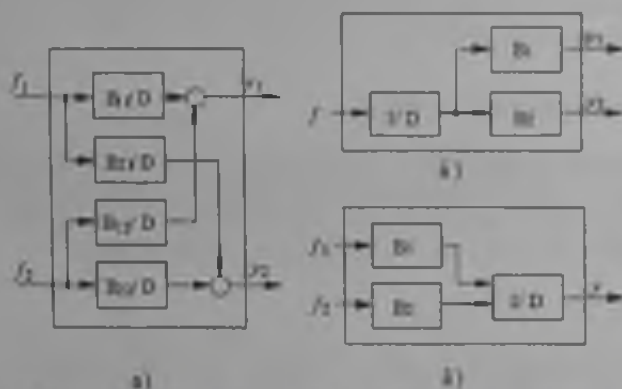


Рис. 2.8. Свернутое структурное представление многомерного объекта

Представление подсистемы (типа MIMO) обыкновенной структурной схемой оказывается избыточным: все звенья имеют один и тот же знаменатель - полином  $D$ . К обыкновенным графам, полученным заменой подсистем биграфами (рис.2.8а), не всегда применимы методы классической теории управления. Должны

также модифицироваться алгоритмы построения их характеристик в символической форме.

В том случае, когда некоторые подсистемы имеют один вход, но несколько выходов (типа SIMO) или несколько входов, но один выход (типа MISO), свернутому описанию подсистем можно сопоставить избыточное структурное представление. Для этого вводится отдельное звено с передаточной функцией  $1/D$ , как это показано на рис.2.8б и рис.2.8в.

Топологическая редукция подсистем, уменьшая число переменных, приводит к росту порядков уравнений, описывающих подсистемы. Появляется задача понижения порядка - структурной редукции. Она решается путем исключения неполных (не полностью управляемых и наблюдаемых) частей подсистем или/и сокращения интервала  $\Omega$  адекватности моделей по частотной оси (рис.1.10), например за счет игнорирования больших по модулю полюсов и нулей.

Свернутые модели подсистем могут иметь форму частотных характеристик - комплексных матриц (рис.1.13). Это неструктурированная (непараметрическая) форма представления операторов применяется в частотных методах исследования многомерных систем [24,31]. В этом случае отсутствует проблема структурной избыточности. Другое достоинство частотного подхода - по виду ЧХ можно подбирать наиболее существенный для анализа системы данного уровня  $L$  частотный диапазон, т.е. одновременно решать задачу структурной редукции за счет сокращения интервалов частот. Кроме того, при описании подсистем в частотной области автоматически исключаются неполные части (компенсирующиеся нули и полюсы передаточных функций). В силу сказанного частотные методы, дополненные контролем образования и исключения неполных частей подсистем, оказываются весьма перспективными при анализе и синтезе многоуровневых систем управления.

#### 2.6.4. Анализ устойчивости многоуровневых систем

Устойчивость системы любого уровня  $L$  можно анализировать, понижая ее уровень до 0-го. Однако при этом не будет выявлена роль подсистем и связей между ними. Ниже рассматривается частотный метод анализа устойчивости многоуровневых систем, представленных в форме системного графа.

В результате топологического анализа выявляются сильно связанные компоненты графа, в том числе дуги, не входящие в контуры. Это обеспечивает декомпозицию процедуры анализа - необходимым и достаточным условием устойчивости сложной системы является устойчивость каждого сильного компонента графа.

Пусть выделен сильный системный граф, образованный подграфами  $G^m$ ;  $m = 1, \dots, M$ . Вначале анализируется устойчивость подсистем и выявляется число правых корней их характеристических полиномов  $D^m$ ; далее анализ заключается в выявлении роли контуров взаимосвязей подсистем в перемещении этих корней.

Представим определитель графа в виде суммы

$$\Delta = \Delta^0 + \delta\Delta,$$

где:  $\Delta^0 = \prod_m \Delta^m$  - произведение определителей подграфов,

$\delta\Delta$  - приращение определителя за счет контуров взаимосвязей подсистем.

Составим отношение

$$K_e = \frac{\delta\Delta}{\Delta^0} \quad (2.14)$$

которое примем за передаточную функцию эквивалентной одноконтурной системы (рис.2.9). Определитель этой системы

$$\Delta_e = 1 - K_e$$

равен отношению характеристических полиномов системы  $D$  и системы с разомкнутыми контурами взаимосвязи подсистем  $D^0$ :

$$\Delta_e = \frac{D}{D^0} \quad (2.15)$$

где:

$$D^0 = \prod_{m=1}^M D^m$$

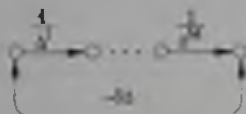


Рис.2.9. Эквивалентная одноконтурная система

Таким образом, одноконтурная система (рис.2.9) оказывается эквивалентной исходной системе в смысле характеристического полинома. В одноконтурной эквивалентной системе ясно видна роль характеристик подсистем и контуров связей.

Представим характеристический полином системы в виде:

$$D = D^0 + \delta D,$$

где  $\delta D$  - приращение за счет контуров взаимосвязей подсистем. Можно показать, что передаточная функция одноконтурной системы равна отношению:

$$K_e = \delta D / D^0.$$

Применение критерия Найквиста к эквивалентной системе (рис.2.9) позволяет установить число корней характеристического полинома, переходящих через мнимую ось в результате замыкания/размыкания контуров связей подсистем.

При отсутствии контуров взаимосвязей подсистем (связи, не образующие контуров, могут присутствовать) приращение определителя графа тождественно равно нулю:  $\delta\Delta = 0$ , а характеристический полином системы равен произведению характеристических полиномов подсистем (2.15), т.е. устойчивость системы определяется устойчивостью подсистем. Этот факт устанавливается на этапе топологического анализа.

Достаточным условием сохранения числа корней характеристического полинома внутри контура Найквиста - правой полуплоскости является

$$\forall \omega: |\delta\Delta(j\omega)| < |\Delta^0(j\omega)| \quad (2.16)$$

При этом имеем

$$|K_e(j\omega)| < 1.$$

Условие (2.16) не является необходимым.

По условию (2.16) можно заключить, что увеличение модулей определителей подграфов  $|\Delta^m(j\omega)|$  является средством относительного ослабления влияния на устойчивость контуров взаимосвязей подсистем. Повышать модули определителей подграфов можно путем увеличения усиления контуров за счет усиления дуг, не входящих в контуры связи подсистем.

В случае системы 2-го и выше уровня процедура анализа устойчивости остается той же самой: анализируется устойчивость подсистем, после чего исследуется в частотной области влияние контуров связей на устойчивость системы в целом.

## 2.7. Примеры анализа объектов и систем управления

### 2.7.1. Анализ магнитного подвеса физического тела

На рис.2.10 изображена линеаризованная для малых отклонений от положения равновесия модель объекта в форме структурной схемы. Магнитный подвес - ферромагнитное тело (ФМТ), удерживаемое на высоте  $h$  за счет уравнивания силы тяжести силой тяги электромагнита (ЭМ). Напряжение  $u_h$  на выходе оптического датчика положения (ДП) пропорционально малым отклонениям тела от заданной высоты. Усилитель (У) является усилителем мощности с выходным сигналом  $u_2$ , приложенным к ЭМ.

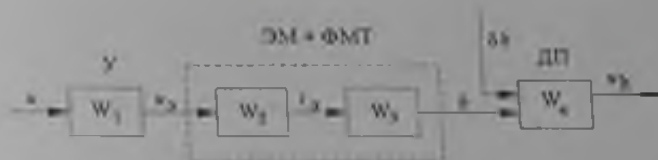


Рис. 2.10. Математическая модель магнитного подвеса

ПФ звеньев структурной схемы (элементов объекта) имеют следующий вид:

$$W_1(s) = \frac{50}{0.01s+1}; \quad W_2(s) = \frac{0.1}{0.01s+1};$$

$$W_3(s) = \frac{1}{0.04s^2-1}; \quad W_4(s) = 0.2.$$

Различные по физической природе возмущающие воздействия представлены на структурной схеме в виде приведенного возмущения  $\delta h(t)$ .

ПФ объекта по каналу управляющего воздействия равна:

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)} = \frac{1}{(0.01s+1)(0.01s+1)(0.04s^2-1)}$$



Характеристический полином  $D_0(s)$  имеет следующие корни:  $s_{1,2} = -100$ ;  $s_{3,4} = \pm 5$ .

Объект неустойчив - среди корней ХП есть один положительный. Без создания замкнутой системы управления нельзя удерживать тело в магнитном поле.

Полиномы числителя  $B_0$  и знаменателя  $D_0$  ПФ не имеют одинаковых корней, следовательно, объект по каналу управляющего воздействия - полный (управляем и наблюдаем полностью). Все полюсы ПФ могут быть целенаправленно изменены (перемещены на плоскости корней) путем охвата объекта обратной связью, т.е. построения замкнутой системы стабилизации положения физического тела.

### 2.7.2 Анализ двигателя внутреннего сгорания

На рис.2.11 изображена математическая модель двигателя внутреннего сгорания (ДВС) как объекта управления частотой вращения [26]. Выходная переменная объекта  $n$  - частота вращения, возмущающее воздействие  $f$  - момент нагрузки на валу двигателя. Операторы элементов линеаризованной для определенного режима модели имеют вид:

$$W_1(s) = \frac{1}{284s};$$

$$W_2(s) = -0.1;$$

$$W_3(s) = -1;$$

$$W_4(s) = \frac{1}{(0.1s+1)};$$

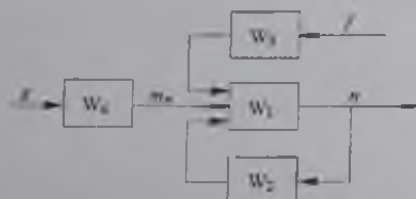


Рис.2.11. Математическая модель ДВС

ПФ объекта по каналу управляющего воздействия

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)} = \frac{W_4 W_1}{1 - W_1 W_2} = \frac{10}{(28.4s+1)(0.1s+1)}$$

является полной, т.е. полиномы числителя  $B_0(s)$  и знаменателя  $D_0(s)$  не имеют общих делителей.

Объект устойчив - оба корня ХП полинома  $D$  отрицательные:  $s_{01} \approx -0.04$ ;  $s_{02} = -10$ . На рис.2.12 показан переходный процесс объекта управления при единичном ступенчатом воздействии.



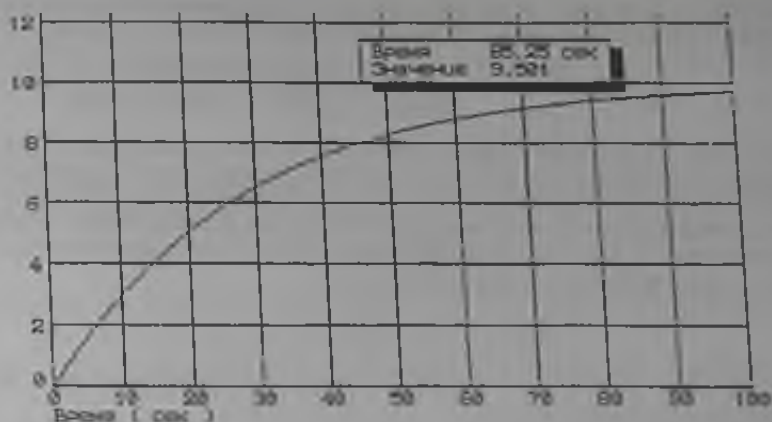


Рис.2.12. Переходная характеристика ДВС как объекта управления

Можно заметить, что переходный процесс имеет характер, близкий к экспоненциальному, определяемому корнем  $s_{01} \approx -0.04$  (так как соответствующая второму корню составляющая процесса  $\exp(-10t)$  быстро затухает).

### 2.7.3. Анализ следящей системы

На рис.2.13 изображена структурная схема электромеханической следящей системы, элементами которой являются: электродвигатель постоянного тока (ДПТ) с редуктором (Р), управляемый тиристорным преобразователем (УТП), датчик согласования (Д) и усилитель (У).

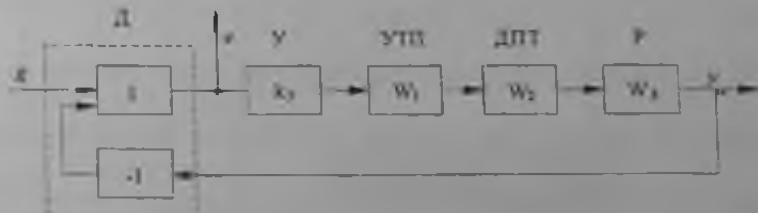


Рис.2.13. Модель следящей системы

Передаточные функции элементов имеют вид:

$$W_1(s) = \frac{10}{0.003s+1}; \quad W_2(s) = \frac{2}{0.0002s^2 + 0.04s+1};$$

$$W_3(s) = \frac{0.01}{s}; \quad k_y = 1000.$$

Система астатическая - в контуре имеется интегрирующее звено. Передаточная функция системы от задающего входа  $g$  до переменной ошибки  $e$  равна

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{B_{eg}(s)}{D_0(s)} = \frac{s(0.003s+1)(0.0002s^2+0.04s+1)}{s(0.003s+1)(0.0002s^2+0.04s+1)+200}$$

Среди нулей ПФ имеется один нулевой, т.е. для постоянных воздействий  $g(t)=g_0 1(t)$  с изображением  $G(s)=g_0/s$ , имеющим нулевой полюс, установившаяся ошибка системы будет равна нулю (п.2.3.3). Система селективно абсолютно инвариантна к постоянным задающим воздействиям. Если задание линейно изменяется во времени ( $g(t) = g_1 t$ ), т.е. его изображение  $G(s)=g_1/s^2$  имеет двукратный нулевой полюс, то установившаяся ошибка будет равна

$$\epsilon_y = \frac{\beta}{k_1}$$

где  $k_1 = 200\text{c}^{-1}$  - добротность по скорости. Система селективно инвариантна до  $\epsilon$  к линейному воздействию.

Как видно из ЛАЧХ разомкнутой системы (рис.2.14),  $L_p(\omega = 10\text{c}^{-1}) \cong 26\text{дБ}$ , т.е. гармонические воздействия  $g(t) = A \sin \omega t$  с частотами  $\omega \leq 10\text{c}^{-1}$  воспроизводятся на выходе системы с установившейся ошибкой по амплитуде, не превосходящей 0.05A, причем чем ниже частота, тем меньше амплитуда ошибки.

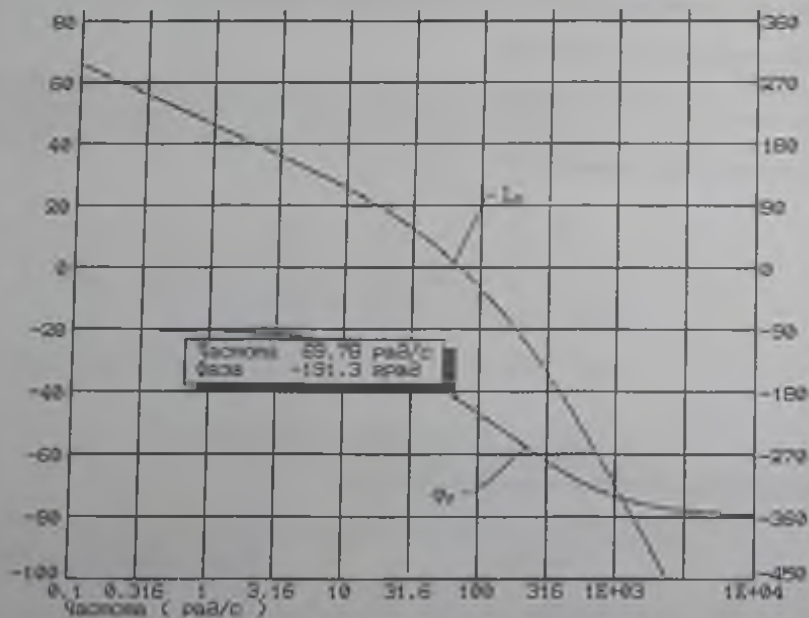


Рис. 2.14. ЛЧХ разомкнутой следящей системы

В соответствии с критерием Найквиста замкнутая следящая система неустойчива (на частоте среза  $\varphi = -191.3$  град). Таким образом, при замыкании контура отрицательной обратной связью пара полюсов (корней ХП) перемещается в правую полуплоскость.

#### 2.7.4. Анализ системы с положительным внутренним контуром

Рассмотрим систему, граф которой изображен на рис.2.4а, а структурная схема - на рис.2.4б. Передаточная функция объекта

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)}$$

равна отношению полиномов  $B_0(s)$  и  $D_0(s)$ , степени которых связаны соотношением  $m_0 = l_0 - 1$ . Допустим, что все нули ПФ объекта - левые.

Регулятор пропорционального типа с параметром настройки  $k$  охвачен положительной обратной связью с усилением  $\alpha > 0$ .

По каналам задающего и возмущающего воздействий система имеет следующие ПФ:

$$\Phi_{yg}(s) = k \frac{B_0(s)}{D(s)} ; \Phi_{yf}(s) = (1 - \alpha k) \frac{D_0(s)}{D(s)},$$

где

$$D(s) = (1 - \alpha k) D_0(s) + k B_0(s) \quad (2.17)$$

- ХП системы, степень которого  $n = n_0$ .

При условии

$$\alpha^* = \frac{1}{k}, \quad (2.18)$$

когда внутренний контур имеет единичную передачу ( $\alpha k = 1$ ), получим

$$\Phi_{yg}(s) = 1 ; \Phi_{yf}(s) = 0,$$

т.е. выход системы  $y$  будет абсолютно ковариантным с заданием  $g$  и абсолютно инвариантным к возмущению  $f$ .

Логарифмическая ФЧ  $S_{W_0}^{\Phi g}$  ПФ системы  $\Phi_{yg}(s)$  к вариациям объекта вычисляется как ПФ между концами диполя чувствительности ( $y, h$ )

$$S_{W_0}^{\Phi g}(s) = \Phi_{yh}(s) = \frac{(1 - \alpha k) D_0(s)}{(1 - \alpha k) D_0(s) + k B_0(s)}.$$

При условии (2.18) имеем

$$S_{W_0}^{\Phi g}(s) = 0.$$

т.е. ПФ системы абсолютно инвариантна к параметрическим возмущениям (вариациям параметров) объекта.

Система устойчива, поскольку ее вырожденный ХП

$$D(s) = k B_0(s) S$$

при любом устойчивом или неустойчивом объекте будет иметь только корни, равные нулям ПФ объекта, которые по условию - левые.

В результате имеем идеальную систему. Нетрудно заметить, что такая система нереализуема в силу ее негрубости (п.2.5.4). Действительно, при выполнении условия (2.18) ХП системы (2.17) вырождается - происходит обнуление его старшего коэффициента, т.е. понижение степени ХП, и один его корень уходит в бесконечность (п.2.5.4). При любых, даже малых вариациях параметра  $k$  или  $\alpha$ , когда  $\alpha > 1/k$ , старший коэффициент ХП становится отрицательным и один из его корней переходит в правую полуплоскость.

Коэффициент передачи замкнутого внутреннего контура при бифуркационном значении параметра  $\alpha^*$  равен бесконечности. Следовательно, на всех частотах разомкнутый контур главной обратной связи имеет бесконечное усиление. Этим и объясняется идеальное поведение такой системы.

### 2.7.5. Анализ системы управления самолета *Grumman F-14*

Упрощенная структурная схема системы управления горизонтальным полетом самолета *Grumman F-14* приведена на рис.2.15. Эта модель, в частности, использована при тестировании ряда программных средств автоматизированного проектирования систем управления [29]. В данной схеме отсутствуют звенья, моделирующие возмущения среды (например, порывы ветра и др.).

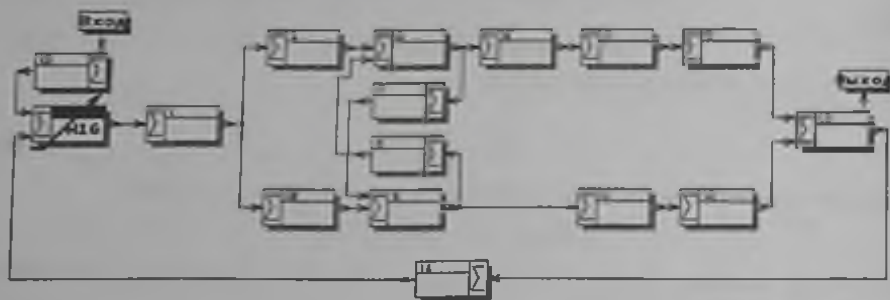


Рис.2.15. Структурная схема системы управления

Звенья структурной схемы имеют следующие ПФ:

$$W_1(s) = \frac{1}{1+0.05s}; \quad W_2(s) = 64; \quad W_3(s) = \frac{1}{0.638+s}; \quad W_4(s) = \frac{1}{689};$$

$$W_5(s) = \frac{1}{1+0.396s}; \quad W_6(s) = 0.677; \quad W_7(s) = -0.00592; \quad W_8(s) = 689;$$

$$W_9(s) = \frac{1}{0.657+s}; \quad W_{10}(s) = 6.88; \quad W_{11}(s) = \frac{2.97+s}{4.14+s}; \quad W_{12}(s) = 0.816;$$

$$W_{13}(s) = 1; \quad W_{14}(s) = -1; \quad W_{15}(s) = \frac{1}{1+0.1s}; \quad W_{16}(s) = \frac{3.86+1.75s}{s}$$

Приведенная модель имеет достаточно сложную структуру и высокий порядок. При ее анализе целесообразно использование ЭВМ и специализированных программных средств (см., например, Приложение 1).

ПФ замкнутой системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{77837 + 1.118 \cdot 10^5 s + 70811 s^2 + 22268 s^3 + 2676 s^4}{77837 + 1.3247 \cdot 10^5 s + 95817 s^2 + 37641 s^3 + 8103 s^4 + 898.8 s^5 + 51.81 s^6 + 1.365 s^7}$$

Нули ПФ  $\Phi(s)$  совпадают с нулями ПФ системы с разомкнутой обратной связью и равны:  $z_1 = -2.213$ ;  $z_2 = -3.470$ ;  $z_{3,4} = -1.319 \pm j1.431$ .

Полюсы ПФ  $\Phi(s)$ , т.е. корни ХП замкнутой системы, равны:  $p_1 = -1.813$ ;  $p_2 = -3.123$ ;  $p_{3,4} = -1.672 \pm j1.597$ ;  $p_{5,6} = -9.834 \pm j9.572$ ;  $p_7 = -10.0$ .

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие представлена на рис.2.16.

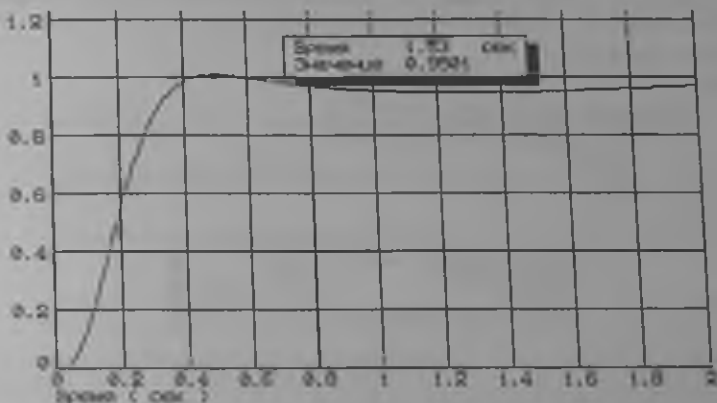


Рис.2.16. Переходная характеристика системы управления

Среди полюсов ПФ замкнутой системы можно выделить две группы. "Быстрые" (имеющие относительно большие модули), в основном определяют начальный участок переходного процесса (рис.2.16) и время "первого согласования"  $t_1 \approx 0.3$  с. (т.е. время первого вхождения в пятипроцентную зону от установившегося значения). "Медленные" полюсы (расположенные ближе к мнимой оси) в основном определяют характер и время затухания переходного процесса (перерегулирование  $\sigma \approx 1\%$ , время регулирования  $t_p \approx 1.5$  с.).

Разомкнутая система имеет корни ХП, равные: 0.000; -2.526; -4.144; 0.6478  $\pm$  2.020j; -10.000; -20.000.

Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура (без звена  $W_{1s}$ , не входящего в контурную часть) представлены на рис.2.17.

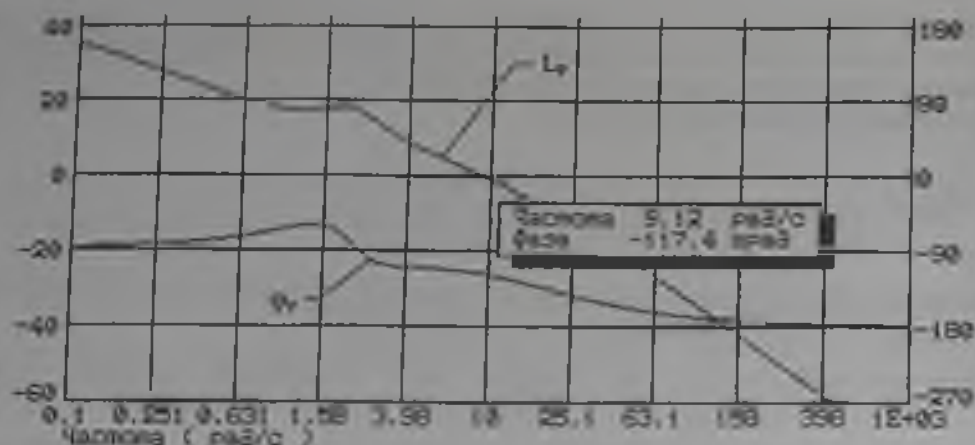


Рис. 2.17. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы

С учетом того, что ХП разомкнутой системы не имеет правых корней, по критерию Найквиста замкнутая система устойчива. Ее частотные показатели качества:

- частота среза  $\omega_{ср} = 9.1 \text{ с}^{-1}$ ;
- запас по фазе  $\Delta\varphi = 180^\circ - 117.3 \approx 63^\circ$ .

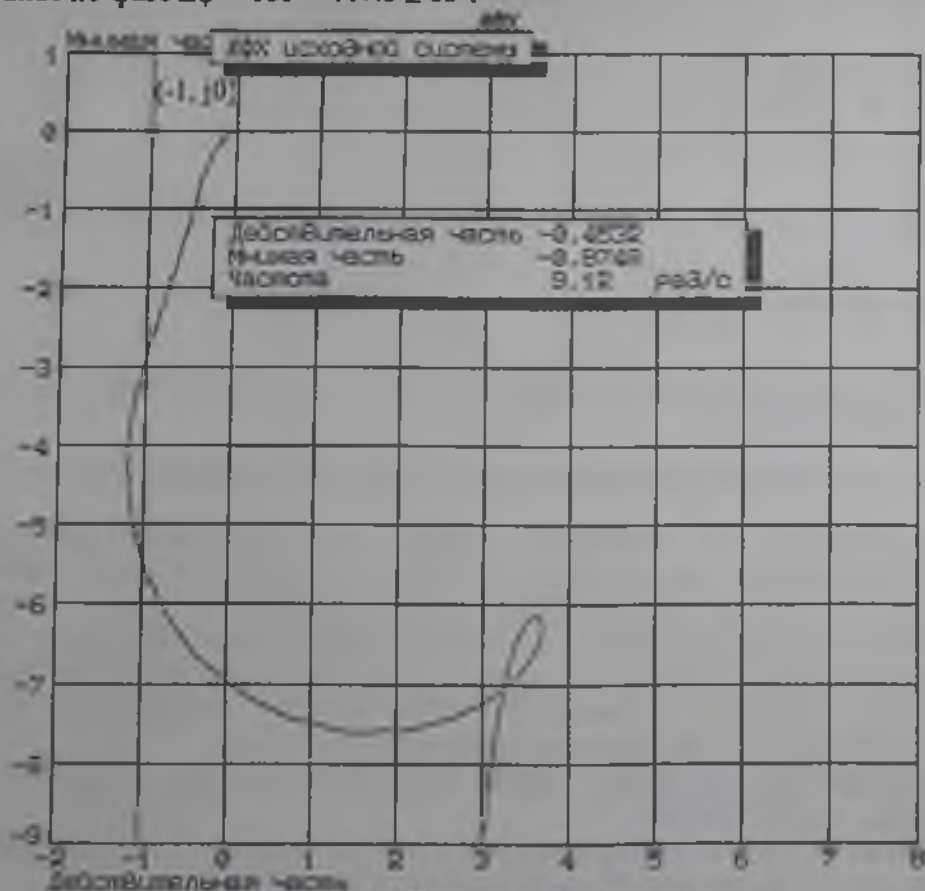


Рис. 2.18. АФХ разомкнутой системы

На рис.2.18 показана амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутого контура. Видно, что годограф ЧХ не охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ .

Все полученные здесь результаты анализа совпадают с приведенными в [29].

### 2.7.6. Анализ двухуровневой системы управления судовой пропульсивной установки

Рассмотрим линейную модель пропульсивной системы (рис.2.19), образованной подсистемами управления  $S^1$  и  $S^2$  частотой вращения двух судовых дизелей, работающих на общую нагрузку - гребной винт регулируемого шага с редуктором и муфтами (подсистема  $S^3$ ) [26].

Представленная на рис.2.19а система 2-го уровня образована подсистемами 1-го уровня, описанными в форме сигнальных графов:  $S^1$  и  $S^2$  - рис.2.19б;  $S^3$  - рис.2.19в. Дуги связи подсистем имеют единичные передачи.

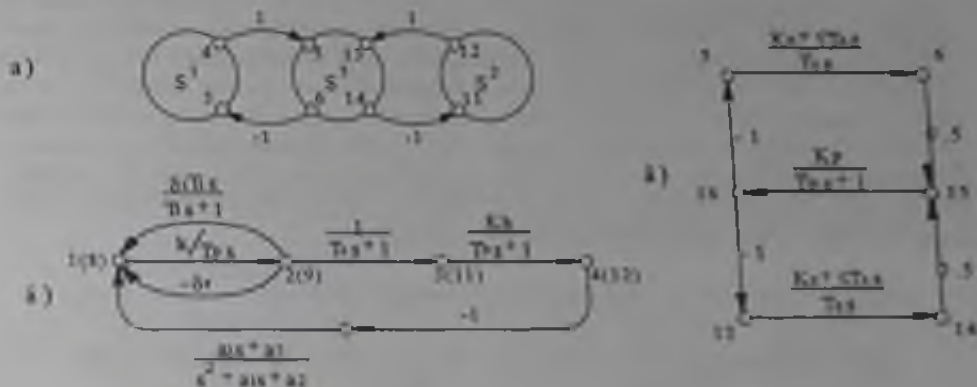


Рис.2.19. Графы системы управления судовой пропульсивной установки

Номинальные параметры идентичных подсистем  $S^1$  и  $S^2$  имеют следующие значения:  $T_R = 0.08$  с;  $k = 5$ ;  $\delta_r = 0.07$ ;  $T_1 = 1.25$  с;  $\delta_i = 0.2$ ;  $T_{c1} = 0.08$  с;  $T_{c2} = 0.09$  с;  $K_b = 10$ ;  $T_b = 28.4$  с;  $a_1 = 4.2$ ;  $a_2 = 110.25$ . Номинальные параметры подсистемы  $S^3$ :  $K_p = 0.308$ ;  $T_p = 0.246$  с;  $K_e = 1.5$ ;  $T_e = 0.04$  с;  $\zeta = 0.1$ .

Постоянные времени камер сгорания дизелей в различных подсистемах несколько отличаются, что обуславливает некоторое отличие корней их ХП (табл.2.1).

Таблица 2.1

	Корни ХП подсистем	Корни ХП системы
$S^1$	$-0.82 \pm j0.75$	$-0.68 \pm j4.1$
	$-1.87 \pm j9.77$	$-1.88 \pm j9.54$
	$-11.26$	$-9.97$
	$-17.76$	$-17.68$

Таблица 2.1 (окончание)

	Корни ХП подсистем	Корни ХП системы
$S^2$	$-0.82 \pm j0.74$	$-0.67$ ; $-1.72$
	$-1.86 \pm j9.78$	$-1.90 \pm j9.66$
	$-11.14$	$-11.37$
	$-17.94$	$-17.75$
$S^3$	$0.00$	$-0.19$
	$-2.10 \pm j6.52$	$-1.71 \pm j7.83$

Корни ХП подсистем  $S^1$  и  $S^2$  показывают, что обе подсистемы устойчивы. Сильно колебательные пары корней ( $-1.87 \pm j9.77$  и  $-1.86 \pm j9.78$ ) порождаются центробежными датчиками скорости вращения, являющимися колебательными механическими системами. На рис.2.20 кривые  $L^1$  и  $\varphi^1$  представляют графики ЛЧХ подсистемы  $S^1$ , разомкнутой по главной обратной связи. Запас устойчивости по фазе составляет 60 град. В результате замыкания контура образуется пара не сильно колебательных комплексных корней  $0.82 \pm j0.75$ . Подсистема  $S^3$  находится на границе устойчивости - ее характеристический полином имеет нулевой корень. Кроме того, она достаточно сильно колебательна - из-за упругости муфт ХП подсистемы имеет пару комплексных корней  $-2.10 \pm j6.52$ .

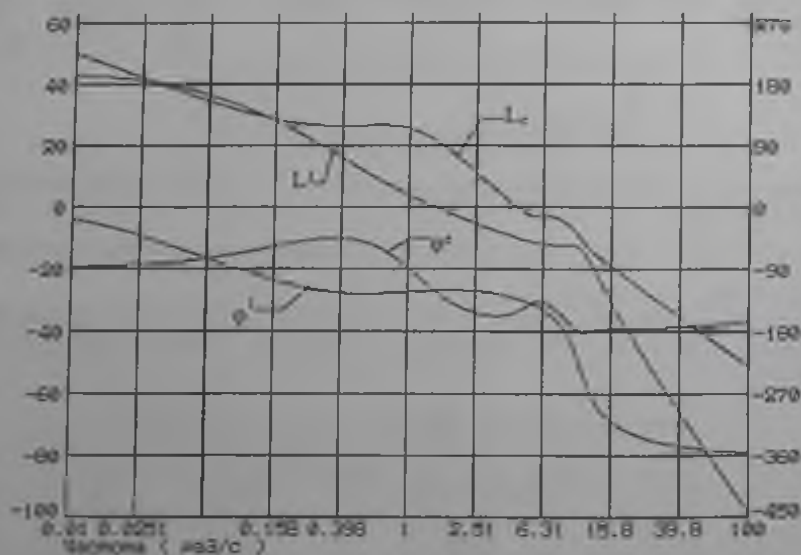


Рис.2.20. Логарифмические частотные характеристики



Следующим этапом анализа является исследование устойчивости всей системы, образованной подсистемами  $S^1$ ,  $S^2$  и  $S^3$ . Частотные характеристики эквивалентной одноконтурной системы (2.14) приведены на рис.2.20 в виде кривых:

$$L_e = 20 \lg |K_e(j\omega)| ;$$
$$\varphi_e = \arg K_e(j\omega).$$

На низких частотах ( $\omega < 1 \text{ с}^{-1}$ ), т.е. при больших значениях  $L_e$ , взаимодействие подсистем сильное. Для диапазона частот правее частоты среза ( $\omega > 5 \text{ с}^{-1}$ ) взаимодействие ослабляется. В этом примере достаточное условие устойчивости (2.16) не выполняется. Однако система в целом устойчива, что следует из критерия Найквиста, применяемого к эквивалентной одноконтурной системе с передаточной функцией  $K_e(s)$ .

Во втором столбце табл.2.1 приведены значения корней ХП всей системы. Из-за контуров взаимосвязи корни подсистем изменяются, но по-разному. Поскольку на низких частотах модуль  $|K_e(j\omega)|$  велик, малые по модулю корни изменяются значительно. Большие по модулю корни изменяются мало, так как на этих частотах модуль  $|K_e(j\omega)|$  меньше единицы. Таким образом, частотная характеристика взаимодействия подсистем  $K_e(j\omega)$  не только позволяет исследовать устойчивость сложной системы, но и дает возможность оценить, какие из корней характеристических полиномов подсистем изменяются в наибольшей степени при введении контуров взаимосвязи.

Рассматриваемая сложная система конструктивно устойчива - размыкание (замыкание) связей между подсистемами не приводит к потере устойчивости всей системы.

## 3. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 3.1. О синтезе систем управления

Целью синтеза является построение математической модели системы управления, удовлетворяющей требованиям к поведению - ковариантности с заданием, инвариантности к возмущениям, устойчивости и грубости (робастности).

Пусть имеется математическая модель объекта управления со средой. В задачах синтеза алгоритмов управления к объекту (О) или неизменяемой части относят исполнительные механизмы (ИМ) и измерительные элементы (ИЭ), как это показано на рис.3.1. При этом входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$  расширенного объекта оказываются маломощные сигналы - носители информации.

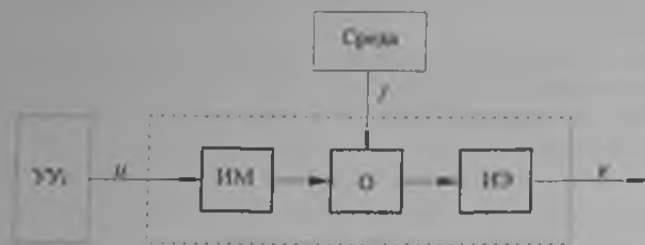


Рис.3.1. Расширенный объект управления

Средствами решения задачи синтеза в указанной постановке являются: выбор структур систем, т.е. элементов и топологии причинно-следственных связей между ними, структур операторов элементов, в частности, алгоритмов управляющих устройств и значений их параметров.

Удовлетворению требований к поведению систем обычно препятствуют динамические свойства объектов управления и других элементов неизменяемой части, недоступность полной априорной информации о свойствах элементов системы и среды, невозможность получения всей текущей информации о состоянии объекта и возмущениях, ограничения на переменные системы и управляющие воздействия.

Более общей по сравнению с синтезом является задача проектирования систем управления. Хотя требования к поведению систем управления являются доминирующими, при проектировании необходимо удовлетворять и другим требованиям и ограничениям, содержащимся в технических заданиях. Это требования надежности систем, их приемлемой стоимости, требования энергетического характера, ограничения, связанные с типом сигналов, массой и габаритами систем, компоновкой элементов и трассировкой связей и т.д. Для расчетов систем по различным требованиям привлекаются соответствующие модели и методы, отличные от рассматриваемых в основных курсах теории управления.

### 3.2. Задачи синтеза систем управления

Рассмотрим на содержательном уровне некоторые основные задачи синтеза систем управления.

### 3.2.1. Синтез управляющих воздействий

Приложенное к объекту допустимое управляющее воздействие  $u(t) \in \mathcal{U}$  должно обеспечить наилучшее в некотором смысле поведение объекта. Задача синтеза математически ставится как поиск функции времени  $u^*(t)$ , доставляющей минимум некоторому функционалу

$$J[y(t), u(t), f(t)] \rightarrow \min$$

с учетом динамических свойств объекта, ограничений на его переменные состояния, а также тех возмущений  $f(t)$ , о которых имеется полная априорная информация.

Управляющее воздействие  $u^*(t)$  генерируется управляющим устройством УУ<sub>1</sub> (рис.3.1) и обеспечивает оптимальную траекторию движения объекта  $y^*(t)$ .

Во многих технических объектах оптимальное управление постоянно

$$u^* = \text{const}$$

и обеспечивает оптимальный режим

$$y^* = \text{const},$$

определяемый из требований технологии.

Для нахождения условных экстремалей функционалов в общей теории управления привлекаются методы классического вариационного исчисления, динамического программирования и принцип максимума.

Задачи синтеза управляющих воздействий, как правило, решаются вне рамок теории линейных систем.

### 3.2.2. Синтез компенсаторов возмущений

Если на объект действуют возмущения  $f(t)$ , которые не учтены при синтезе оптимального управления  $u^*(t)$ , то поведение объекта будет отличаться от оптимального. В случае недопустимых отклонений соответствующей траектории (режима)  $y^*(t)$  необходимо принять меры по ослаблению влияния возмущений.

Пусть возмущение измеряется непосредственно (рис.3.2). Задачей синтеза является определение алгоритма управляющего устройства УУ<sub>2</sub>, в котором происходит переработка текущей информации о возмущении и формирование воздействия  $u_2(t)$  на объект. Часть управляющего устройства, формирующую компенсирующее воздействие, называют также компенсатором (К).

Образование канала компенсации, в принципе, может обеспечить абсолютную инвариантность управляемой переменной к непосредственно измеряемому возмущению. При этом в системе реализован принцип управления по разомкнутому циклу.

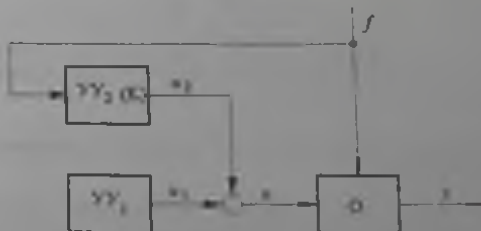


Рис.3.2. Компенсация возмущения

### 3.2.3. Синтез регуляторов

Оптимальная траектория  $y^*(t)$ , в частном случае - оптимальный режим  $y^*(t) = \text{const}$  - может быть неустойчивой или вариации движений могут затухать недостаточно быстро. Тогда ставится задача стабилизации неустойчивого режима и обеспечения требуемого характера переходных процессов.

Для изменения характера собственных движений необходимо создать систему с обратной связью (рис.3.3а), т.е. реализовать принцип управления по замкнутому циклу. Управляющее устройство УУ<sub>3</sub>, обеспечивающее устойчивость и качество процессов в окрестности оптимального режима, называют также регулятором (Р).

Задачей синтеза в этом случае является определение алгоритма регулирования

$$\delta u(t) = R(\delta y(t)),$$

а именно: его типа (структуры) и настроек (параметров).

Вообще говоря, стабилизирующая обратная связь может включаться и иначе (рис.3.3б): измеряется некоторая внутренняя переменная  $x(t)$  и на объект оказывается воздействие по дополнительному входу  $v(t)$ . При наличии нескольких мест возможного включения регулятора возникает задача топологического синтеза - выбора наилучшего места.

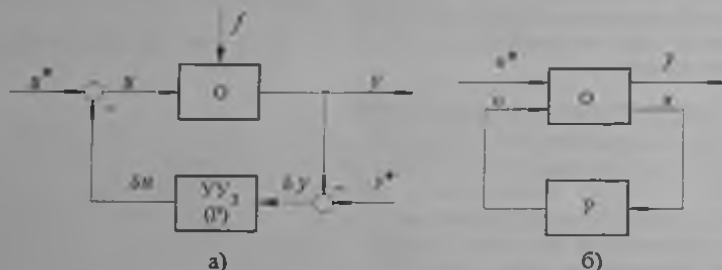


Рис.3.3. Стабилизация неустойчивого режима

Во многих практически важных случаях задача стабилизации решается по линеаризованным для малых отклонений от рассматриваемого режима математическим моделям.

В теории управления хорошо развиты методы синтеза регуляторов. Одним из методов решения такой задачи, позволяющим обеспечить заданное размещение корней ХП, является метод модального управления, оперирующий описанием систем в нормальной форме пространства состояний (1.12). Ниже рассматривается решение этой задачи частотным методом.

### 3.2.4. Синтез систем управления из условия подавления непосредственно неизменяемых возмущений

Если к объекту приложены постоянно действующие некомпенсированные возмущения  $f(t)$ , то система управления синтезируется из условия инвариантности управляемой переменной  $y(t)$  к возмущениям определенных спектров.

Единственным средством ослабления влияния непосредственно неизмеряемых возмущений является создание контуров с достаточно большим усилением. В таких структурах условие абсолютной инвариантности реализовать нельзя, но могут быть реализованы условия инвариантности до  $\epsilon$  и селективной инвариантности (2.8).

Селективная абсолютная инвариантность достигается, если в контуре имеется "модель среды" - ПФ контура имеет полюсы, равные полюсам изображений воздействий, но ПФ пути передачи возмущения таких полюсов не имеет. В результате бесконечного усиления контура на комплексных частотах воздействия обеспечивается нулевая установившаяся ошибка (п.2.3.3). Селективная инвариантность до  $\epsilon$  обеспечивается, если на частотах возмущений усиления контура достаточно велики.

### 3.2.5. Синтез следящих систем управления

Пусть выход объекта - управляемая переменная  $y(t)$  должна следить за задающим воздействием, т.е. должна быть ковариантной с сигналом  $g(t)$ . Конкретная функция времени  $g(t)$  заранее не известна; обычно может быть получена только текущая информация об ошибке слежения

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Переменная ошибки  $e(t)$  должна быть инвариантной к заданию  $g(t)$ , а также к возмущающим воздействиям.

В этом случае создается система с обратной связью (рис.3.4), а целью синтеза является определение алгоритма регулирования:

$$u(t) = R(e(t)),$$

обеспечивающего воспроизведение задающего воздействия с требуемой точностью.

Средством удовлетворения требований является достаточно большое усиление контура и пути передачи на частотах задающего воздействия  $g$ .

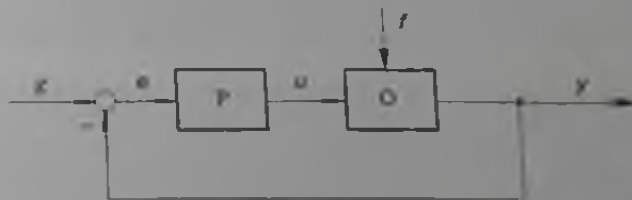


Рис.3.4. Следящая система

Разница между задачами синтеза следящих систем (рис.3.4) и систем подавления возмущений (рис.3.3а) в том, что во втором случае  $g = u^* = \text{const}$ , т.е. задание меняется сравнительно редко - при изменении режима работы объекта. Основным воздействием в системах стабилизации режима является возмущение  $f(t)$ . Так же, как и в следящих системах, контур систем подавления возмущения должен иметь большое усиление на частотах возмущения. Однако усиление пути передачи возмущения должно быть много меньше усиления контура на этих частотах.

### 3.2.6. Коррекция замкнутых систем управления

Создание контуров обратной связи и повышение их усиления, введение в контуры звеньев, ПФ которых имеют полюсы изображений воздействий ("моделей среды"), обычно приводит к тому, что замкнутая система с удовлетворительными установившимися движениями будет иметь плохие переходные процессы или даже окажется неустойчивой. Это часто имеет место, когда спектры воздействий близки к спектру объекта, т.е. усиления контура повышаются на частотах объекта.

Если средства, обеспечивающие инвариантность переменной ошибки к непосредственно неизмеряемым воздействиям, приводят к неустойчивости замкнутой системы, необходимо разрешить это противоречие между качеством установившихся и переходных процессов. Такая задача синтеза называется коррекцией.

### 3.2.7. Синтез систем управления в условиях неполной определенности моделей

Даже при точной реализации алгоритма управления, синтезированного на базе полностью определенной модели, реальная система, вообще говоря, будет иметь другое поведение, так как реальная динамика объекта отличается от модельной. Поэтому любой метод синтеза имеет смысл только в том случае, если он по меньшей мере гарантирует, что малые вариации характеристик элементов не вызовут больших изменений поведения систем. Синтезированная система должна быть грубой - это необходимое условие применимости методов синтеза (п.2.5.4). Практически же требуется робастность основных свойств - система управления должна быть работоспособной при конечных изменениях характеристик элементов.

Можно показать, что передачи замкнутых систем малочувствительны к вариациям характеристик некоторых элементов на частотах, где усиления контуров велики. Наличие контура является необходимым структурным (топологическим) условием стабилизации неустойчивых объектов, ослабления сигнальных и операторных возмущений. В этом состоит универсальность действия обратной связи.

При синтезе систем частотными методами можно качественно контролировать диапазоны частот, на которых вариации характеристик элементов мало скажутся на характеристиках систем. Для количественной оценки влияния вариаций элементов на условия инвариантности систем можно использовать функции чувствительности (п.2.5.2).

Если вариации элементов велики и/или усиления контуров на требуемых частотах не могут быть повышены, то необходимы активные средства ослабления влияния вариаций элементов на свойства систем. В этих случаях строят адаптивные системы управления, в которых за счет обработки текущей информации о динамических свойствах объектов происходит перестройка алгоритма управляющего устройства.

Задачи синтеза адаптивных систем решаются вне рамок линейной теории управления.

### 3.2.8. Расчет настроек типовых регуляторов

Большинство локальных систем управления промышленной автоматики имеют типовую одноконтурную структуру (рис.3.3а и рис.3.4) с управляющими устройствами, реализующими типовые алгоритмы. Это объясняется универсальностью обратной связи и тем, что динамические свойства большинства объектов

также принадлежат к нескольким типам. Таким образом, системы имеют определенную топологию и структуры операторов, но остаются неопределенными параметры управляющих устройств, которые в системах стабилизации и следящих системах обычно называются регуляторами.

Параметры настроек типовых регуляторов рассчитываются из условий устойчивости, максимизации точности поддержания установившихся режимов, минимизации динамических ошибок.

Предложены рекомендации по выбору настроек типовых регуляторов [4] и разработаны графоаналитические методики расчета [18,19]. В настоящее время для оптимизации систем с типовыми регуляторами привлекаются ЭВМ.

### 3.3. Формальная постановка задач синтеза систем управления

Применение ЭВМ и разработка компьютерных программ заставляют смотреть в новом свете на задачи построения моделей, анализа и синтеза систем управления. Предпосылкой автоматизации процедур решения этих задач является их формализация. Минимально необходимая во многих задачах степень формализации достигается уже при попытке изложения постановок задач с использованием основных понятий теории множеств.

Формально синтез означает выбор на множестве моделей  $\mathcal{M}$  с целью выделения подмножества систем  $\mathcal{M}_c$ , удовлетворяющих требованиям. Если требования к поведению рассматривать как неявное задание множества удовлетворительных систем (2.1), то результатом синтеза является пересечение множеств (рис.3.5а)

$$\mathcal{M}_c = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^d, \quad (3.1)$$

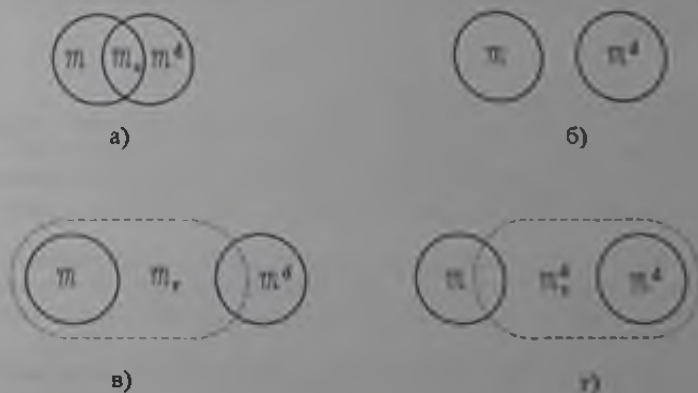


Рис.3.5. Иллюстрация различных ситуаций при синтезе

Если пересечение (3.1) пусто (рис.3.5б), то задача синтеза в исходной постановке не имеет решения. Пересмотр постановки задачи может быть связан с расширением множества исходных систем, т.е. с рассмотрением множества,  $\mathcal{M}_c \supset \mathcal{M}$



(рис.3.5в). Это означает расширение диапазонов параметров для случая  $\mathcal{M} = M(2)$ , усложнение структур операторов для случая  $\mathcal{M} = M(1)$  или изменение числа и мест включения варьируемых звеньев для случая  $\mathcal{M} = M(0)$ . Другой вариант пересмотра постановки задачи сводится к ослаблению требования, что означает расширение множества:  $\mathcal{M}_r^d \supset \mathcal{M}$  (рис.3.5г).

Проблемы синтеза во многом обусловлены тем, что элементы множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}^d$  описаны по-разному, вследствие чего невозможно непосредственное выполнение операции теоретико-множественного пересечения (3.1). Возникает задача перевода (трансляции) описаний или отображения моделей.

### 3.3.1. Задание множества систем

Задача синтеза нетривиальна только в случае, когда множество  $\mathcal{M}$  содержит более одного элемента, иначе говоря, имеется исходная неопределенность (подразд.1.6).

Во-первых, элементы множества  $\mathcal{M}$  могут различаться параметрами. При этом множество  $\mathcal{M}$  является моделью второго ранга неопределенности

$$\mathcal{M} = M(2) = \{M(3)\},$$

т.е. множеством полностью определенных систем третьего ранга. На рис.1.11а иллюстрируется ситуация, когда системы различаются параметрами одного из звеньев, например настройками регулятора.

Во-вторых, элементы исходного множества  $\mathcal{M}$  могут различаться структурами операторов звеньев. При этом множество  $\mathcal{M}$  является моделью первого ранга неопределенности

$$\mathcal{M} = M(1) = \{M(2)\},$$

т.е. множеством моделей второго ранга.

В результате структурного синтеза выбирается подмножество структур операторов (в частном случае - единственная структура), после чего имеет место рассмотренная выше задача параметрического синтеза. На рис.1.11б иллюстрируется ситуация, когда одно из звеньев системы может иметь различные структуры оператора.

В частном случае этим звеном может быть регулятор, а в результате структурного синтеза необходимо найти его тип. Параметры настроек регулятора выбранного типа находятся в результате решения последующей задачи параметрического синтеза.

В-третьих, множество  $\mathcal{M}$  может быть моделью нулевого ранга неопределенности

$$\mathcal{M} = M(0) = \{M(1)\},$$

т.е. представляет собой множество систем с различной топологией.

В результате топологического синтеза выбирается подмножество топологий (в частности, единственная топология). После этого решается задача структурного синтеза. На рис.1.11в иллюстрируется ситуация, когда системы различаются



местом включения одного звена. В результате синтеза необходимо найти наилучшее место включения регулятора или компенсатора, т.е. точки измерения и оказания на объект управляющих воздействий.

Синтез представляет собой повышение ранга моделей  $R$ , т.е. уменьшение неопределенности или разнообразия за счет привлечения информации о пожеланиях проектировщика (модели проектировщика в виде множества  $\mathcal{M}^d$ ).

### 3.3.2. Задание требований при синтезе

В подразд.2.1 требования к системам управления рассматривались как множество систем  $\mathcal{M}$ , поведение которых удовлетворительно. Общие идеи описания множества  $\mathcal{M}^d$  были даны в подразд.2.1; ниже они детализируются применительно к задачам синтеза.

В зависимости от того, какие системы (рис.1.16) описывают множества  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}^d$ , следует различать задачи или подзадачи синтеза:

- автономных систем ( $\mathcal{M}_S, \mathcal{M}_S^d$ );
- отдельных каналов передач ( $\mathcal{M}_{YSP}, \mathcal{M}_{YSP}^d$ );
- расширенных систем ( $\mathcal{M}_R, \mathcal{M}_R^d$ ).

а также постановки задач с учетом дополнительных требований ограниченной чувствительности и робастности.

Выделим три основных способа описания множества требуемых систем  $\mathcal{M}^d$ .

Во-первых, требования сводятся к обеспечению тождественности некоторых характеристик синтезируемой системы желаемым. Желаемая система  $M$  описывается в терминах "вход-выход" в форме дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1.1), передаточной функции (1.4), частотных (1.6) или временных характеристик. Некоторые методы пространства состояний оперируют с требованиями, выраженными в форме матриц систем дифференциальных уравнений вида (1.12). В ряде частотных методов синтеза желаемая система имеет типовую топологию (как правило, одноконтурную), а ее желаемое поведение задается типовой логарифмической характеристикой разомкнутого контура.

Во-вторых, множество  $\mathcal{M}^d$  задается в форме ограничений на показатели качества:

$$I_i \leq I_{i\max}; \quad i=1,2,\dots \quad (3.2)$$

Максимальные значения показателей качества указывают допустимые отклонения от идеальной или желаемой системы  $M^*$ . Некоторые из показателей качества приведены в разд.2.

В-третьих, требования при синтезе могут выражаться как условия минимизации мер отклонения систем от идеальной или эталонной системы  $M^*$ :

$$I_i = \rho_i(M, M^*) \rightarrow \min_{M \in \mathcal{M}}; \quad i=1,2,\dots \quad (3.3)$$

Иначе говоря, в результате синтеза на множестве  $\mathcal{M}$  необходимо найти систему  $M_0$ , ближайшую к эталонной системе  $M^*$  в определенном смысле.

Условия (3.3) называются критериями оптимизации, причем в общем случае имеет место задача синтеза как задача многокритериальной (векторной) оптимизации. Меры отклонения  $\rho(M, M^*)$  чаще всего принимают вид быстро вычисляемых интегральных квадратичных функционалов (п.2.3.4) и допускают в некоторых случаях и аналитическое решение задачи синтеза.

Оптимизационный характер описания множества  $\mathcal{M}^d$  обусловлен меньшей определенностью требований к системам. Когда неизвестны максимально допустимые значения показателей качества (3.2) или желаемая характеристика, проектировщик в результате оптимизации узнает, какие наилучшие процессы можно получить в синтезируемых системах при управляющих устройствах приемлемой сложности.

Следует сказать, что и в случае предыдущих двух форм описания множества  $\mathcal{M}^d$  в постановках задач не явно присутствует не обязательно формализованное требование минимизации сложности системы.

### 3.3.3. Преобразование постановок задач синтеза

Задание множеств вариантов систем  $\mathcal{M}$  и требуемых систем  $\mathcal{M}^d$  по существу означает постановку задачи синтеза и во многом обуславливает метод ее решения. Вариации различных методов синтеза и их комбинирование связаны с преобразованиями способов задания и форм представления элементов множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}^d$ .

Изменением множества  $\mathcal{M}$  принципиально сложные задачи можно свести к более простым, но трудоемким.

Решение задачи структурного синтеза формально сводится к задаче параметрического синтеза, если принять структуру оператора максимальной сложности. Вместо исходной модели первого ранга неопределенности получается модель второго ранга

$$\mathcal{M} = M(1) = \{M(2)\}.$$

Для рассматриваемого класса систем принимаются максимально допустимые степени полиномов ПФ. При равенстве нулю коэффициентов при старших степенях могут быть получены структуры меньшей сложности. В результате получается задача параметрического синтеза максимальной размерности.

Решение задачи топологического синтеза сводится к задаче структурного синтеза, если в граф системы ввести все возможные дуги, т.е. рассматривать систему с максимально сложной топологией. Принимая нулевые операторы звеньев, из них можно получить все возможные топологии. Таким образом, вместо исходной модели нулевого ранга получается модель первого ранга

$$\mathcal{M} = M(0) = \{M(1)\}.$$

В результате приходим к задаче структурного синтеза максимальной сложности. В свою очередь эту задачу можно свести к задаче параметрического синтеза, приняв объединенное множество

$$\mathcal{M} = M(0) = \{ \{ M(2) \} \}.$$

при максимально возможных порядках ПФ всех звеньев.

Следует отметить, что сведение задач синтеза к формально более простым, но большей размерности во многих случаях приводит к трудноразрешимым вычислительным проблемам и может дать избыточно сложные системы.

Изменение способа задания множества требуемых систем  $\mathcal{M}^d$  является часто применяемым приемом преобразования постановок задач синтеза.

Пусть на множестве  $\mathcal{M}$  нет системы с точно желаемой характеристикой или системы, удовлетворяющей ограничениям (3.2). Если пересмотр постановки задачи в сторону расширения множества  $\mathcal{M}$  (рис.3.5в) недопустимо усложняет систему, а приемлемые уступки в требованиях, расширяющие множество  $\mathcal{M}^d$  (рис.3.5г), априори неизвестны, то целесообразно изменить способ задания требований. В этой ситуации следует потребовать минимизации показателей качества или других мер отклонения систем от желаемой системы  $M^* \in \mathcal{M}^d$ , что сводит синтез к оптимизационной задаче.

Выбор или формирование желаемой системы  $M^*$  составляет важную часть решения. Существующий произвол в выборе желаемых характеристик  $M^*$  используется для учета естественной динамики объекта управления, ограничений на переменные и ресурсы управления, минимизации сложности системы.

Вследствие неоднозначности выбора желаемой системы  $M^*$  синтез как приближение характеристик приобретает характер двухуровневого поиска. Проектировщик ведет поиск "наилучшей" желаемой системы, например, конструкции и параметров обобщенного интегрального функционала (2.11), а ЭВМ - поиск на допустимом множестве  $\mathcal{M}$  ближайшей к  $M^*$  системы.

В том случае, когда требования к процессам управления заданы в виде ограничений на показатели качества (3.2), применение методов синтеза из условия тождественности характеристик предваряется формированием желаемой характеристики. Эта не полностью формализуемая операция по существу означает трансляцию описания требований на язык описания систем.

### 3.4. Методы синтеза систем управления

К настоящему времени разработано большое разнообразие методов решения задач синтеза систем управления в самых различных постановках, во многом определяемых способами задания множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}^d$  (подразд.3.3). Традиционно эти методы разделяются на три группы с условными названиями:

- аналитические;
- графические;
- численные.

### 3.4.1. Аналитические методы синтеза

Аналитические методы синтеза линейных систем обычно сводятся к действиям над полиномами, дробно-рациональными функциями, матрицами (числовыми, полиномиальными, дробно-рациональными). Наиболее часто используются алгебраические процедуры раскрытия определителей, решения систем уравнений различных типов, определения собственных значений матриц и корней полиномов.

В аналитических методах синтеза основной этап решения задачи (3.1) преодолевается в общем виде. Можно сказать, что аналитические методы в символическом виде отображают множество требований  $\mathcal{M}^d$  на множество систем  $\mathcal{M}$ , другими словами, транслируют описание требований на язык описания систем. При этом теоретически решаются принципиальные проблемы существования и единственности искомой системы. Недостаток аналитических методов заключается в том, что они требуют полной определенности постановок задач, не достижимой во многих практических ситуациях. Поэтому аналитические методы должны являться частью более общих процедур синтеза, строящихся как последовательное раскрытие неопределенности.

Метод модального управления [36] решает задачу синтеза собственно системы управления. Множество исходных систем  $\mathcal{M}_S$  описывается в форме пространства состояний (1.12):

$$\begin{array}{l} \text{объект} \quad \frac{dv}{dt} = Av + Bu; \\ \text{регулятор} \quad u = -Kv. \end{array}$$

Здесь имеет место задача параметрического синтеза, элементы множества  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(2)$  различаются параметрами регулятора. Матрица  $K$  коэффициентов обратных связей по переменным состояния объекта  $v$  должна быть найдена из условия тождественности собственных значений матрицы замкнутой системы

$$A_2 = A - BK$$

заданному распределению (модель требований  $\mathcal{M}^d$ ).

Операторные методы позволяют решать задачи синтеза автономных систем ( $\mathcal{M}_S$ ) или отдельных каналов передач ( $\mathcal{M}_{\text{YSP}}$ ). Они обеспечивают тождественность операторных полиномов дифференциальных уравнений (1.1) систем желаемым. Синтез сводится к решению систем уравнений относительно коэффициентов регулятора. Структура регулятора и топология системы выбираются так, чтобы эти системы уравнений были совместными.

При решении задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов [36] используются модели в форме пространства состояний (1.12). Матрица коэффициентов обратных связей (регулятора)  $K$  находится из условия минимизации интегральных квадратичных функционалов. Матрицы весовых коэффициентов  $Q$  и  $R$  в функционалах вида (2.11) задают желаемую систему. Параметрический синтез сводится к решению уравнений типа Риккати (Riccati) относительно коэффициентов регулятора.

Комплексно-частотный метод позволяет аналитически найти ПФ регуляторов или звеньев коррекции, обеспечивающих тождественность дробно-рациональных функций комплексного переменного (комплексной частоты)  $s$ :

$$W(s) = W^d(s). \quad (3.4)$$

В зависимости от того, какая из характеристик системы выбрана в качестве желаемой, могут быть поставлены различные задачи синтеза - автономной системы ( $M_S$ ), отдельных каналов передач системы со связями со средой ( $M_{\text{взр}}$ ) или расширенной системы ( $M_R$ ).

Множество  $\mathcal{M}$  исходных систем в задачах синтеза, решаемых комплексно-частотным методом, иллюстрируется на рис. 1.116 - одна из дуг графа синтезируемой системы имеет неопределенные структуру и значения параметров.

На основе зависимости  $W(W_k(s))$  характеристики системы  $W(s)$  от ПФ выбранного звена  $W_k(s)$  с помощью операций над дробно-рациональными функциями (полиномами) решается "обратная задача" - аналитически находится ПФ звена (регулятора, коррекции, компенсатора), обеспечивающего тождество (3.4).

### 3.4.2. Графические методы синтеза

Классические частотные методы синтеза следящих систем [19] и расчета настроек типовых регуляторов, как правило, являются графическими или графоаналитическими. К графическим относится и метод годографов корней. Это объясняется тем, что в течение длительного времени специалисты стремились к созданию методов анализа, синтеза и идентификации, сводящих к минимуму вычислительные операции, в особенности итерационного типа (вычисление корней, поиск, решение систем уравнений большого размера и др.). Разрабатывались специальные приемы нормировки характеристик, диаграммы, номограммы, таблицы, позволяющие выбирать параметры систем, строить их характеристики без значительных вычислительных затрат.

Классические частотные методы синтеза следящих систем регулирования базируются на тождественности ЛАЧХ разомкнутых контуров

$$L(\omega) = L^d(\omega). \quad (3.5)$$

Постановки задач синтеза, решаемых частотным методом, в принципе, те же, что и задач, решаемых комплексно-частотным методом (п.3.4.1). ЛАЧХ звена коррекции  $L_k(\omega)$  находится в результате графических построений. Структура и параметры ПФ звена коррекции подбираются путем графической аппроксимации ЛАЧХ  $L_k(\omega)$  отрезками асимптот.

Достоинства и недостатки частотных методов хорошо известны [19,24]. Одним из важнейших достоинств является наглядность формирования желаемой ЛАЧХ  $L^d(\omega)$  по требованиям к установившимся и переходным процессам, естественность учета ограничений на область адекватности моделей. Вместе с тем графоаналитические процедуры построения ЛАЧХ звена коррекции по значениям ЛАЧХ исходной и желаемой систем наиболее разработаны для одномерных систем с типовой топологией, а одним из условий их применимости является уверенность в том, что исходная ПФ имеет хорошие нули и полюсы. Это затрудняет не-

посредственное применение частотных методов для синтеза систем с произвольной структурой (топологией), а также в случае неустойчивых, неминимально-фазовых и сильно колебательных объектов.

Частотные методы, использующие возможности компьютерной графики, позволили создать новые методы синтеза многомерных систем [1, 24, 31].

В условиях применения компьютерных средств целесообразна модернизация частотных методов синтеза и для случая одномерных систем управления. Комплексно-частотный метод синтеза из условия тождественности ПФ реализуется путем использования не только вычислительных, но также графических и интерактивных возможностей компьютеров.

Использование графических образов при расчете систем управления на этапах построения и структурного представления моделей, получения решения и отображения результатов является важным условием их "физичности", тесной связи процедур исследования с параметрами объектов и требованиями к поведению систем.

#### 3.4.3. Численные методы синтеза

Численные методы связаны с многократным вычислением характеристик и показателей качества полностью определенных вариантов систем. Показатели качества сопоставляются с требованиями (3.2). Если требования удовлетворены, то вариант системы относится к множеству  $M_c$ . Анализ повторяется многократно до исчерпания исходного множества  $M$ , которое, разумеется, должно быть конечным.

Синтез, как многовариантный анализ, так или иначе связан с перебором вариантов. Полный перебор применяется в случае не очень большой мощности множества  $M$ . Прямой (простой) перебор реализуется с помощью программных средств гибкого редактирования моделей, быстрого построения характеристик и вычисления показателей качества.

В случае большого числа исходных вариантов необходимо применять комбинаторные методы, позволяющие сократить перебор за счет использования априорной информации и текущей информации, получаемой в результате анализа предыдущих вариантов.

Необходимость сокращения перебора прежде всего относится к случаю бесконечного множества  $M$ . Из множества  $M$  выбирается конечное подмножество, элементы которого и анализируются. Наиболее часто непрерывные диапазоны значений параметров заменяют узлами решетки, равноотстоящими в натуральном или логарифмическом (для больших интервалов) масштабе. Шаги разбиения выбираются с учетом априорной информации о непрерывной зависимости показателей качества от параметров системы.

Поисковые методы синтеза позволяют найти значения параметров, доставляющие минимум показателям качества, или построить поверхности равного значения показателей качества в пространстве параметров без полного перебора. При этом используются весьма разнообразные методы оптимизации или нелинейного программирования [23].

Достоинством численных методов синтеза путем полного перебора и многовариантного анализа является универсальность и надежность. Их недостаток - большая трудоемкость при значительной исходной неопределенности ситуации,



т.е. большой мощности множества  $\mathcal{M}$ . Принципиальными проблемами численных методов синтеза являются:

- априорное установление существования решения;
- выделение конечного подмножества анализируемых вариантов, когда исходное множество  $\mathcal{M}$  имеет мощность континуума (бесчисленное множество элементов).

Если в описании множества систем  $\mathcal{M}$  фигурирует большое число варьируемых в широких диапазонах параметров, существует несколько вариантов структур операторов и мест включения варьируемых звеньев, то решение задач параметрического, структурного и топологического синтеза систем управления требует комбинации различных методов.

#### 3.4.4. Общие требования к программно-методическому обеспечению задач расчета систем управления

В современных технологиях синтеза, использующих компьютерные программы, интегрируются все перечисленные методы - аналитические, графические, численные.

От компьютерных программ требуется максимальная графичность процедур ввода и редактирования моделей, образность формирования требований и отображения результатов.

Интерактивный характер синтеза должен поддерживаться за счет скорости выполнения вычислительных процедур, что обеспечивается наиболее полным использованием аналитических методов и символьных алгоритмов, применения эффективных численных алгоритмов решения систем уравнений, поиска корней полиномов и собственных значений матриц, условных экстремумов функции и т.д.

Компьютерные методы синтеза должны поддерживаться программными средствами, максимально "дружелюбными" к проектировщику, обладающими определенным уровнем "интеллекта".

Важнейшим требованием к программно-методическому обеспечению является избавление проектировщика от вспомогательных действий, отвлекающих от решения основных задач. При анализе - это объяснение поведения систем через свойства элементов (подсистем) и структуру причинно-следственных связей между ними. При синтезе основной задачей является выбор элементов и структуры системы для удовлетворения требований к поведению.

При разработке программно-методического обеспечения, выборе форм представления моделей и сочетании методов расчета следует опираться на принципы системологии [13], в первую очередь, на принципы рекуррентного объяснения и неизбыточности.

Разработано множество методов и компьютерных программ для решения задач синтеза систем управления [1,30]. Ниже рассматриваются методы синтеза замкнутых систем регулирования, использующие преимущественно комплексно-частотную область представления моделей и программу CLASSiC для персональных компьютеров.

### 3.5. Синтез по требованиям к установившимся процессам

Пусть заданы модель объекта или неизменяемой части системы и модель среды - тип и параметры возмущения  $f(t)$ .

На рис.3.6 приведен пример структурной схемы объекта. Пусть объект устойчив. Требования ограничивают установившуюся реакцию переменной  $y(t)$  на это возмущение

$$\max |y_y(t)| \leq y_{y\max} \quad (3.6)$$

В виде дополнительного условия может быть ограничена чувствительность установившейся реакции к вариациям свойств объекта. В данном случае это есть задание множества требуемых систем  $\mathcal{M}$ .

Если анализ покажет, что требование (3.6) не удовлетворяется, то необходимо построить систему управления, т.е. решить задачи топологического, структурного и параметрического синтеза.

#### 3.5.1. Топологический синтез

Пусть возмущение нельзя измерять непосредственно, что исключает создание системы компенсации, функционирующей по принципу разомкнутого управления (п.3.2.3).

Необходимым топологическим условием ослабления реакции объекта по выходу  $y(t)$  на неизмеряемое возмущение  $f(t)$  является наличие контура, касающегося пути передачи возмущения.

Контур, как правило, создается за счет измерения и преобразования выходной переменной объекта  $y(t)$  датчиком, обработки информации в управляющем устройстве (регуляторе) по некоторому алгоритму и оказания на объект управляющего воздействия  $u(t)$  с помощью исполнительных механизмов. В общем случае сложных объектов вместо управляемой переменной может измеряться другая (внутренняя) переменная объекта  $x_1(t)$ . Возмущение  $f(t)$  может быть приложено к произвольной точке объекта, а объект - иметь несколько входов управления. На структурной схеме объекта (рис.3.6) стрелками указаны переменные, доступные для измерения, - выход  $y$  и внутренние переменные объекта  $x_1, x_2, x_3$ , а также места оказания управляющих воздействий  $u_1, u_2$ .

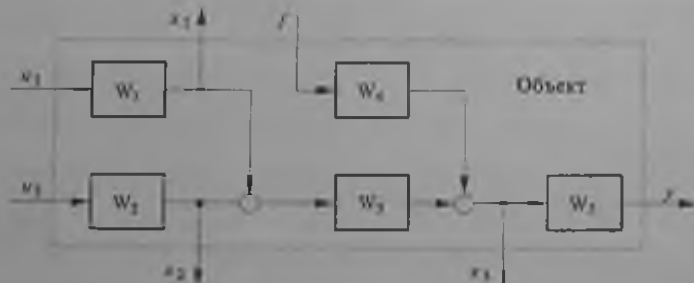


Рис.3.6. Структурная схема объекта управления



Задача топологического синтеза сводится к выбору точек измерения и управления.

На рис.3.7 приведена модель объекта в форме сигнального графа и показаны варианты введения дуг обратной связи. Эти варианты образуют исходное множество  $\mathcal{M} = M(0)$ , на котором следует выбрать подмножество графов с необходимой топологией.

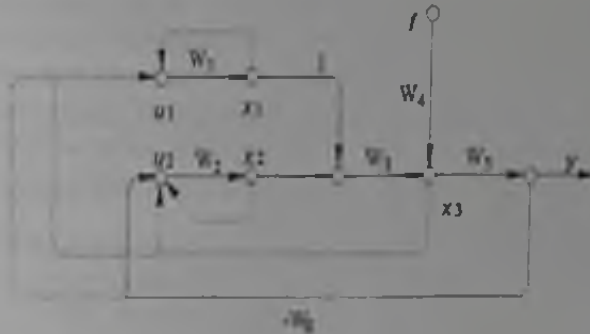


Рис.3.7. Варианты топологий систем управления

Необходимому топологическому условию удовлетворяют четыре варианта введения дуг обратной связи, т.е. регуляторов  $\{(u_1, y), (u_1, x_3), (u_2, y), (u_2, x_3)\}$ . Легко убедиться, что для остальных двух вариантов  $\{(u_1, x_1), (u_2, x_2)\}$  контуры не касаются пути. Здесь ПФ системы по возмущению равна ПФ пути в исходном объекте

$$\Phi_{YF}(s) = W_4(s) W_5(s)$$

с точностью до неуправляемой и ненаблюдаемой частей. Эти варианты топологий должны быть отброшены.

Дополнительным соображением, привлекаемым для уменьшения числа вариантов топологий, является требование уменьшения чувствительности установившихся процессов к вариациям характеристик объекта. Если варьирует или не вполне определена ПФ  $W_5(s)$ , то необходимым топологическим условием уменьшения влияния этого звена является его охват обратной связью. Таким образом, остаются два варианта включения регуляторов  $\{(u_1, y), (u_2, y)\}$ .

Из двух оставшихся вариантов при прочих равных условиях предпочтительнее тот, при котором выше усиление объекта по каналу управления на частотах возмущения. Пусть в рассматриваемом примере этим вариантом будет  $(u_2, y)$ . На рис.3.7 выбранная дуга проведена непрерывной линией.

### 3.5.2. Структурный синтез

Задачей структурного синтеза является выбор порядка или типа ПФ регулятора  $W_R(s)$ .

Как было показано в п.2.3.3, нулевая установившаяся реакция (селективная абсолютная инвариантность) имеет место, если ПФ системы  $\Phi_{YF}(s)$  имеет нули, равные полюсам  $\{s_k\}$  изображения возмущения  $F(s)$  необходимой кратности. Если кратность нуля на единицу меньше, то имеем отличную от нуля, но ограниченную установившуюся реакцию (селективная инвариантность до  $\epsilon$ ).

Требуемые нули ПФ

$$\Phi_{yf}(s) = W_d(s) W_3(s) = \frac{B_{yf}(s)}{D_{yf}(s)},$$

т.е. корни полинома ее числителя  $B_{yf}(s)$  можно получить, если структура (тип) регулятора выбрана надлежащим образом. Вопрос ставится так: какое число требуемых нулей или полюсов должна иметь ПФ регулятора  $W_R(s)$ , чтобы ПФ системы  $\Phi_{yf}(s)$  имела их в необходимом количестве? Эта задача именно структурная, поскольку не предусматривается подбор параметров из условия, чтобы полином  $B_{yf}(s)$  имел требуемые корни. На этом этапе решения задачи не привлекается информация о параметрах объекта, а используется только информация о наличии и числе требуемых нулей и полюсов ПФ объекта.

Для решения задачи необходимо иметь символическое выражение ПФ системы  $\Phi_{yf}(s)$  через ПФ звеньев (дуг), которое в случае не слишком сложных графов удобно получать с помощью топологической формулы Мэсона. Для сложных случаев (десятки дуг) требуются специальные алгоритмы подсчета числа нулей и полюсов ПФ объекта по рассматриваемому каналу.

Для примера графа (рис.3.7) ПФ имеет вид:

$$\Phi_{yf}(s) = \frac{P_{yf}(s)}{\Delta(s)} = \frac{P_{yf}(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{W_4(s) W_5(s)}{1 + W_2(s) W_3(s) W_5(s) W_R(s)}. \quad (3.7)$$

В выражении (3.7) обозначены:

$P_{yf}(s)$  - ПФ пути;

$\Delta(s)$  - определитель графа;

$W_0(s)$  - ПФ контура.

Обратим внимание на то, что часть объекта с ПФ  $W_1(s)$  не входит в это выражение. Действительно, в силу топологических особенностей системы эта часть объекта оказывается неуправляемой и ненаблюдаемой по рассматриваемому каналу  $f$ -у.

С учетом обозначений:

$$W_2(s) = \frac{B_2(s)}{D_2(s)}; \quad W_3(s) = \frac{B_3(s)}{D_3(s)}; \quad W_4(s) = \frac{B_4(s)}{D_4(s)}; \quad W_5(s) = \frac{B_5(s)}{D_5(s)}; \quad W_R(s) = \frac{B_R(s)}{D_R(s)};$$

из (3.7) можно получить

$$B_{yf}(s) = B_4(s) B_5(s) D_2(s) D_3(s) D_R(s). \quad (3.8)$$

Для упрощения рассуждений положим, что ПФ объекта не имеют нулей и полюсов, равных спектру возмущения, т.е. полюсам изображения  $F(s)$ . Тогда, как видно из выражения (3.8), ПФ системы имеет такие нули в необходимом числе, если ПФ регулятора  $W_R(s)$  имеет в необходимом количестве такие полюсы.

В результате ПФ регулятора будет частично "похожей" на изображение возмущения. В соответствии с принципом "внутренней модели" в хорошей системе должна присутствовать модель среды. Это означает, что учет априорной информации о возмущениях в алгоритме управления улучшает качество процессов управления.

Приведем примеры двух случаев типовых возмущений в виде степенной (1.17) и гармонической (1.18) функций.

1. Пусть воздействие моделируется степенной функцией времени (1.17), изображение которой имеет нулевой полюс кратности  $(\lambda+1)$ . Если ПФ регулятора имеет нулевой полюс кратности  $\nu$ , т.е. имеет структуру вида:

$$W_R(s) = \frac{k_\nu}{s^\nu},$$

то при условии  $\nu > \lambda$  установившаяся реакция системы равна нулю, а при условии  $\nu = \lambda$  - отличная от нуля постоянная. Например, если  $\lambda = 1$ , т.е. возмущение представляет собой линейно изменяющуюся функцию времени

$$f(t) = f_1 t,$$

то регулятор с астатизмом первого порядка ( $\nu = 1$ ):

$$W_R(s) = \frac{k_1}{s}$$

обеспечит постоянную установившуюся реакцию, а регулятор с астатизмом второго порядка ( $\nu = 2$ ) - нулевую установившуюся реакцию.

2. Пусть воздействие моделируется гармонической функцией времени (1.18), изображение которой имеет мнимые полюсы  $\pm j\omega$ . Если принять регулятор в виде консервативного звена:

$$W_R(s) = \frac{k_R}{(s^2 + \omega_0^2)},$$

то на выходе системы амплитуда установившихся колебаний будет равной нулю. Если же принять пропорциональный регулятор

$$W_R(s) = k_R,$$

то амплитуда колебаний будет отличной от нуля.

Это и есть результаты структурного синтеза в приведенных примерах.

В общем случае, когда ПФ объекта по каналам возмущения и управления имеют некоторое число нулей и/или полюсов, равных спектру воздействия, это следует учесть при выборе структуры регулятора.

### 3.5.3. Параметрический синтез

Если в системе обеспечена селективная абсолютная инвариантность, то при любом значении коэффициентов передачи регулятора установившаяся реакция системы на соответствующие воздействия равна нулю. Это свойство не зависит от параметров объекта и уровня воздействия, т.е. является робастным.

В случае селективной инвариантности до  $\varepsilon$  установившаяся реакция отлична от нуля и необходимо выбрать значение коэффициента передачи регулятора для удовлетворения требованию (3.6).

Рассмотрим, как выбираются параметры регулятора в случае типовых воздействий.

1. Пусть обеспечено структурное условие (п.3.5.2) ограниченной установившейся реакции системы на степенное воздействие (1.17). Запишем изображение реакции системы на возмущение в следующем виде:

$$Y(s) = F_{\text{IT}}(s) \cdot F(s) = \frac{1}{1 - W_0(s)} F_p(s),$$

где:

$$W_0(s) = W_2(s) W_3(s) W_5(s) W_R(s) = \frac{1}{s^\nu} W_0'(s)$$

- ПФ разомкнутого контура;

$$F_p(s) = W_4(s) W_5(s) F(s) = \frac{F_{p\lambda}}{s^{\lambda+1}}$$

- изображение приведенного к выходу системы возмущения.

Коэффициент передачи контура

$$K_{0\nu} = W_0'(0)$$

должен выбираться из условия :

$$K_{0\nu} \geq \frac{F_{p\lambda}(0)}{y_{\text{ymax}}} \quad (3.9)$$

для астатических систем при степенных воздействиях ( $\nu = \lambda > 0$ ) и из условия

$$K_{00} \geq \frac{F_{p0}(0)}{y_{\text{ymax}}} \quad (3.10)$$

для статических систем при постоянном воздействии ( $\nu = \lambda = 0$ ).

Коэффициент передачи регулятора  $k_R$  определяется с учетом значения коэффициента усиления объекта по каналу управления.

2. В том случае, когда к объекту приложено гармоническое воздействие (1.18) с приведенной амплитудой  $A_{fp}$  и частотой  $\omega_f$ , коэффициент усиления контура выбирается из условия

$$|W_0(j\omega_f)| \geq \frac{A_{fp}}{A_{y\text{max}}} - 1,$$

или приближенно:

$$|W_0(j\omega_f)| \geq \frac{A_{fp}}{A_{y\text{max}}} \quad (3.11)$$

Условие (3.11) означает, что логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутого контура  $L_0(\omega)$  на частоте  $\omega_f$  должна проходить не ниже контрольной точки (рис.3.8):

$$L_k(\omega_f) = 20 \lg \frac{A_{fp}}{A_{y\max}}. \quad (3.12)$$

Из условия (3.12) легко получить значение коэффициента усиления регулятора  $k_{01}$ .

Если воздействия  $f(t)$ , приложенные к объекту, моделируются как степенными (1.17), так и гармоническими (1.18) функциями времени, то структура и параметры регулятора выбираются с учетом обоих типов воздействий.

В результате параметрического синтеза системы управления по требованиям к установившимся процессам (медленным движениям) оказывается сформированной желаемая частотная характеристика контура в низкочастотной области. На рис.3.8 приведен пример ЛАЧХ разомкнутого контура системы с астатизмом первого порядка ( $\nu=1$ ), ослабляющей в 100 раз (на 40 дБ) амплитуды приведенных гармонических возмущающих воздействий с частотой  $\omega = 0.1 \text{ с}^{-1}$ .

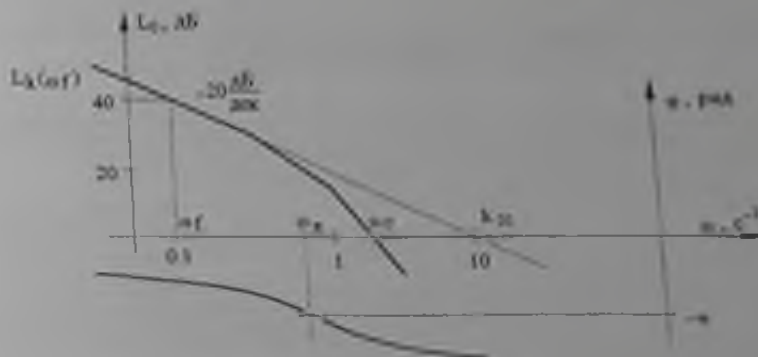


Рис.3.8. Пример асимптотической ЛЧХ

Поскольку добротность контура по скорости  $k_{01} = 100 \text{ с}^{-1}$ , то в соответствии с формулой (3.9) можно утверждать, что в случае линейно изменяющегося воздействия

$$f(t) = f_1 t$$

установившаяся реакция системы будет равна

$$y_s = 0.1 f_{p1} = 0.1 W_4(0) W_5(0) f_1.$$

### 3.5.4. Особенности синтеза следящих систем

Следящая система должна воспроизводить на выходе объекта изменяющееся во времени задающее воздействие, из чего следует, что переменная  $x(t)$  должна бы

ковариантной с переменной  $g(t)$ . Однако, если за выход системы принять ошибку  $e(t)$ , то она должна быть инвариантной к задающему воздействию.

Следящие системы строятся по замкнутому циклу с отрицательной обратной связью.

Рассмотрим модель следящей системы в форме структурной схемы (рис.3.9а) и сигнального графа (рис.3.9б).

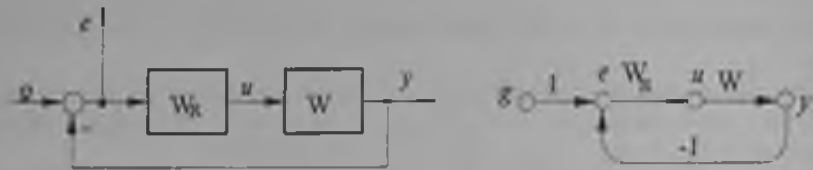


Рис.3.9. Модель следящей системы

Поскольку ПФ пути от задания  $g(t)$  до переменной ошибки  $e(t)$  равна единице ( $P_{eg}(s) = 1$ ), то ПФ системы из (3.7) равна

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W(s)W_R(s)} = \frac{1}{1 + W_0(s)}, \quad (3.13)$$

т.е. является частным случаем выражения (3.7). Поэтому здесь сохраняют силу все рекомендации по выбору структуры (типа) регулятора, полученные в п.3.5.2, а также рекомендации по выбору его параметров (п.3.5.3).

Заметим, что большое усиление контура на частотах задающего воздействия обеспечивает не только требуемую точность слежения, но также и уменьшает реакцию системы на низкочастотные возмущения  $f(t)$ , приложенные к объекту. Совершенно различные свойства системы - ковариантность с задающим  $g(t)$  и инвариантность к возмущающему  $f(t)$  воздействиям при одной и той же характеристике контура объясняются различием точек приложения воздействий, а следовательно - характеристик путей их передач к выходу.

### 3.6. Коррекция систем управления

В результате синтеза систем управления из условия подавления неизмеряемых возмущений и воспроизведения заданий с требуемой установившейся точностью получается, как правило, неустойчивая или недопустимо колебательная замкнутая система (см., например, рис.3.8). Возникает необходимость решения второй части задачи синтеза, стабилизации системы и удовлетворения требований к переходным процессам при сохранении достигнутого качества установившихся движений. Это достигается коррекцией алгоритма управляющего устройства (п.3.2.6). Коррекция предполагает введение в структурную схему (граф) новых звеньев (дуг).

### 3.6.1. Топологический синтез

В результате топологического синтеза на этапе коррекции системы должно быть выбрано место включения звена (дуги) коррекции.

Необходимым топологическим условием коррекции контурной части является вхождение дуги коррекции в тот же сильный граф. Действие дуги коррекции наиболее эффективно, если она входит в корректируемый контур (последовательная коррекция - позиция 1 дуги коррекции по отношению к контуру), либо - в контур, касающийся корректируемого (позиция 2 - например, коррекция в виде местной обратной связи). Параллельная коррекция (позиция 2) - дуга коррекции образует новые пути от воздействия до выхода.

### 3.6.2. Структурно-параметрический синтез. Формирование желаемой ПФ

Передаточные функции звеньев коррекции  $W_k(s)$  определяются из условия тождественности ПФ корректированного контура системы  $W_{oc}(s)$  желаемой ПФ

$W_0^d(s)$ :

$$W_{oc}(W_k(s)) = W_0^d(s). \quad (3.14)$$

Тождественность дробно-рациональных функций  $W_{oc}(s)$  и  $W_0^d(s)$  означает равенство их значений для любых значений комплексного аргумента  $s$ .

Выбор типа и параметров желаемой ПФ  $W_0^d(s)$  при заданной топологии включения звена коррекции определяет структуру и параметры ПФ  $W_k(s)$ .

Выбор желаемой ПФ контура  $W_0^d(s)$  производится с учетом следующих основных требований:

- сохранение ранее достигнутой точности установившихся процессов и малой чувствительности;
- обеспечение устойчивости и качества переходных процессов;
- невмешательство в область немоделируемой динамики;
- минимизация сложности системы.

Основу частотного метода синтеза составляет процедура формирования желаемой амплитудно-частотной характеристики контура с учетом расположения и типа нулей и полюсов ПФ исходной системы.

Асимптотические ЛАЧХ несут информацию о модулях нулей и полюсов, однако необходимо дополнительно указать их тип - действительные или комплексные, левые или правые.

ЛАЧХ контура формируется относительно независимо в областях низких, средних и высоких частот. При этом необходимо руководствоваться следующими положениями:

- низкочастотные асимптоты исходной и желаемой ЛАЧХ должны совпадать;
- в области средних частот желаемая ЛАЧХ должна иметь типовой вид, в частности, в окрестности частоты среза отрезок асимптоты желаемой ЛАЧХ должен иметь наклон -20 дБ/дек;
- наклоны высокочастотных отрезков асимптот желаемой ЛАЧХ должны повторять наклоны асимптот исходной ЛАЧХ.



Желательно, чтобы желаемая ЛАЧХ проходила не выше исходной на всех частотах. Обязательно, чтобы желаемая ЛАЧХ в области немоделируемой динамики имела малые значения.

На рис.3.10 изображены примеры исходной  $L_0(\omega)$  и желаемой  $L^d(\omega)$  ЛАЧХ разомкнутого контура.

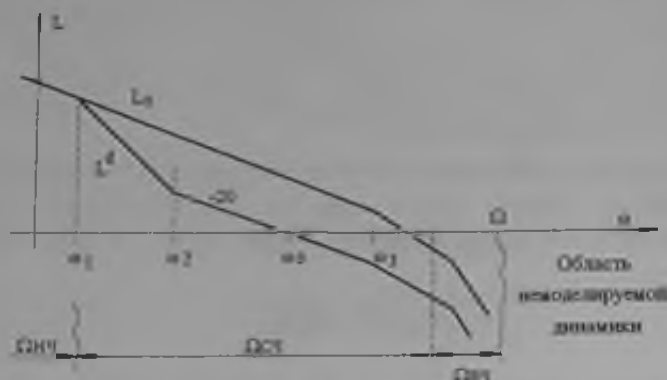


Рис.3.10. Примеры ЛАЧХ

Формировать желаемую ПФ  $W_0^d(s)$  можно последовательно умножая исходную ПФ на типовые функции  $W_i(s)$ :

$$W_0^d(s) = W_0(s) \prod_i W_i(s),$$

что равносильно введению дополнительных нулей и полюсов. Некоторые из новых нулей и полюсов могут компенсировать исходные.

Если ПФ контура умножить на выражение

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + (1/a)s},$$

то действительный отрицательный полюс  $(-a)$  изменит на  $-20$  дБ/дек наклоны отрезков асимптот справа от частоты  $\omega = a$ . Умножение ПФ на функцию

$$W_1(s) = 1 + (1/b)s,$$

т.е. введение нуля  $(-b)$ , изменяет наклоны отрезков справа от частоты  $(\omega = b)$  на  $+20$  дБ/дек. Умножение на выражения

$$W_1(s) = \frac{s+c}{s},$$

$$W_1(s) = \frac{s}{s+d}$$

изменяет наклоны на  $\pm 20$  дБ/дек левее частот  $\omega = c$  и  $\omega = d$ . В общем случае могут использоваться функции  $W_1(s)$  с комплексными и правыми нулями и полюсами.

### 3.6.3. Структурно-параметрический синтез. Вычисление ПФ звена коррекции

Традиционные методики частотного синтеза позволяют графически построить ЛАЧХ  $L_k(\omega)$  звена коррекции в случае типовых способов его включения в одноконтурные системы. Порядок и параметры ПФ  $W_k(s)$  звена коррекции подбираются в результате графической аппроксимации ЛАЧХ  $L_k(\omega)$  отрезками асимптот.

Компьютеризация частотного метода дает возможность аналитического получения ПФ звена коррекции  $W_k(s)$  при любой топологии системы и произвольном месте включения звена коррекции.

### 3.6.4. Неполнота характеристик контура и неподвижные полюсы

Как было указано в подразд. 2.4, взаимная компенсация нуля и полюса ПФ, т.е. образование нетривиальных общих делителей полиномов числителя и знаменателя ПФ, приводит к неполноте частотных характеристик (часть свойств контура не находит отражения на этих характеристиках).

При замыкании контура скомпенсированные полюсы ПФ  $W_{oc}(s)$  не изменяются. Действительно, пусть ПФ скорректированного контура имеет вид:

$$W_{oc}(s) = \frac{B_{oc}(s)}{D_{oc}(s)} = \frac{B^d(s)}{D^d(s)} \frac{D_1(s)}{D_1(s)},$$

где через  $D_1$  обозначен нетривиальный общий делитель, появившийся в результате компенсации нулей и/или полюсов. Характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов числителя и знаменателя ПФ контура

$$D(s) = D_{oc}(s) + B_{oc}(s) = (D^d(s) + B^d(s))D_1(s) = D^d(s)D_1(s).$$

Как видно, ХП будет иметь корни, в точности равные скомпенсированным полюсам.

Отсюда следует, что при формировании желаемой ЛАЧХ контура необходимо контролировать, какие именно нули и полюсы взаимно компенсируются. Нельзя компенсировать нули и полюсы, находящиеся в правой полуплоскости или недопустимо колебательные.

Классические графические частотные методы синтеза не обеспечивают возможности такого контроля, поэтому при их применении заранее необходимо быть уверенным в отсутствии у ПФ исходной системы  $W_0(s)$  плохих нулей и полюсов. Обычно требуют, чтобы все ПФ были минимально-фазовыми.

## 3.7. Комплексно-частотный метод синтеза стабилизирующих обратных связей

Если анализ покажет, что режим функционирования объекта неустойчив, то необходимо построить систему автоматической стабилизации (п.3.2.3).

Требования к синтезу определяют характер собственных движений. В аналитических методах синтеза либо указываются требуемые значения корней ХП системы, либо желаемый характер процессов косвенно задается как экстремаль ин-

тегрального квадратичного функционала (2.11). Алгоритм регулятора может быть получен различными методами.

С помощью графических процедур классических частотных методов задача стабилизации неустойчивых объектов не решается. В п.3.4.1 кратко даны постановки задач модального управления и аналитического конструирования оптимальных регуляторов, решаемых на моделях объекта в форме пространства состояний.

Ниже дается комплексно-частотный метод структурно-параметрического синтеза стабилизирующих обратных связей, в котором желаемое расположение доминирующих корней ХП системы определяется типом и параметрами среднечастотного участка асимптотической ЛАЧХ.

### 3.7.1. Топологический синтез

Существуют два средства изменения собственных свойств объекта (системы) - внутреннее и внешнее.

Внутреннее средство стабилизации означает синтез на нижележащем ( $L-1$ )-м уровне. Примером использования этого средства является коррекция неустойчивой системы (подразд. 3.6). Синтез осуществляется методами теории управления, если раскрытая модель объекта является ориентированной взаимосвязью элементов направленного действия, т.е.  $L - 1 \neq 0$ .

В том случае когда модель объекта представляется в форме системы дифференциальных уравнений в не причинно-следственной форме (1.7), т.е.  $L = 0$ , задача изменения его свойств решается на основе соответствующих принципиальных схем физических систем с сосредоточенными компонентами методами теории цепей (электрических, механических и др.).

Наконец, если модель объекта дана в терминах "вход-выход" ("черный ящик"), то задача стабилизации внутренними средствами не решается из-за отсутствия необходимой информации.

Стабилизация объекта внешними средствами означает подключение к объекту дополнительных элементов - датчиков, исполнительных механизмов и управляющих устройств, т.е. создание системы управления  $L$ -го уровня.

Задачей топологического синтеза является выбор точек съема требуемой информации о состоянии объекта и наиболее эффективных точек оказания на объект управляющих воздействий.

Необходимым топологическим условием изменения положения корней ХП является охват объекта обратной связью (рис.3.11).

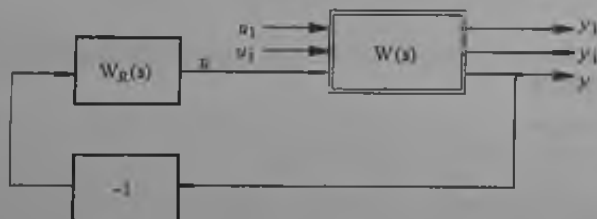


Рис. 3.11. Объект, охваченный отрицательной обратной связью

Топологический синтез сводится к выбору наилучшей пары "вход-выход", иначе - наилучшего места включения стабилизирующей обратной связи.

Использование информации о внутренней организации объекта (подсистемы  $L$ -го уровня) позволяет сократить число вариантов топологий. Для этого следует выделить неустойчивый элемент или сильный компонент графа, которые должны стабилизироваться, т.е. принадлежать вновь создаваемой контурной части.

Рассмотрим пример объекта, приведенный в подразд. 3.5 (рис.3.6). Допустим, что анализ выявил неустойчивое звено с ПФ  $W_1(s)$ . Ясно, что только варианты обратной связи, использующие вход  $u_1$ , удовлетворяют необходимому топологическому условию.

Если информации о внутренней организации объекта нет, то решение о выборе наилучшей пары "вход-выход" принимается на основе анализа характеристик объекта.

Пара "вход-выход" должна удовлетворять условию стабилизируемости - полной управляемости и наблюдаемости неустойчивой части объекта по рассматриваемому каналу (подразд.2.4). Как было показано в п.3.6.4, если ПФ контура имеет диполи - равные друг другу нули и полюсы, то ХП замкнутой системы имеет в точности такие корни. Следовательно, ПФ объекта по выбранной паре "вход-выход" не должна иметь нулей, компенсирующих перемещаемые полюсы. Практическим условием стабилизируемости является достаточно сильное отличие модулей плохих нулей ПФ от модулей перемещаемых полюсов.

Как следует из теории корневых годографов [18,19], охват обратной связью перемещает различные корни ХП объекта не в одинаковой степени. Наиболее подвижными являются корни, модули которых принадлежат диапазону частот  $\Omega_1$ , где усиление контура велико

$$\forall \omega \in \Omega_1 : L_0(\omega) = 20 \lg |W_0(j\omega)| > 20 \text{ дБ.}$$

Корни ХП, модули которых принадлежат диапазону частот, где усиление контура мало

$$\forall \omega \in \Omega_2 : L_0(\omega) < -20 \text{ дБ.}$$

в результате его замыкания перемещаются незначительно.

Таким образом, количественным критерием выбора места включения обратной связи может являться максимизация модуля ЧХ объекта на возможных парах "вход-выход"  $(u_j, y_i)$ :

$$L(\omega) \rightarrow \max_{\{(u_j, y_i)\}}$$

При прочих равных условиях следует предпочесть ту пару "вход-выход", для которой усиление объекта на частотах перемещаемых корней максимально.

### 3.7.2. Структурно-параметрический синтез

Выбор типа и параметров желаемой ПФ контура  $W_0^d(s)$  однозначно определяет структуру и параметры регулятора - ПФ  $W_R(s)$ , которая находится из соотношения

$$W_0^d(s) = W_R(s) W(s). \quad (3.15)$$

Желаемая ПФ

$$W_0^d(s) = \frac{B_0^d(s)}{D_0^d(s)}$$

также однозначно определяет желаемый ХП замкнутой системы стабилизации

$$D^d(s) = D_0^d(s) + B_0^d(s). \quad (3.16)$$

Таким образом, выбирая структуру и параметры желаемой ПФ контура, проектировщик задает и желаемое расположение корней ХП системы.

Из тождества (3.15) с учетом:

$$W(s) = \frac{B(s)}{D(s)}, \quad W_R(s) = \frac{B_R(s)}{D_R(s)}, \quad W_0^d(s) = \frac{B_0^d(s)}{D_0^d(s)}$$

можно записать ПФ регулятора

$$W_R(s) = \frac{B_0^d(s) \cdot D(s)}{D_0^d(s) \cdot B(s)}. \quad (3.17)$$

Пусть ПФ объекта  $W(s)$  и желаемая ПФ контура  $W_0^d(s)$  имеют некоторое число равных нулей и полюсов, т.е. их полиномы имеют нетривиальные общие делители  $b(s)$ ,  $d(s)$ :

$$B(s) = B_1(s) b(s); \quad B_0^d(s) = B_{01}^d(s) b(s); \quad D(s) = D_1(s) d(s); \quad D_0^d(s) = D_{01}^d(s) d(s). \quad (3.18)$$

После их сокращения из (3.17) получим упрощенную ПФ регулятора

$$W_{R1}(s) = \frac{B_{01}^d(s) D_1(s)}{D_{01}^d(s) B_1(s)}. \quad (3.19)$$

Чем большее число нулей и полюсов желаемой ПФ  $W_0^d(s)$  совпадают с нулями и полюсами ПФ объекта, тем проще регулятор.

Введем регулятор с ПФ (3.19) в систему. ПФ разомкнутого контура будет равна

$$W_{0d}(s) = W_{R1}(s) W(s) = \frac{B_{01}^d(s) D_1(s) B(s)}{D_{01}^d(s) B_1(s) D(s)}. \quad (3.20)$$

Если учесть (3.18), то выражение (3.20) запишется так:

$$W_{0d}(s) = \frac{B_{0d}(s)}{D_{0d}(s)} = \frac{B^d(s) B_1(s) D_1(s)}{D^d(s) B_1(s) D_1(s)} = \mu_0^d(s) \frac{B_1(s) D_1(s)}{B_1(s) D_1(s)}. \quad (3.21)$$

Таким образом, ПФ стабилизирующего контура  $W_{0c}(s)$  тождественна с желаемой ПФ  $W_0^d(s)$  с точностью до неполной части контура с ХП

$$D_N(s) = B_1(s) D_1(s). \quad (3.22)$$

При замыкании контура положение корней полинома  $D_N(s)$  не изменяется ("неподвижные корни"). Действительно, поскольку ХП замкнутой одноконтурной системы с единичной обратной связью равен сумме полиномов знаменателя и числителя ПФ контура, из (3.21) следует:

$$D(s) = D_{0d}(s) + B_{0d}(s) = (D^d(s) + B^d(s)) B_1(s) D_1(s) = D^d(s) D_N(s). \quad (3.23)$$

Как видно из выражения (3.23), ХП замкнутой системы равен желаемому (3.16), умноженному на ХП неполной части контура (3.22). В общем случае получается система более высокого порядка, чем желаемая система.

Неполная часть контура стабилизации содержит те нули и полюсы ПФ объекта  $W(s)$ , которые не повторяются в желаемой ПФ  $W_0^d(s)$ . Отсюда следует принципиальный вывод - перемещаемые полюсы ПФ объекта, а также ее плохие нули должны обязательно входить в желаемую ПФ.

Таким образом, формирование желаемых характеристик контура стабилизации связано с контролем нулей и полюсов ПФ и условий их компенсации. Согласованный выбор модулей и типов вновь вводимых нулей и полюсов в соответствии с усилениями контура легко осуществлять по виду ЛАЧХ, дополненной указателями модулей и типов нулей и полюсов.

При формировании желаемой ЛАЧХ и ПФ контура следует руководствоваться следующими правилами:

- перемещаемые полюсы, а также плохие нули ПФ объекта должны входить в желаемую ПФ;
- на частотах, которым принадлежат модули перемещаемых корней, усиление контура должно быть велико ( $L_0^d > 20$  дБ);
- в окрестности частоты среза асимптотическая ЛАЧХ должна иметь типовой вид, в частности, наклон асимптоты должен равняться -20 дБ/дек (это определяет типовое расположение желаемых доминирующих корней ХП);
- на высоких частотах желаемая асимптотическая ЛАЧХ должна повторять наклоны ЛАЧХ объекта, т.е. желаемая ПФ должна повторять большие по модулю полюсы и нули ПФ объекта - это упрощает структуру регулятора;
- вне области адекватности модели (в области немоделируемой динамики) усиление контура должно быть малым ( $L_0^d < -20$  дБ).

Легко видеть, что процедура формирования желаемой ЛАЧХ контура стабилизации имеет много общего с аналогичной процедурой при структурно-параметрическом синтезе следящих систем (подразд.3.6).

Ясно, что синтезированная в подразд.3.7 система стабилизации способна ослаблять действие возмущений, частоты которых принадлежат области больших усиления контура. Чувствительность характеристик такой системы к вариациям параметров объекта в этой области частот будет достаточно малой.

### 3.8. Расчет настроек типовых регуляторов как задача параметрического синтеза

Управляющее устройство автоматических систем представляет собой аналоговый или цифровой вычислительный элемент, в котором по принятому алгоритму формируется управляющее воздействие на объект. Характер поступающей на управляющее устройство информации определяется принципом управления, иначе - топологией информационных связей. Как отмечалось в п.3.2.8, локальные системы промышленной автоматики обычно включают системы стабилизации режимов и следящие системы, реализующие принцип отрицательной обратной связи (рис.3.3а и рис.3.4). Управляющие устройства таких локальных систем обычно называют регуляторами.

#### 3.8.1. Типовые регуляторы

Регуляторы осуществляют преобразование переменной ошибки регулирования  $e(t)$  в регулирующее воздействие на объект  $u(t)$  по некоторому алгоритму. Оператор, используемый в качестве модели реального регулятора, определяет тот желаемый алгоритм обработки информации, который принимается при его проектировании (программировании).

Рассмотрим наиболее распространенные типы регуляторов и их операторы.

Пропорциональный закон (*P-закон*) управления

$$u(t) = k_R e(t)$$

имеет ясную логику принятия решения - чем больше ошибка, тем выше уровень управляющего воздействия. Увеличение параметра настройки - коэффициента пропорциональности  $k_R$  повышает точность установившихся (статических) режимов и быстродействие системы.

Если ошибку системы определяет скорость изменения управляющего воздействия, то говорят об интегральном законе (*I-закон*):

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau .$$

Дифференциальное уравнение I-регулятора имеет вид:

$$T_I \frac{du(t)}{dt} = e(t) .$$

а его передаточная функция равна:

$$W_R(s) = \frac{1}{T_I s} = \frac{k_R}{s} .$$



Характерной особенностью И-закона является то, что управляющее воздействие изменяется до тех пор, пока ошибка не станет равной нулю. Типовой И-закон управления обеспечивает астатизм в системе со статическим объектом, т.е. нулевую установившуюся ошибку при постоянных воздействиях. Повышение добротности контура путем увеличения коэффициента передачи  $k_R = 1/T_I$  уменьшает установившуюся ошибку при воздействиях с постоянной скоростью, увеличивая полосу частот и быстродействие системы.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон) описывается выражением

$$u(t) = k_R \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

или в форме передаточной функции

$$W_R(s) = k_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_R (T_I s + 1)}{T_I s}$$

Этот закон наиболее часто реализуется в системах промышленной автоматики, обеспечивая их астатизм. Как видно из выражения для ПФ регулятора, при использовании ПИ-закона ПФ контура дополняется нулем, что позволяет решать задачу стабилизации системы при больших значениях добротности контура. Управляющие устройства, реализующие ПИ-закон, имеют два параметра настройки - коэффициент усиления  $k_R$  и время интегрирования  $T_I$ .

Иногда применяют управляющие устройства, реализующие пропорционально-дифференцирующий закон (ПД-закон)

$$u(t) = k_R \left[ e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

или в форме передаточной функции

$$W_R(s) = k_R (1 + T_D s).$$

Рассмотренные законы не исчерпывают возможностей современных средств контроля и управления, способных реализовывать самые различные алгоритмы.

### 3.8.2. Параметрический синтез

Параметрический синтез характеризуется относительно малой исходной неопределенностью, так как на предыдущих этапах проектирования приняты решения о точках съема текущей информации и точках приложения воздействий на объект (топологический синтез), выбраны типы алгоритмов управления (структурный синтез), конкретизирована часть параметров и установлены пределы изменения для всех остальных.

Расчет настроек типовых регуляторов также представляет собой задачу параметрического синтеза. Поскольку на этом этапе тип регулятора уже выбран или задан, варианты систем различаются только параметрами, т.е. исходное множество  $\mathcal{M}$  представляет собой модель второго ранга  $\mathcal{M} = M(2)$ .

Параметры настроек  $q_k$ ;  $k = 1, 2, \dots$ , принадлежат допустимой области  $\mathcal{M} = \mathcal{Q}$ , обычно задаваемой в виде ограничений:

$$\mathcal{M} = \{ q_k \min \leq q_k \leq q_k \max; k = 1, 2, \dots \}. \quad (3.24)$$

В большинстве постановок задачи параметрического синтеза множества требуемых систем  $\mathcal{M}^d$  задаются либо в форме ограничений на показатели качества (3.2), либо в виде условий их оптимизации (например минимизации (3.3)).

1. Пусть заданы ограничения на показатели качества

$$I_i(q_1, q_2, \dots) \leq I_{i \max}; \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.25)$$

В результате синтеза должны быть найдены значения параметров, при которых удовлетворяются все ограничения (3.25).

Задача параметрического синтеза в такой постановке может иметь множество решений, единственное решение или не иметь ни одного. Рис.3.12 иллюстрирует ситуации, отображенные на рис.3.5а,б:

1 - множество решений,  $\mathcal{Q}_c = \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}^d \neq \emptyset$ ;

2 - отсутствие решения,  $\mathcal{Q}_c = \emptyset$ .

Рассматривается случай, когда выбираются два параметра  $q_1$  и  $q_2$  (рис.3.12а) и предъявлены требования в виде ограничений двух показателей качества  $I_1(q_1, q_2)$  и  $I_2(q_1, q_2)$  (рис.3.12б). На плоскость показателей качества ( $I_1, I_2$ ) отображена исходная область  $I_Q$ . Отсутствие пересечения образа  $I_Q$  с областью  $\mathcal{M}^d$  (ситуация 2) означает отсутствие решения.

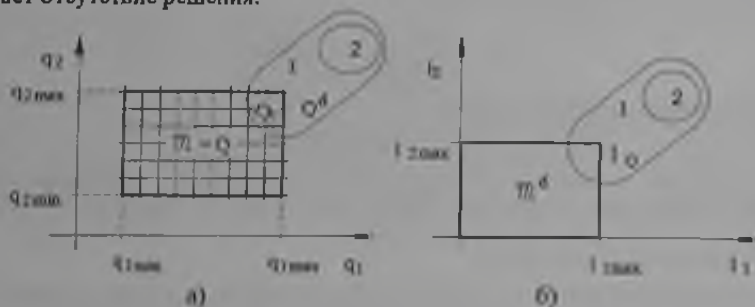


Рис.3.12. Иллюстрация задачи параметрического синтеза

Отображение области  $\mathcal{Q}$  пространства параметров на пространство показателей качества аналитически возможно лишь для простейших систем. Численное решение задачи с использованием программных средств сводится к многократному вычислению показателей качества. Конечное подмножество элементов  $\mathcal{Q}$ , как правило, соответствует узлам решетки (сетки), покрывающей область  $\mathcal{Q}$  (рис.3.12а). В результате простого перебора находится то подмножество параметров, при которых удовлетворяются требования (3.25).

Принципиально сложнее решать задачу обратного отображения - области допустимых значений показателей качества на пространство параметров. Имеется ряд методов, алгоритмов и программ, позволяющих строить поверхности равных значений показателей качества в пространствах параметров без их полного перебора [22]. Особенно эффективно такое построение с использованием средств компьютерной графики.

2. Пусть ограничения на часть показателей качества системы (например быстроедействие) не известны или решение задачи синтеза с ограничениями (3.25) даст множество вариантов выбора. Тогда задача параметрического синтеза дополняется оптимизационной постановкой (3.3) - некоторые показатели качества минимизируются при ограничениях на все остальные:

$$I_i(q) \rightarrow \min_{q \in Q_c}; \quad i=1,2,\dots \quad (3.26)$$

В выражении (3.26) предусмотрено, что вектор параметров  $q$  принадлежит подмножеству  $Q_c \subseteq Q$ , т.е. соблюдены заданные ограничения на показатели качества.

Если система оптимизируется по единственному критерию, то параметрический синтез сводится к поиску условного экстремума функции нескольких аргументов с использованием методов нелинейного программирования [23].

### 3.8.3. Задача векторной оптимизации

Если одновременно оптимизируются несколько критериев, то имеет место задача векторной оптимизации

$$I(q) \rightarrow \min_{q \in Q}$$

Для примера на рис.3.13а иллюстрируется задача минимизации двух критериев  $I_1(q)$ ,  $I_2(q)$ , зависящих от одного параметра. Поскольку в общем случае оптимальные значения параметра по отдельным критериям не совпадают, т.е.

$q_{10} \neq q_{20}$ , то необходимо определить, что следует считать решением задачи векторной (многокритериальной) оптимизации.

По определению, решением задачи многокритериальной оптимизации является множество значений параметров, в котором изменение любого параметра с целью улучшения одного из критериев обязательно ухудшает хотя бы один другой. Такое множество неулучшаемых решений называют *множеством Парето*.

На рис.3.13а множеству Парето на оси  $q$  отвечает отрезок  $P$  между значениями  $q_{10}$  и  $q_{20}$  частных оптимумов. Изменение значения  $q$  в любой точке открытого интервала  $(q_{10}, q_{20})$ , уменьшая один из показателей качества, приводит к увеличению другого. Иная иллюстрация области Парето  $P$  приведена на рис.3.13б, где по осям отложены значения показателей качества.

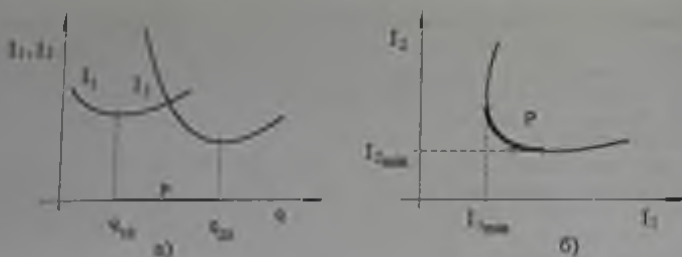


Рис. 3.13. Иллюстрация задачи векторной оптимизации

Неполная определенность решения задачи векторной оптимизации (множественный характер решения) обусловлена неопределенностью, содержащейся в постановке задачи, а именно - в задании требований. При формализации пожеланий проектировщика не установлены приоритеты. Уменьшение неопределенности решения требует привлечения дополнительной информации.

Можно выделить два способа скаляризации задачи оптимизации:

- все частные критерии, кроме одного, представляются в виде ограничений;
- из частных критериев  $I_i$  формируется скалярный критерий, который называют обобщенным или глобальным:

$$J[I(q, c)] \rightarrow \min_{q \in Q}$$

Обобщенный критерий включает ряд весовых коэффициентов  $c = (c_1, c_2, \dots)$ ;  $c_i \geq 0$ , назначением которых задается предпочтение тем или иным частным критериям. Обобщенный критерий называют эффективным, если для любых значений весовых коэффициентов его минимум принадлежит области Парето.

Примерами эффективных обобщенных критериев являются аддитивный

$$J(q, c) = \sum_i c_i I_i(q)$$

и мультипликативный

$$J(q, c) = \prod_i I_i^{c_i}(q)$$

критерии. Решая задачу скалярной оптимизации при различных значениях весовых коэффициентов, получают точки области Парето, отвечающие предпочтениям проектировщика. Можно сказать, что конструкция и параметры обобщенного критерия моделируют требования проектировщика в определенном контексте синтеза.

Рассмотренный в подразд. 2.3 обобщенный интегральный квадратичный функционал (2.11) также является аддитивным обобщенным критерием, весовые коэффициенты которого упорядочены в матрицы  $Q$  и  $R$ .

Часто используемый при синтезе улучшенный интегральный квадратичный критерий

$$J = \int_0^{\infty} [c_0^2 y^2(t) + c_1^2 \dot{y}^2(t)] dt = \int_0^{\infty} y_{\text{н}}^2(t) dt + \tau_1^2 \int_0^{\infty} \dot{y}_{\text{н}}^2(t) dt = J_0 + \tau_1^2 J_1 \quad (3.27)$$

является также аддитивным. Частными критериями в нем являются интегральная оценка  $J_0$  процесса и интегральная оценка  $J_1$  производной процесса по времени с весовыми коэффициентами  $c_0 = 1$  и  $c_1 = \tau_1^2$  соответственно.

### 3.9. Примеры синтеза систем управления

#### 3.9.1. Пример коррекции следящей системы

Рассмотрим следящую систему, изображенную на рис.2.13 с ПФ отдельных элементов, приведенными в примере п.2.7.3. Система имеет астатизм первого порядка и добротность по скорости  $k_1=200\text{с}^{-1}$ ; амплитуда установившейся ошибки воспроизведения гармонических воздействий с частотами  $\omega \leq 10\text{с}^{-1}$  не превышает 0.05А. Таким образом, система обладает свойством селективной инвариантности переменной ошибки к низкочастотным задающим воздействиям

Задачей коррекции является удовлетворение требований к переходным процессам в системе при сохранении качества ее установившихся движений.

На этапе топологического синтеза выбирается место включения в систему звена (дуги) коррекции. Как отмечалось в п.3.6.1, желательно, чтобы это звено занимало позиции 1 или 2 по отношению к синтезируемому контуру, т.е. либо входило в сам контур (последовательная коррекция), либо в контуры, его касающиеся (коррекция местной обратной связью).

Основу частотного синтеза коррекции составляет процедура построения желаемой ЛАЧХ контура с учетом расположения и типа нулей и полюсов ПФ исходной системы (п.3.6.2). Формирование ЛАЧХ в рассматриваемом примере начинается с низкочастотного участка, имеющего наклон -20 дБ/дек (рис.3.14).

Процедуру формирования желаемой ЛАЧХ можно рассматривать как трансформацию ЛАЧХ исходной разомкнутой системы (кривая 1 на рис.3.14) путем последовательного введения в ПФ этой системы дополнительных действительных отрицательных нулей и полюсов (отмечены на оси частот треугольниками). В случае последовательной коррекции эти нули и полюсы являются нулями и полюсами ПФ звена коррекции.

В рассматриваемом примере дополнительно вводится полюс ( $p_1=-1$ ), что изменяет наклон последующего участка ЛАЧХ до -40дБ/дек; введение нуля ( $z_1=-5.3$ ) дает наклон -20дБ/дек. Далее нулем ( $z_2=-29.0$ ) компенсируется полюс исходной ПФ (создается диполь) и вводится последний полюс ( $p_2=-168$ ), обеспечивающий совпадение желаемой ЛАЧХ (кривая 2) с исходной в области высоких частот.



Рис.3.14. Частотные характеристики следящей системы

На рис.3.14 показана ЛАЧХ звена последовательной коррекции (кривая 3), а также желаемая ФЧХ контура (кривая 4). ПФ звена коррекции имеет вид:

$$W_K(s) = \frac{((-1/z_1)s+1)((-1/z_2)s+1)}{((-1/p_1)s+1)((-1/p_2)s+1)} = \frac{1+0.22s+0.0058s^2}{1+1.01s+0.0058s^2}$$

ПФ замкнутой системы с такой коррекцией имеет нули  $z_1=-5.13$ ;  $z_2=-33.61$  и полюсы  $p_1=-5.755$ ;  $p_2=-43.07$ ;  $p_{3,4}=-33.83 \pm 38.05j$ ;  $p_{5,6}=-295.1 \pm 48.22j$ . Переходный процесс при ступенчатом воздействии - на рис.3.15 (кривая 1). Перерегулирование  $\sigma=22\%$ , время регулирования  $t_p=0.17c$ .

Понижение порядков полиномов числителя и знаменателя ПФ  $W_K(s)$  (редукция ПФ) приравниванием нулю старших коэффициентов этих полиномов вызывает заметное ухудшение динамических свойств скорректированной системы (кривая 2 на рис.3.15).

Для коррекции рассматриваемой следящей системы можно использовать местную обратную связь по угловой скорости вращения двигателя, измеряемой тахогенератором. Для этого охватим обратной связью двигатель (ДПТ), управляемый тиристорный преобразователь (УТП) и усилитель (У) - рис.2.13.

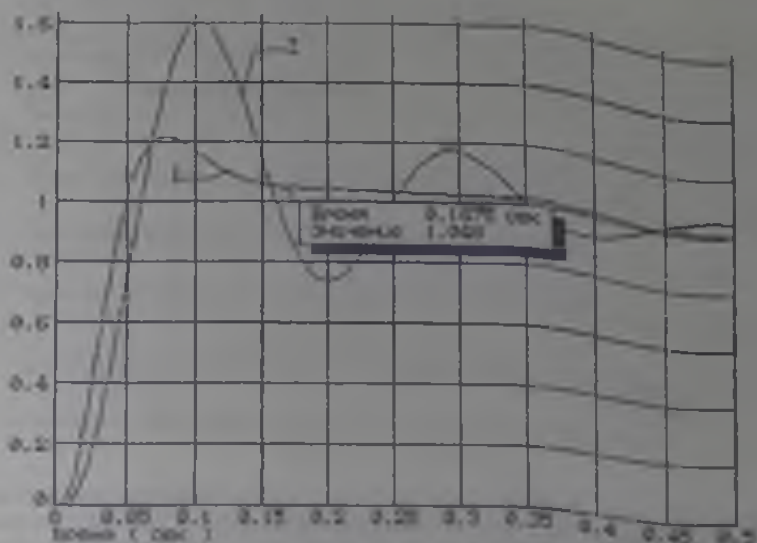


Рис. 3.15. Переходные характеристики следящей системы с последовательной коррекцией

Для синтезированной выше желаемой ЛАЧХ ПФ звена коррекции в обратной связи будет иметь вид:

$$W_K(s) = \frac{-3.87 \cdot 10^{-5} s - 3.16 \cdot 10^{-7} s^2 - 4.44 \cdot 10^{-10} s^3 + 4.67 \cdot 10^{-13} s^4}{1 + 0.188s}$$

Простейшей процедурой редукции ПФ является последовательное приравнение нулю старших коэффициентов полинома числителя с последующим анализом качества системы. Такой процесс продолжается до тех пор, пока показатели качества остаются удовлетворительными. Для синтезируемой системы результатом редукции является простейшая гибкая обратная связь с ПФ

$$W_K(s) = \frac{-3.87 \cdot 10^{-5} s}{1 + 0.188s}$$

Соответствующая переходная характеристика системы с такой коррекцией показана на рис.3.16. Ее прямые показатели качества:  $t_r = 0.19$  с;  $\sigma = 9$



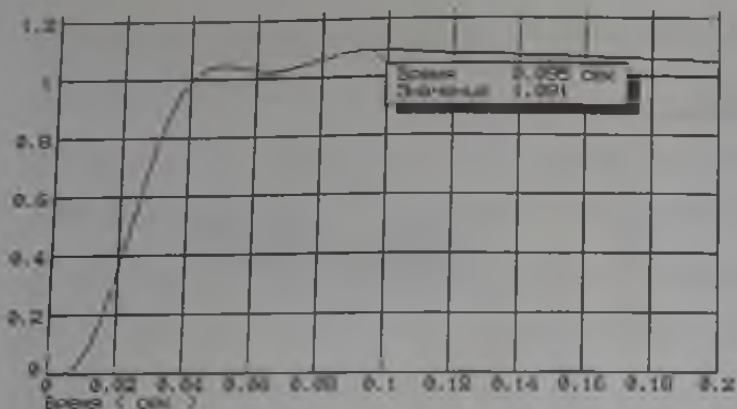


Рис.3.16. Переходная характеристика системы с упрощенной коррекцией типа обратной связи

Рассмотренные два способа коррекции обеспечивают близкие динамические характеристики следящей системы. В то же время известно, что использование местной обратной связи позволяет уменьшить влияние вариаций характеристик. На рис.3.17 приведены ЛАЧХ относительных функций чувствительности передачи от входа к выходу системы к звеньям  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Кривая 1 соответствует варианту последовательной коррекции, кривая 2 - обратной связи.

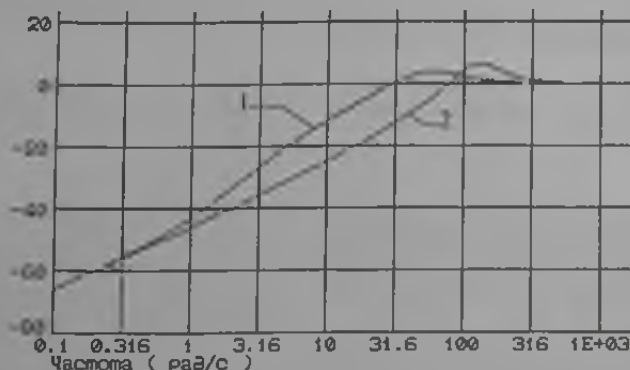


Рис.3.17. ЛАЧХ относительных функций чувствительности

Видно, что на низких и высоких частотах модули ФЧ для любых типов коррекции совпадают. На низких частотах модули ФЧ малы, поскольку при большом усилении основного контура вариации звеньев прямого пути мало влияют на передачу замкнутой системы. На высоких частотах усиление основного контура ма-

до, поэтому вариации операторов отдельных звеньев вызывают практически такие же вариации ПФ замкнутой системы (модули относительных ФЧ при обоих способах коррекции равны единице).

На средних частотах ФЧ рассматриваемых систем существенно различаются - модуль ФЧ системы с местной обратной связью значительно меньше на частотах, где велико усиление внутреннего контура.

С учетом сказанного при синтезе системы окончательный выбор варианта коррекции в виде обратной связи может считаться более предпочтительным.

### 3.9.2. Пример синтеза стабилизирующей обратной связи для неустойчивого объекта

В качестве неустойчивого объекта рассмотрим магнитный подвес физического тела (математическая модель подвеса приведена на рис.2.10), анализ которого проводился в п.2.7.1. Положение равновесия ферромагнитного тела неустойчиво - среди корней ХП  $D_0(s)$  имеется один действительный положительный. Необходимо построить систему автоматической стабилизации неустойчивого объекта, используя принцип обратной связи.

Синтез стабилизирующей обратной связи включает решение двух задач (подразд.3.7):

- выбор усиления контура по требованию подвижности корней ХП;
- формирование свойств контура в области средних усилений (средних частот) из условия желаемого расположения на комплексной плоскости доминирующих корней ХП замкнутой системы.

Введем отрицательную обратную связь по координате  $x$  и заданием коэффициента усиления  $k_1=5000$  звена У с ПФ  $W_1(s)$  повысим коэффициент усиления контура до значения  $k=100$ , выбранного из условия обеспечения достаточной подвижности корней ХП. На частоте неустойчивого полюса объекта ( $\omega=5c^{-1}$ ) усиление контура при этом равно  $L_p \approx 34$ дБ. Логарифмические АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы (объекта) при выбранном значении  $k$  приведены на рис.3.18 (кривые 1,2).

Замкнутая система по критерию Найквиста неустойчива, т.е. требуется введение регулятора и решение задачи структурно-параметрического синтеза его ПФ  $W_K(s)$ . Все корни ХП синтезируемой системы должны располагаться в левой полуплоскости и обеспечивать достаточную степень устойчивости. Для минимизации времени затухания переходных процессов необходимо максимально увеличить модули доминирующих корней ХП, учитывая при этом реальную ограниченность области адекватности  $\Omega$  модели объекта. Дополнительным условием, которое необходимо учитывать, является сохранение усиления контура на частоте неустойчивого полюса.

На рис.3.18 показаны желаемые ЛАЧХ (кривая 3) и ФЧХ (кривая 4) контура, сформированного с учетом этих условий. Эти характеристики могут быть реализованы введением в ПФ системы дополнительно трех нулей и трех полюсов, т.е. при ПФ регулятора, равной

$$W_K(s) = \frac{(1/19.1s+1)(1/100s+1)^2}{(1/912s+1)^3}$$

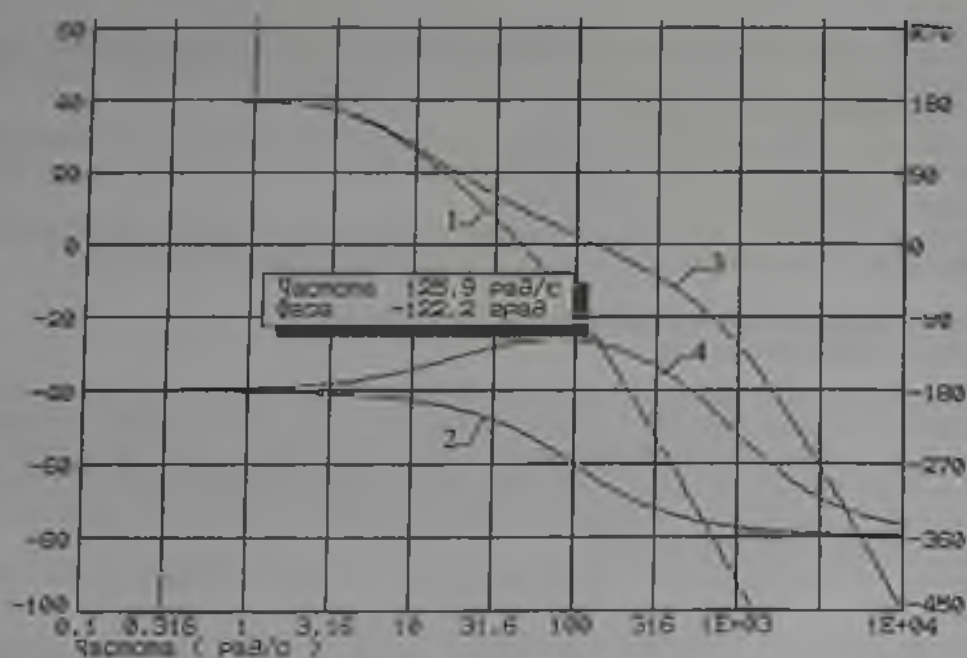


Рис.3.18. ДМХ разомкнутой системы

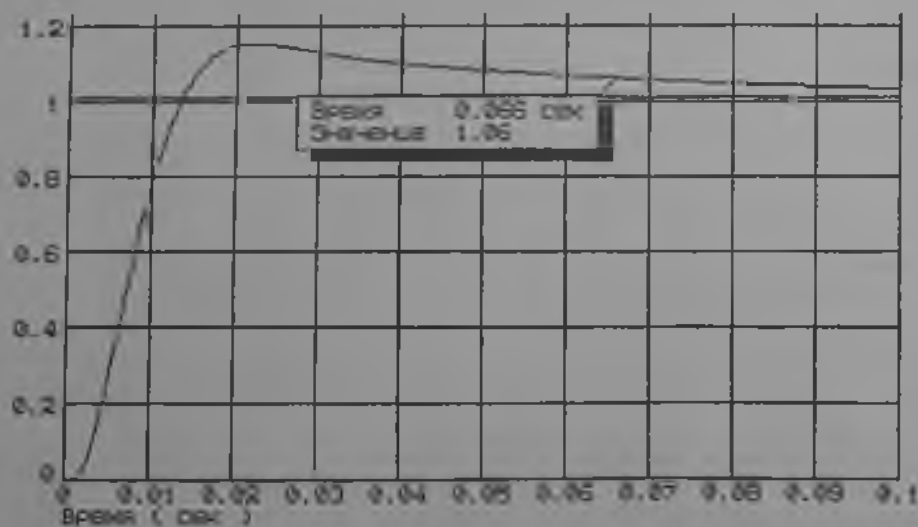


Рис.3.19. Переходная характеристика системы со стабилизирующей обратной связью



Процедура обеспечения удовлетворительного поведения системы будет включать в себя формализацию требований, выбор закона управления и расчет настроек регулятора.

Сформулируем требования к системе управления.

- абсолютная ковариантность к постоянному задающему воздействию и инвариантность к постоянному возмущению.
- максимальное быстродействие системы при ограничении на колебательность в переходных режимах.
- типовой закон управления, реализуемый регулятором.

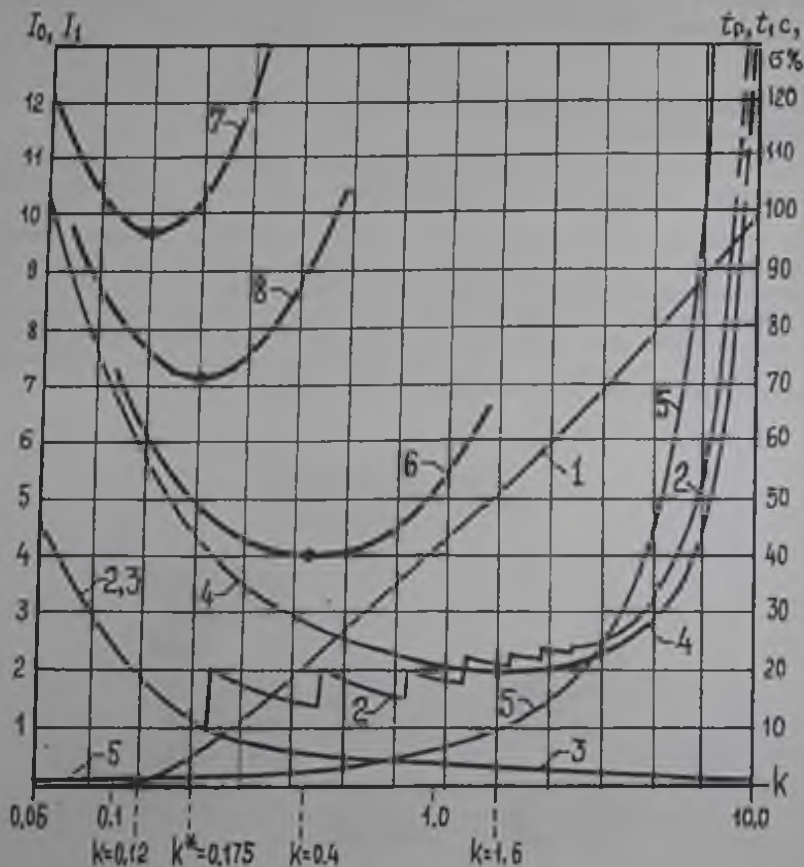


Рис. 3.21. Зависимости показателей качества от коэффициента усиления

Первое требование предполагает обеспечение нулевой установившейся ошибки  $e_y=0$  при  $g(t)=g_0 1(t)$ . Второе требование можно трактовать как минимизацию времени окончания переходного процесса  $t_p \rightarrow \min$  и перерегулирования  $\sigma \rightarrow \min$ . Введем также ограничение на значение перерегулирования  $\sigma \leq 20\%$ .

При оптимизации параметров регулятора будем привлекать также быстроисчисляемые косвенные критерии - интегральные квадратичные оценки. Для иллюстрации механизма действия интегральных оценок и формируемого на их основе "улучшенного интегрального критерия" исследуем зависимости используемых прямых и косвенных показателей качества от варьируемого параметра  $k_R$  - рис.3.21.

Алгоритмы управляющего устройства с учетом требования  $e_y=0$  ограничим двумя законами управления: И - интегрального и ПИ - пропорционально-интегрального.

#### И-закон управления

ПФ И-регулятора имеет вид:

$$W_R(s) = \frac{1}{T_I s} = \frac{k_R}{s}$$

Оптимизация будет проводиться в пространстве одного параметра - коэффициента усиления  $k_R$ , который будем изменять в широких пределах:  $0.05 \leq k_R \leq 10$ . При  $k_{R\max}=10$  система выходит на колебательную границу устойчивости. При варьировании  $k_R$  в этих пределах переходные процессы изменяются от затяннутых апериодических (кривая 1 на рис.3.22, соответствующая  $k_R=0.05$ ) до сильно колебательных (кривая 2 на том же рисунке, полученная при  $k_R=5$ ).

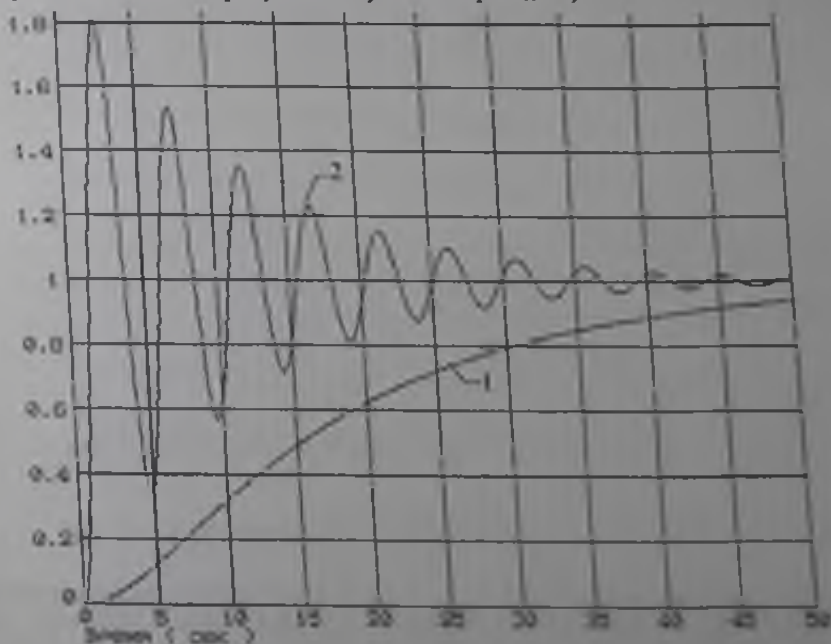


Рис.3.22. Переходные характеристики системы при  $k_R=0.05$  и  $k_R=5.0$

На рис.3.21 кривая 1 представляет собой зависимость перерегулирования  $\sigma$ , а кривая 2 времени регулирования  $t_p$  от коэффициента усиления.

Обратим внимание на скачкообразный характер изменения  $t_p$  при  $\sigma > 5\%$ , что объясняется специфичностью определения этого критерия как времени последнего вхождения в пятипроцентную зону от установившегося значения.

Следует отметить, что для колебательных переходных процессов критерий "время регулирования  $t_p$ " может входить в противоречие с понятием "быстродействие", которое связано с полосой пропускания системы и должно расти с увеличением коэффициента усиления в контуре. Если под быстродействием понимать скорость реакции системы на изменение входного воздействия, то можно использовать критерий "время первого согласования" ( $t_1$ ), т.е. время первого вхождения переходной характеристики в пятипроцентную зону от установившегося значения. На рис.3.21 зависимость этого критерия представлена кривой 3. Очевидно, что при  $\sigma < 5\%$  показатели  $t_p$  и  $t_1$  совпадают.

Из графика зависимости перерегулирования видно, что для выполнения  $\sigma \leq 20\%$  необходимо  $k_R \leq 0.4$ . Диапазон значений  $0.12 \leq k_R \leq 0.4$  является областью Парето по быстродействию системы и ее склонности к колебательности при соблюдении ограничений на допустимые значения отдельных критериев ( $\sigma \leq 20\%$ ). На рис.3.23 кривая 1 является переходной характеристикой при  $k_R=0.12$ , а кривая 2 - при  $k_R=0.4$ .

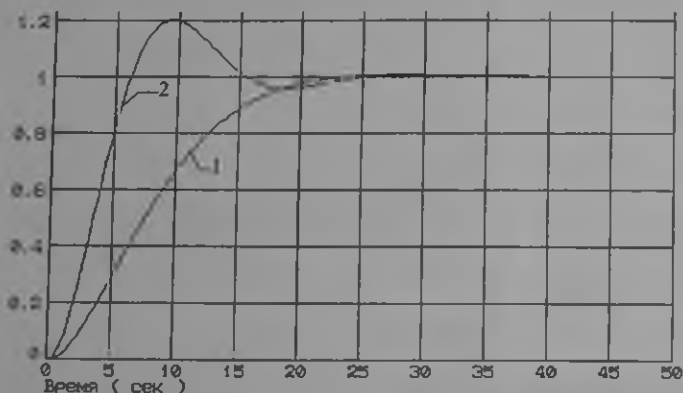


Рис.3.23. Переходные характеристики системы при  $k_R=0.12$  и  $k_R=0.4$

Окончательный вариант должен быть выбран из этого диапазона настроек регулятора. На рис.3.24 представлена переходная характеристика системы при  $k_R=0.175$  с показателями  $t_p=11.8$  с. и  $\sigma=4.5\%$ . Эту систему и выберем как результат синтеза по прямым критериям качества.



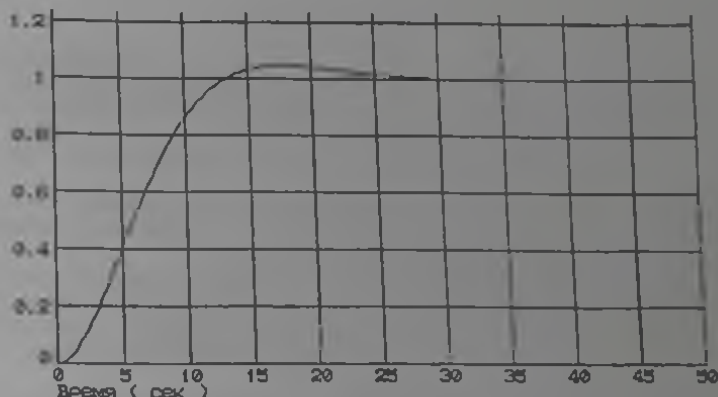


Рис. 3.24. Переходная характеристика оптимальной системы с П-регулятором

Использование косвенных критериев качества (в данном случае - интегральных оценок) при автоматизированной процедуре параметрической оптимизации должно приводить в область Парето по прямым показателям качества, а при правильном подборе весов функционала необходимо получить вариант, совпадающий с результатом синтеза по прямым показателям качества.

На рис.3.21 кривая 4 представляет собой зависимость интегральной квадратичной оценки

$$I_0 = \int_0^{\infty} \epsilon_n^2(t) dt,$$

где  $\epsilon_n$  - переходная составляющая ошибки, от коэффициента усиления. При увеличении коэффициента от  $k_{Rmin}$  до  $k_R=1.6$ ,  $I_0$  уменьшается с ростом быстродействия системы. Однако при дальнейшем увеличении усиления  $I_0$  возрастает вместе с прямыми показателями качества  $t_p$  и  $\sigma$  из-за затягивания переходного процесса при приближении к колебательной границе устойчивости.

Система, оптимальная в смысле интегральной квадратичной оценки  $I_0$ , имеет  $t_p=18.5$  с. и  $\sigma = 53\%$ , что недопустимо. Следует использовать функционал, оптимум которого можно сместить в сторону меньших усиления. Для этого привлечем интегральную квадратичную оценку от производной квадрата переходной составляющей ошибки:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \dot{\epsilon}_n^2(t) dt$$

Зависимость показателя качества  $I_1$  от усиления  $k_R$  представлена кривой 5 на рис.3.21. Во всем диапазоне варьируемого параметра эта зависимость имеет монотонный характер. Оптимизация только по критерию  $I_1$  однозначно приведет к значению  $k_{Rmin}$ , т.е. получим самую медленную систему из возможных.

Используем "улучшенный интегральный критерий"

$$J = a_0 I_0 + a_1 I_1$$

и, подбирая веса  $a_0$ ,  $a_1$ , сформируем такой функционал, экстремум которого будет совпадать с оптимумом по прямым показателям качества. Так как для задачи оптимизации параметров регулятора имеет значение не величина функционала, а положение его экстремума, важно только соотношение весов  $a_0$ ,  $a_1$ . Поэтому положим  $a_0 = \text{const} = 1$  и будем вести поиск в пространстве только одного веса  $a_1$ .

Из графиков зависимостей  $I_0$  и  $I_1$  в интересующей нас области видно, что значения  $I_0$  намного превосходят значения  $I_1$ . Поэтому для существенного смещения экстремума от значения  $k_R = 1.6$  следует назначать  $a_1 \gg a_0 = 1$ .

Назначение  $a_1 = 5.5$  дает функционал  $J = I_0 + 5.5 I_1$ , зависимость которого от коэффициента  $k_R$  показана кривой 6 на рис.3.21. Система, оптимальная в смысле такого функционала, дает настройку регулятора  $k_R = 0.4$ , соответствующую правой границе интересующей нас области варьируемого параметра (кривая 2 на рис.3.23).

Величина  $a_1 = 67$  задает функционал  $J = I_0 + 67 I_1$ , оптимум которого соответствует значению  $k_R = 0.12$  - кривая 7 на рис.3.21. Оптимизация в этом случае приведет к левой границе области варьируемого параметра (кривая 1 на рис.3.23).

Таким образом, назначая вес в пределах  $5.5 < a_1 < 67$ , задаем функционал, оптимизация по которому будет приводить в требуемую область настроек, выделенную по прямым показателям качества. Величина веса  $a_1 = 31$  дает функционал  $J = I_0 + 31 I_1$ , оптимум которого соответствует  $k_R = 1.75$  - кривая 8 на рис.3.21. Таким образом, оптимизация по этому улучшенному интегральному критерию приводит к системе, оптимальной также и по прямым показателям качества.

### ПИ-закон управления

ПФ ПИ-регулятора имеет вид:

$$W_R(s) = k_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_R (T_I s + 1)}{T_I s}$$

Оптимизация производится в пространстве двух параметров - коэффициента усиления  $k_R$  и постоянной интегрирования  $T_I$ .

ПФ регулятора можно привести к виду

$$W_R(s) = \frac{k_R s + \frac{k_R}{T_I}}{s} = \frac{g_1 s + g_0}{s}$$

и оптимизировать коэффициенты  $g_0$  и  $g_1$  полинома числителя.

Для оптимизации параметров этого регулятора также воспользуемся интегральными оценками качества.

На первом этапе используем функционал, содержащий только одну интегральную оценку:  $J = I_0$ .

Поверхность отклика - зависимость функционала от варьируемых параметров - представлена на рис.3.25. Поверхность построена в диапазонах варьируемых параметров:  $0.1 \leq g_0 \leq 10$ ;  $0.1 \leq g_1 \leq 10$ .

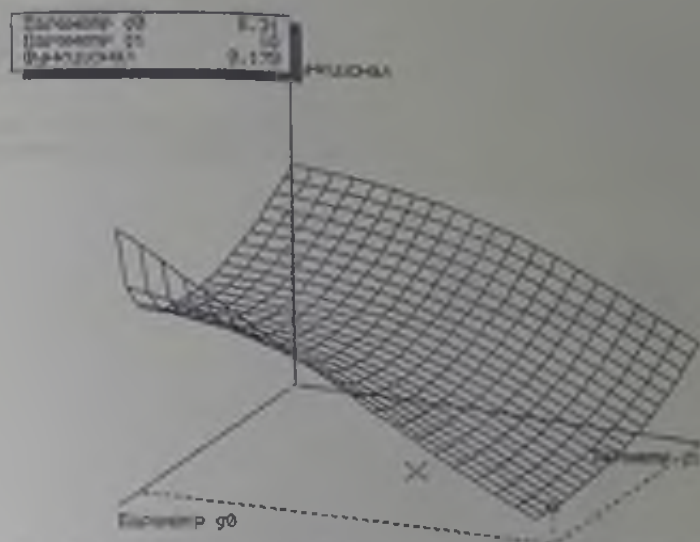


Рис. 3.25. Зависимость амплитудной передаточной функции от крутильных параметров

На поверхности рис.3.25 изображен экстремум, который находится на максимальном граничном значении параметра  $g_1$ . Действительно, точная оптимизация по функционалу  $J=I_0$  приводит к экстремальным значениям  $g_1=6.8$ ,  $g_2=10.0$ . Анализ прямых показателей качества для этой системы дает  $t_p=1.9$  с,  $\sigma=10\%$  - рис.3.26, кривая 1.

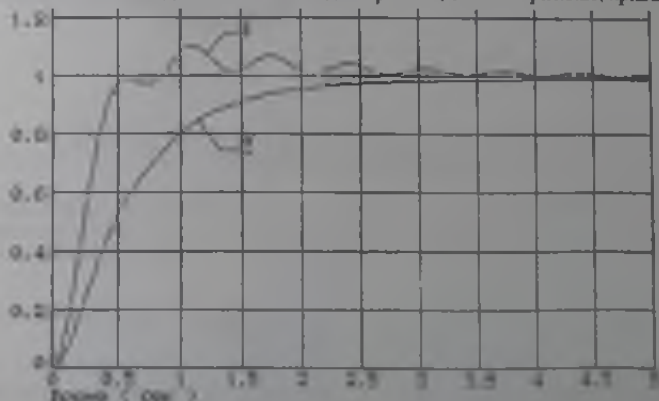


Рис.3.26. Переходные характеристики системы с ПИ-регулятором

Как и в случае использования П-регулятора, оптимизация только по одной интегральной квадратичной оценке увеличила быстродействие, но привела к системе с выраженной колебательностью. Причем в данном конкретном случае перерегулирование находится в допустимых пределах, но переходный процесс содержит высокочастотную колебательную составляющую; такое "нетиповое" поведение системы не может считаться удовлетворительным.

Вспользуемся улучшенным интегральным критерием. При подборе веса  $a_1$  остановимся на значении  $a_1=0.4$ . Поверхность отклика для функционала  $J=I_0+0.4I_1$  представлена на рис.3.27.

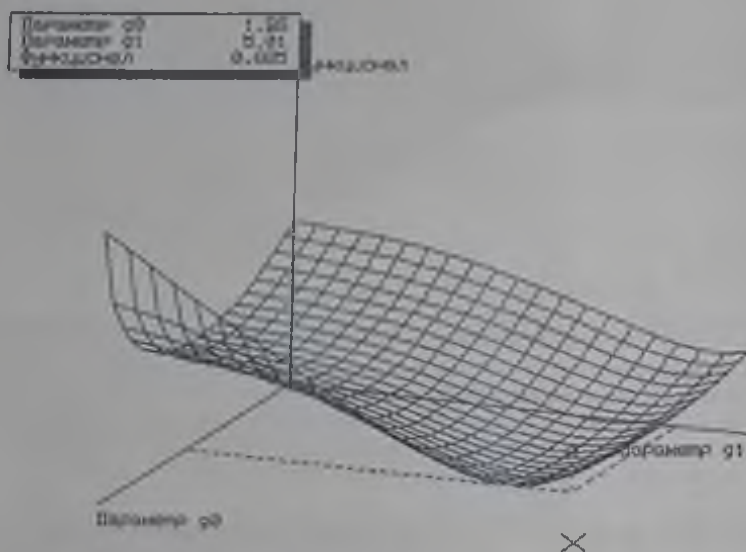


Рис.3.27. Зависимость улучшенного интегрального критерия от варьируемых параметров

Видно, как добавление в функционал еще одной составляющей деформировало поверхность и сместило экстремум. Точная оптимизация по этому функционалу дает значения  $g_0=1.4$  и  $g_1=4.5$ . При этом получаем оптимальные настройки ПИ-регулятора:  $k_R=4.5$ ;  $T_D=3.2$  с.

Переходная характеристика системы с таким регулятором представлена кривой 2 на рис.3.26. Прямые показатели качества  $t_p=2$  с,  $\sigma=0\%$ .

Использование ПИ-регулятора позволило повысить быстродействие системы приблизительно в шесть раз по сравнению с вариантом применения И-регулятора.

### 3.9.4. Пример синтеза системы стабилизации механического объекта

Рассмотрим [34] механическую систему в виде двух взаимосвязанных инвертированных маятников (рис.3.28). Линеаризованные дифференциальные уравнения для малых угловых отклонений маятников  $\theta_1$  и  $\theta_2$  от верхнего положения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 &= m_1 g A \theta_1 - K a_1^2 (\theta_1 - \theta_2) + u_1; \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 &= m_2 g B \theta_2 - K a_2^2 (\theta_2 - \theta_1) + u_2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

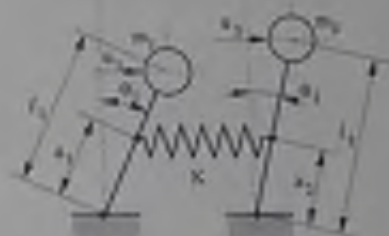


Рис.3.28. Взаимосвязанные инвертированные маятники

Параметры механической системы примем равными:  $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ ;  $g = 9.8 \text{ мс}^{-2}$ ;  $l_1 = 1 \text{ м}$ ;  $l_2 = 2 \text{ м}$ ;  $a_1 = 0.5 \text{ м}$ ;  $a_2 = 1 \text{ м}$ ;  $K = 10 \text{ Нм}^{-1}$ .

Запишем дифференциальные уравнения системы (3.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)\theta_1 &= \gamma_1\theta_2 + \beta_1 u_1; \\ \theta_2 - (\alpha_2 - \gamma_2)\theta_2 &= \gamma_2\theta_1 + \beta_2 u_2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где приняты следующие обозначения:  $\alpha_1 = g/l_1 = 9.8 \text{ с}^{-2}$ ;  $\alpha_2 = g/l_2 = 4.9 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta_1 = 1/m_1 l_1^2 = 1 \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$ ;  $\beta_2 = 1/m_2 l_2^2 = 0.25 \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$ ;  $\gamma_1 = K a_1^2 / m_1 l_1 = 2.5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\gamma_2 = K a_2^2 / m_2 l_2 = 2.5 \text{ с}^{-2}$ .

В результате преобразования уравнений (3.29) по Лапласу получим систему уравнений относительно изображений переменных:

$$\begin{aligned} (s^2 - (\alpha_1 - \gamma_1))\theta_1(s) &= \gamma_1\theta_2(s) + \beta_1 u_1(s); \\ (s^2 - (\alpha_2 - \gamma_2))\theta_2(s) &= \gamma_2\theta_1(s) + \beta_2 u_2(s). \end{aligned} \quad (3.30)$$

По алгебраическим уравнениям в причинно-следственной форме (3.30) легко построить модель системы в форме структурной схемы (рис.3.29).

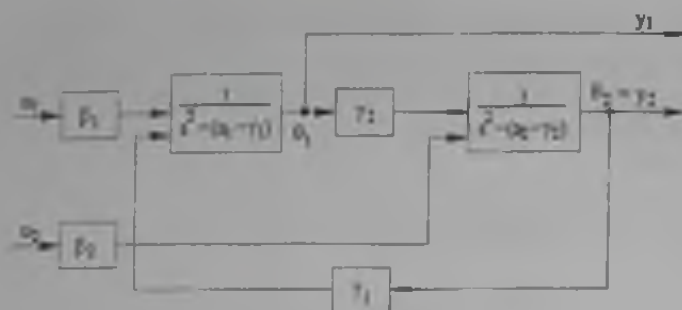


Рис. 3.29. Структурная схема (С-граф) объекта

Характеристический полином исследуемой механической системы имеет вид:

$$D(s) = (s^2 - (\alpha_1 - \gamma_1))(s^2 - (\alpha_2 - \gamma_2)) - \gamma_1\gamma_2 = s^4 - 9.7s^2 + 11.3.$$

Среди корней ХП:  $s_{1,2} = \pm 2.89$ ;  $s_{3,4} = \pm 1.16$  имеются положительные, следовательно, объект неустойчив. Для удержания маятников в верхнем положении равновесия необходимо построить систему автоматической стабилизации.

Допустим, что имеется возможность измерения угловых отклонений маятников  $y_1 = \theta_1$  и  $y_2 = \theta_2$  и оказания на них воздействий  $u_1$  и  $u_2$ .

Аналитический метод синтеза сводится к конструированию наблюдателя и вычислению матрицы коэффициентов регулятора состояния, обеспечивающего заданное расположение корней ХП или минимизирующего квадратичный функционал. Здесь примем частотный метод, связанный с декомпозицией процедуры синтеза.

На этапе топологического синтеза требуется выбрать число регуляторов и места их включения, т.е. подмножество обратных связей, наилучших в принятом смысле. Для рассматриваемого примера исходное множество вариантов включения обратных связей при двух входах  $\{u_1, u_2\}$  и двух выходах  $\{y_1, y_2\}$  содержит  $2^4 - 1 = 15$  элементов. Число требуемых обратных связей заранее неизвестно; задачу стабилизации может решить единственная обратная связь, а может не хватить и всех возможных пар  $(u_i, y_j)$ . Решение может быть не единственным. В силу конечности множества вариантов задача топологического синтеза решается перебором. Вместо простого перебора всех вариантов топологий целесообразно использовать эволюционную процедуру синтеза [10, 11, 13].

Эволюционный синтез предполагает, что на каждой итерации  $\lambda = 1, 2, \dots$ , объект охватывается одной наиболее эффективной обратной связью. Из множества возможных мест включения обратных связей, естественно, наилучшим является то, которое способно обеспечить наибольшее перемещение выбранной группы корней ХП. Выбор критерия оценки потенциальной эффективности вариантов включения стабилизирующей обратной связи базируется на двух соображениях:

- чем больше модуль ФЧ ХП  $T_{\text{тг}}^D(s)$  на некотором интервале значений аргумента  $s$ , тем больше приращение тех корней ХП, модули которых принадлежат этому интервалу;

- поскольку ФЧ  $T_{rq}^D(s)$  не зависит от оператора обратной связи, она может служить оценкой эффективности варианта включения обратной связи до конкретизации ее оператора.

Пусть на  $\lambda$ -ой итерации синтеза ХП системы  $D^{-1}$  имеет подмножество  $\{s_i^{(\lambda)}; i=1,2,\dots\}$  плохих корней и имеется множество  $\{(r, q); r=1,2,\dots; q=1,2,\dots\}$  вариантов включения обратных связей. Критерий топологического синтеза запишется так

$$\max_{(r,q)} \max_i \text{mod } T_{rq}^D(s_i), \quad (3.31)$$

т.е. на каждой итерации выбирается место включения  $(r, q)$ , перемещающее наиболее чувствительные корни.

Упорядочим значения модулей ФЧ  $T_{rq}^D(s_i)$  в матрицу  $T^{(\lambda)}$ , столбцам которой соответствуют номера перемещаемых корней  $i$ , а строкам - варианты включения обратных связей  $(r, q)$ . Декомпозиция задачи достигается, если матрица  $T$  при надлежащей нумерации корней и обратных связей оказывается блочно-диагональной. Декомпозиция оказывается приближенной, если диагональные блоки доминируют.

Вернемся к рассматриваемому примеру. На первой итерации ( $\lambda=1$ ) для выбора обратной связи воспользуемся критерием (3.31), для чего составим матрицу  $T^{(1)}$  в виде табл. 3.1. Выберем обратную связь  $(u_1, y_1)$ , способную перемещать правый корень  $s_1 = 2.89$  в наибольшей степени.

Таблица 3.1

	$s_1 = 2.89$	$s_2 = 1.16$
$T_{11}^D = s^2 - 2.4$	5.95	1.05
$T_{22}^D$	0.263	1.49
$T_{12}^D$	0.626	0.625
$T_{21}^D$	2.50	2.50

Проведем этап структурно-параметрического синтеза. По ЛАЧХ контура можно заметить, что его усиление на частоте перемещаемого корня мало:  $L_{11}(\omega=2.89) = -24$  дБ. Следовательно, замыкание контура единичной обратной связью переместит корень  $s_1$  незначительно. Для обеспечения большей подвижности корня введем усиление  $K_{11} = 100$ .

Процесс формирования желаемой ПФ контура  $W_{11}(s)$  сводится к введению нуля  $z_1 = -5.75$ , в результате чего наклон ЛАЧХ синтезированного контура  $L_{11}(\omega)$  в окрестности частоты среза становится равным  $-20$  дБ/дек. Соответствующий регулятор (ПД) имеет ПФ:



$$W_{\theta_1}^{(1)}(s) = 100(1 + 0.174s).$$

Управляющее воздействие  $u_1$  формируется по переменным состояния первого маятника  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  на основе уравнения:

$$u_1 = 100\theta_1 + 17.4\dot{\theta}_1.$$

Для выполнения условия физической реализуемости регулятора введем в его ПФ полюс  $p_1 = -69$ , т.е. примем:

$$W_{\theta_1}^{(2)}(s) = 100 \frac{1 + 0.174s}{1 + 0.0145s}.$$

Анализ системы с синтезированным регулятором показывает, что ее ХП

$$D^{(1)}(s) = -228.7 - 41.54s + 90.30s^2 + 17.24s^3 + s^4 + 0.0145s^5$$

имеет корни:  $s_{1,2}^{(1)} = -11.4 \pm j 2.92$ ;  $s_3^{(1)} = 1.57$ ;  $s_4^{(1)} = -1.58$ ;  $s_5^{(1)} = -46.4$ . Положительный корень  $s_3^{(1)} = 1.16$  переместился мало - он компенсируется положительным нулем ПФ  $\Phi_{11}(s)$ . Необходима следующая итерация синтеза ( $\lambda = 2$ ).

Наилучшее на этой итерации место (2,2) включения обратной связи выбираем на основе матрицы  $T^{(2)}$  в виде табл.3.2.

Таблица 3.2

	$s_3^{(1)} = 1.57$
$T_{22}^D = 23.2 + 4.32s + 0.25s^2 + 0.0036s^3$	30.6
$T_{21}^D = 2.5 + 0.36s$	2.56
$T_{12}^D = 0.625 + 0.009s$	0.639

На частоте неустойчивого корня  $s_3^{(1)}$  усиление контура равно -26 дБ, поэтому вводим усиление  $K_{22} = 100$ , обеспечивающее необходимую подвижность корня  $s_3^{(2)}$ . На этапе структурно-параметрического синтеза введем нуль  $z_1 = -1.91$  и полюс  $p_1 = -100$ , что обеспечивает типовой вид ЛАЧХ контура. Соответствующая ПФ регулятора имеет вид:

$$W_{\theta_1}^{(3)}(s) = 100 \frac{1 + 0.525s}{1 + 0.01s}.$$

Эта итерация обеспечивает получение устойчивой системы, ХП которой имеет вид:

$$D^{(2)}(s) = 2089 + 1604s + 341.5s^2 + 31.62s^3 + 1.362s^4 + 0.02445s^5 + 0.000145s^6.$$

Его корни:  $s_{1,2}^{(2)} = -11.34 \pm j2973$ ;  $s_3^{(2)} = -2025$ ;  $s_4^{(2)} = -13.18$ ;  $s_5^{(2)} = -46.41$ ;  $s_6^{(2)} = -84.89$ .

На этом можно завершить синтез стабилизирующих обратных связей, если требуется обеспечить только устойчивость системы.

Синтез в частотной области привел к естественному образованию двух подсистем. Представляет интерес анализ степени их динамической взаимосвязи. Роль пружины взаимосвязи маятников (рис.3.28) на структурной схеме (рис.3.29) отражает контур взаимосвязи.

Прежде всего, заметим, что корни ХП автономных маятников (при отсоединении пружины) равны:  $s_{1,2} = \pm 3.13$ ;  $s_{3,4} = \pm 2.21$ . Пружина, их связывающая, несколько их смещает:  $s_{1,2} = \pm 2.89$ ;  $s_{3,4} = \pm 1.16$  (максимальное относительное приращение 47%). Охват объекта контурами стабилизирующих обратных связей приводит к относительному ослаблению контура связи подсистем. Действительно, в синтезированной системе размыкание контура связи (удаление пружины) незначительно меняет корни ХП:  $s_{1,2} = -11.38 \pm j2.93$ ;  $s_3 = -2.036$ ;  $s_4 = -13.08$ ;  $s_5 = -46.41$ ;  $s_6 = -84.89$ . Максимальное изменение составляет 0.5%.

Анализ иллюстрирует известную декомпозирующую роль обратных связей. Полученная система является частично коннективно устойчивой [34] - при топологической вариации - размыкании контура связи подсистем - она не только сохраняет устойчивость, но и качество процессов (робастна).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизированное проектирование систем управления/ Под ред. М. Джамшиди и Ч.Дж. Хергета. - М.: Машиностроение, 1989.
2. Андронов В.Н., Имаев Д.Х. Вопросы построения частных моделей топологически сложных систем управления различных рангов неопределенности//Изв.ЛЭТИ, 1982. Вып.312. С.70-77.
3. Анисимов В.И. Топологический расчет электронных схем. - Л.: Энергия, 1977.
4. Азян Г.К. Расчет автоматических систем с типовыми алгоритмами регулирования: Учебное пособие. - Уфа: Изд. Уфим. нефт. ин-та, 1989.
5. Богданов В.Н., Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б. Диалоговые программы вычисления характеристик структурно-сложных систем управления //Межвуз. сб. науч. тр. /Под ред. Р.И. Сольничева. - Л.: ЛИАП, 1989. С.92-98.
6. Богданов В.Н., Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б., Арендт Р., Ковальски З. Анализ систем управления со сложной структурой с помощью программы CLASSIC для персональных компьютеров/ Микропроцессорные системы контроля и управления//Сб. науч. тр. - Рига: Риж.техн.ун-т, 1992. С.4-13.
7. Вавилов А.А., Имаев Д.Х. Машинные методы расчета систем управления. - Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1981.
8. Гарднер М.Ф., Бернс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах. - М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Имаев Д.Х., Краснопрошина А.А., Яковлев В.Б. Теория автоматического управления. Часть 1. Линейные системы управления. - Киев: Выща школа, 1992.
10. Имаев Д.Х. Анализ и синтез систем управления с применением программы CLASSIC для ПЭВМ: Учебное пособие. - С-Пб: ЭТИ, 1992.
11. Имаев Д.Х., Ковальски З. Частотный метод синтеза структурно-сложных систем управления с помощью программы CLASSIC /Изв.вузов. Приборостроение. Т.37, №7-8, 1994. С.32-37.
12. Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б., Гладких С.Л., Петропавловский А.В. Алгоритм перечисления ненулевых слагаемых определителей разреженных матриц. Изв.ГЭТУ, вып.465, С-Пб, 1994. С.87-91.
13. Имитационное моделирование производственных систем/Под ред.А.А. Вавилова. - М.: Машиностроение; Берлин: Veb Verlag Technik, 1983.
14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
15. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. - М.: Мир, 1973.
16. Расчет систем управления с применением СМ ЭВМ/ В.Н. Андронов, Д.Х. Имаев, Л.Б. Пошехонов и др./Под ред. В.Б. Яковлева. - Л.: ЛЭТИ, 1987.
17. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. - М.: Мир, 1980.
18. Теория автоматического управления/Под ред.А.В. Нетушила. - М.: Высшая школа, 1976.
19. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. / Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1967.
20. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. - М.: Сов.радио, 1972.

21. Фельдбаум А.А. Электрические системы автоматического регулирования. - М.: ГИОП, 1957.
22. Чернецкий В.И., Дидук Г.В., Потапенко А.А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. - Л.: Энергия, 1970.
23. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975.
24. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis / IEEE Trans. on AC. Vol. AC-26, N1, 1981. P.4-15.
25. Kowalski Z., Imajew D., Arendt R. i inni. Cwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki. - Gdansk: PG, 1992.
26. Kowalski Z., Tittenbrun S., Lastowski W.F. Regulacja predkosci obrotowej okretowych silnikow spalinowych. - Gdansk: Wydawnictwo morskie, 1988.
27. Kowalski Z., Imajew D., Arendt R., Poszechonow L. Czesotliwosciowe metody analizy i syntezy ukladow sterowania. - Gdansk: PG, 1996.
28. Matrix, Users Guide. Integrated Systems, Inc. Palo Alto, CA, 1984.
29. Rimer M., Fredenc K. Solutions of the Grumman F-14 Benchmark Control Problem. IEEE Control Systems Magazine, vol.7, N4, 1987. P. 36-39.
30. Rimvall C.M. Computer-Aided Control System Design / IEEE Control Systems. Vol.13, N2, 1993. P.14-16.
31. Rosenbrock H.H. Computer-Aided Control System Design. Academic Press, 1974.
32. Schaufelberger W. Education future of Control Engineering. 11-th IFAC World Congress. - Tallinn, August 13-17, 1990.
33. SIMULINK for Microsoft Windows. User's Guide. The Math Works, Inc., Natic, MA, 1992.
34. Siljak D. Decentralized Control of Complex Systems. - Academic Press, 1991.
35. Thomson P.M. Program CC Tutorial and User's Guide. Systems Technology, Inc., Nawthorne, July, 1989.
36. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. - М.: Наука, 1980.

## Программа CLASSIC для анализа и синтеза систем управления

### Общие сведения о программе

Программа CLASSIC (*Complex Linear Analysis and Structure Synthesis In Control*), версия 1.5 для персональных компьютеров класса IBM PC позволяет строить математические модели, анализировать и синтезировать линейные системы управления со сложной структурой, представленные в форме структурных схем.

Основными особенностями программы являются:

- ориентация на методы классической теории автоматического управления;
- максимальная графичность отображения структур систем и характеристик;
- непосредственный и быстрый расчет характеристик систем по их структурному представлению;
- тесное взаимодействие процедур построения и редактирования моделей, анализа и синтеза;
- удобство исследования влияния вариаций элементов на характеристики систем в целом.

Пользователь этой относительно небольшой по объему программы избавляется от рутинных операций и получает возможность сосредоточиться на содержательных задачах расчета систем управления. Благодаря отсутствию вспомогательных операций в программе значительно сокращено "расстояние" между режимами редактирования моделей и отображения на экране результатов вычислений.

Программа имеет иерархическую систему MENU, а также общий и контекстно-зависимый HELP.

Программа CLASSIC может работать в двух режимах:

- диалоговый (основной);
- демонстрационный.

Программу можно эксплуатировать на компьютерах класса IBM PC, снабженных графическими картами EGA, VGA, Hercules. Целесообразно оснащение компьютеров математическим сопроцессором. Операционная система MS DOS, версии 3.2 и выше. Программа написана на языке C.

Версия 1.5 предназначена для расчета систем первого уровня причинно-следственной интеграции в форме C-графов (подразд.1.4). При разработке программы основное внимание уделено системам со сложной структурой, ретико-графовым формам их описания [7, 13, 22] и алгоритмам их расчета [2, 5, 8, 12, 15, 16, 17].

### Основные правила работы с программой

Для управления программой CLASSiC в основном используются система меню и функциональные клавиши. Независимо от контекста перечисленные ниже клавиши выполняют одни и те же функции:

<F1> - HELP программы; при повторном нажатии этой клавиши на экран выводится информация о способе пользования HELP (HELP on HELP):

<F10> - активизация системы меню;

<Esc> - возврат в предыдущее состояние программы.

Ниже приведено описание работы с версией 1.5 программы CLASSiC в следующих основных режимах:

- ввод/редактирование;
- анализ;
- оптимизация;
- частотный синтез.

Организация программы иллюстрируется на рис.П1.1.

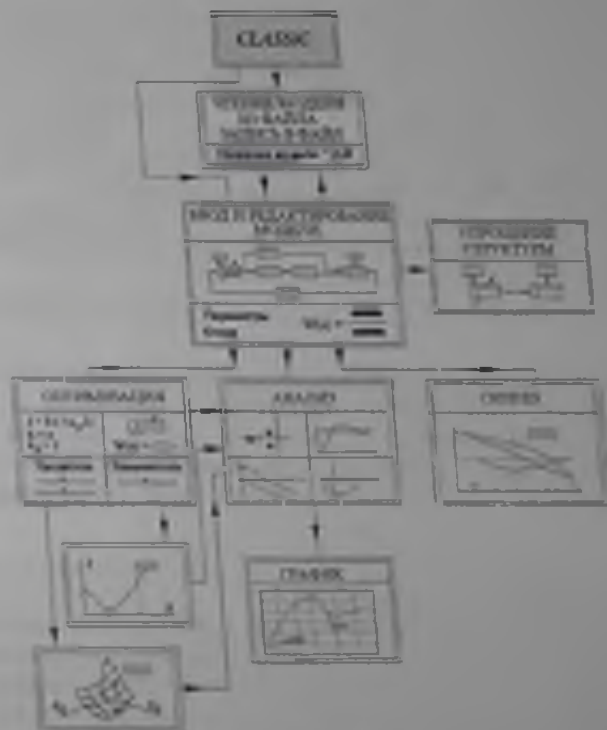


Рис.П1.1

Ниже дано краткое описание основных режимов работы программы.

### Режим "ВВОД / РЕДАКТИРОВАНИЕ"

Построение и редактирование моделей осуществляется как процедура рисования структурной схемы (диаграммы С-графа) системы, т.е. путем размещения звеньев и проведения ориентированных связей между ними.

После вызова программы CLASSiC при нажатии любой клавиши (кроме <F1> - Help, <F10> - меню, <Esc> - возвращение в предыдущее состояние) пользователь входит в данный режим. Ему предлагается либо чтение из файла ранее введенной модели, либо ввод новой модели. В первом случае следует напечатать имя файла (предварительно удалив символ \* - <Backspace>), либо вывести каталог моделей <Enter>. После выбора имени модели (стрелками управления курсором) на экране появится изображение структуры выбранной модели, а пользователь оказывается в режиме редактирования.

В режиме "Ввод/Редактирование" на экране имеются два окна: верхнее - структуры системы (топологии) и нижнее - текущего звена; между окнами возможен циклический переход <Tab> .

В окне структуры появляется мигающий указатель текущего звена, перемещение которого осуществляется клавишами управления курсором. После подведения указателя к любому свободному месту и выбора ориентации <Space> положение нового звена фиксируется <Enter>. Это звено становится текущим, а в нижнем окне появляется его номер. Звенья автоматически нумеруются в порядке их введения, однако номер текущего звена может быть изменен. Каждому звену можно приписать имя или/и изменить номер.

Для ввода и редактирования данных текущего звена необходимо перейти в нижнее окно <Tab>. Возможны переходы между редактируемыми полями: "Номер", "Имя", "Передающая функция" <Enter>.

Ввод и редактирование ПФ звена осуществляются с помощью следующих клавишей:

- переход к редактированию числителя или знаменателя ПФ (стрелки управления курсором <Down> или <Up>);
- переход к редактированию последующего (старшего) или предыдущего (младшего) коэффициентов полинома (<PgUp> или <PgDn>);
- повышение или понижение степени полинома (<Ctrl-PgUp> или <Ctrl-PgDn> ).

Связи между звеньями - горизонтальные и вертикальные отрезки прямых, завершающиеся стрелкой на входе звена.

Вхождение в режим проведения связей осуществляется в окне структуры по клавише <F5>, после чего следует совместить указатель со звеном, из которого требуется провести связь, и зафиксировать его <Enter>. Клавишами управления курсором проводится связь ко входу соответствующего звена. Ошибочно проведенную часть связи можно удалить обратным ходом маркера до момента завершения проведения данной связи.



Для удаления любого текущего звена вместе со связями следует нажать <Del>. Отдельная связь удаляется в режиме <Ctrl-F5> после совмещения мигающего маркера с любой точкой связи и нажатия <Enter>.

Для назначения входа (выхода) системы указатель текущего звена совмещается с входным (выходным) звеном и нажимается клавиша <F7> (<F8>). Любое звено может быть объявлено варьируемым <F6>. Размеры рисунка не ограничиваются полем экрана; при достижении границ окна рисунок автоматически смещается. Размер рисунка можно увеличивать или уменьшать <Grey+> или <Grey>.

### Режим "АНАЛИЗ"

Переход в режим осуществляется по <F9>. После завершения процессов расчета ПФ и характеристик системы по выбранной паре "вход-выход" на экране появляются четыре окна с характеристиками. Любой из графиков может быть выведен на полный экран: размещение нулей и полюсов на комплексной плоскости <Home>; логарифмические ЧХ <End>; переходная характеристика <PgUp>; амплитудно-фазовая ЧХ <PgDn>.

Передаточная функция системы выводится при нажатии <F3>. Для просмотра коэффициентов полиномов числителя и знаменателя используются стрелки - <PgUp>, <PgDn>.

При отображении характеристики на полном экране имеются дополнительные возможности ее изучения и количественной оценки: оцифровка значений абсцисс и ординат любой точки <F3>; выделение фрагмента и редактирование диапазонов <F4>; удвоение числа рассчитанных точек <F5>; введение координатной сетки <F6> и др.

Возможен анализ характеристик любого звена (соответствующий пункт меню "Расчеты").

В режиме "Анализ", если ранее было помечено варьируемое звено, можно исследовать изменение характеристик системы, вызванных вариациями параметров или структуры звена <F5>. После изменения параметров звена или структуры и параметров звена по <Enter> на экран выводятся характеристики номинальной ("исходной") и варьированной ("текущей") систем.

### Режим "ОПТИМИЗАЦИЯ"

В режиме "Оптимизация" решаются задачи параметрического синтеза по функционалам, составленным из интегральных квадратичных оценок. При желании в функционал может быть добавлена установившаяся ошибка системы. Звено, в пространстве параметров которого оптимизируется система, объявляется варьируемым.

После нажатия клавишей <Shift-F9> на экране появляются четыре окна: "Структура системы", где изображен фрагмент структурной схемы системы с варьируемым звеном; "Критерий", где приведен вид обобщенного функционала и поле для задания его весовых коэффициентов; "Числитель" и "Знаменатель".

где назначаются варьируемые коэффициенты полиномов числителя и/или знаменателя ПФ варьируемого звена и задаются границы диапазонов их изменения в процессе оптимизации. Переход между активными окнами экрана осуществляется циклически <Tab>, а переходы между полями коэффициентов - стрелками.

Варьируемые коэффициенты полиномов ПФ помечаются клавишей <F3>; исключение коэффициента из числа варьируемых <Ctrl-F3>.

В режиме "Оптимизация" предусмотрена процедура "Сечения", использование которой позволяет получить на экране график зависимости функционала от значений варьируемых параметров системы. Если назначен один варьируемый параметр, то зависимость представляется графиком на плоскости. При двух варьируемых параметрах программа выводит на экран поверхность в трехмерном пространстве. Если число варьируемых параметров более двух, то, поочередно фиксируя некоторые из них, можно получать на экране различные сечения многомерной поверхности. В любой точке поверхности, указанной маркером, можно провести анализ соответствующей текущей системы <F9>.

Поскольку при построении поверхности отклика отображаются только точки, принадлежащие области устойчивости, границы последней хорошо видны на экране.

Может быть получен график кривой или поверхности, где помечается глобальный минимум функционала качества.

Границы параметров по умолчанию устанавливаются в 1000 раз меньше и больше начального значения, а диапазоны делятся на 20 интервалов в логарифмическом масштабе. Границы могут редактироваться пользователем. Перемещая маркер, можно выбрать любую точку и провести анализ соответствующей текущей системы <F9>.

Поверхность может быть отображена в любом ракурсе, причем вид сверху дает области устойчивости на плоскости параметров. Здесь выясняется существование решения задачи синтеза.

Программа позволяет автоматически найти минимум функционала <F5>. В процессе оптимизации на экран выводятся начальное и текущее значения функционала, а также текущие значения варьируемых параметров.

### Режим "ЧАСТОТНЫЙ СИНТЕЗ"

В этом режиме решаются задачи формирования желаемых ЧХ следящих систем или систем стабилизации неустойчивых (сильно колебательных) объектов, а также определяются ЧХ и ПФ звеньев коррекции.

Звено коррекции необходимо объявить варьируемым. На первой итерации синтеза начальный оператор звена коррекции целесообразно задать  $W_k(s) = 1/1$  (для последовательной коррекции) или  $W_k(s) = 0/1$  (для коррекции местной обратной связью).

После нажатия клавишей <Alt-F9> на экране отображаются ЛАЧХ разомкнутых исходной и текущей систем, фазовая ЧХ текущей системы и ЛАЧХ звена коррекции.

В качестве основного приема изменения ПФ и ЧХ системы с целью получения желаемых характеристик используется домножение ее ПФ в разомкнутом состоянии на элементарные операторы:  $(s+a)/s$ ;  $s/(s+a)$ ;  $(s+a)/a$ ;  $a/(s+a)$  с ЛАЧХ, показанными на рис.П1.2. Перемещая маркер частоты вдоль исходной ЛАЧХ и устанавливая его в выбранную точку, до или после которой должен быть изменен наклон асимптоты ЧХ, нажимаем клавишу <Home>/<End> (изменяются наклоны всех асимптот левее выбранной точки) или <PgUp>/<PgDn> (изменяются наклоны асимптот правее этой точки). В процессе формирования желаемой ЛАЧХ на оси частот отображаются вводимые в ПФ исходной системы нули и/или полюсы (см.рис.П1.2.).

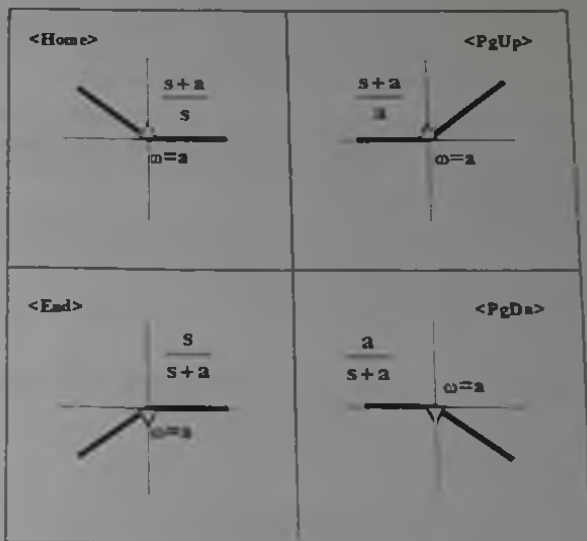


Рис.П1.2

Ранее имеющиеся в ПФ нули или полюсы могут быть удалены путем их компенсации (образования диполей) или применением процедуры удаления всех корней, модули которых больше или меньше значения заданной частоты  $\omega = a$  (на которой в данный момент установлен маркер).

## Практические занятия

### Первое практическое занятие

#### Содержание

Исследование характеристик типовых звеньев систем автоматического регулирования.

#### Основные сведения из теории

Математические модели объектов управления и других функциональных элементов, а также систем автоматического управления в целом часто представляются совокупностью тем или иным образом связанных между собой простейших, типовых звеньев. ПФ любой линейной системы может быть разложена на ПФ ограниченного числа таких звеньев.

Решение предлагаемых ниже задач принципиально не требует использования компьютера, однако при его наличии и установке на нем программы CLASSiC освоение материала будет более эффективным.

**Задача 1.1.** Для безынерционного звена, описываемого уравнением  $y(t) = kf(t)$ , или ПФ  $W(s) = k$  при произвольно выбранном коэффициенте передачи  $k > 0$  определить переходную и частотные характеристики (АФХ и ЛЧХ).

Ответить на следующие вопросы:

- На сколько дБ изменится значение ЛАЧХ, если коэффициент передачи увеличится в 10 раз? Уменьшится в 2 раза? Как влияет значение параметра  $k$  на фазовую характеристику?
- Чему равен коэффициент передачи  $k$ , если значение ЛАЧХ равно  $-20$  дБ?

**Задача 1.2.** Для интегрирующего звена, описываемого ДУ вида

$$T \frac{dy(t)}{dt} = f(t)$$

или ПФ

$$W(s) = \frac{1}{Ts} = \frac{k}{s}$$

с любым положительным значением постоянной времени  $T$  (постоянная интегрирования) построить переходную и частотные характеристики (АФХ и ЛЧХ).

Ответить на следующие вопросы:

- Чему равно значение переходной характеристики  $h(t)$  при  $t = 1$  с?
- Чему равны значения ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  на частоте  $\omega = k = 1/T$ ?
- Как изменяются переходная характеристика и ЛАЧХ при увеличении постоянной интегрирования  $T$  в два раза?
- Чему равна постоянная времени  $T$ , если  $L(\omega = 10 \text{ с}^{-1}) = -20$  дБ?

**Задача 1.3.** Для дифференцирующего звена, описываемого уравнением вида

$$y(t) = T \frac{dy(t)}{dt}$$

или ПФ

$$W(s) = Ts$$

определить (для произвольного значения постоянной  $T$ ) переходную и частотные характеристики (АФХ и ЛЧХ).

Ответить на следующие вопросы:

- Как отражается параметр  $T$  на переходной характеристике звена?
- Как изменятся ЛАЧХ при увеличении (уменьшении) параметра  $T$  в два раза?
- Чему равно значение постоянной времени  $T$ , если  $L(\omega = 2c^{-1}) = 0$  дБ?

**Задача 1.4.** Для аperiodического звена первого порядка, описываемого ДУ вида

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kf(t)$$

или ПФ

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

определить переходную и частотные (АФХ, ЛЧХ) характеристики звена для произвольно выбранных значений  $k$  и  $T$ .

Ответить на следующие вопросы:

- Чему равны значения ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  на частотах  $\omega = 1/T, 0.1/T, 10/T$ ?
- Как отражается на переходной и частотных характеристиках уменьшение (увеличение) постоянной времени  $T$  в 4 раза? Коэффициента передачи  $k$  в 10 раз?
- Чему равно значение постоянной времени  $T$ , при котором для  $\omega < 100$  с<sup>-1</sup> значение  $L(\omega) > -3$ дБ, а значение  $\varphi(\omega) > -45^\circ$ , если коэффициент передачи  $k = 1$ ?

**Задача 1.5.** Для неустойчивых аperiodических звеньев с ПФ вида

$$W_1(s) = \frac{k}{1-Ts}, \quad W_2(s) = \frac{k}{Ts-1}$$

провести исследование в условиях задачи 1.4, ответить на поставленные в этой задаче вопросы. Сравнить характеристики каждого из звеньев с характеристиками устойчивого аperiodического звена первого порядка, а также положение полюсов на комплексной плоскости.

**Задача 1.6.** Для звена второго порядка, описываемого ДУ вида

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kf(t)$$

или ПФ

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

определить переходную и частотные характеристики (АФХ и ЛЧХ) при различных значениях параметров  $T, \xi$

**Указание.** Исследуемое звено качественно изменяет свои характеристики при задании коэффициента демпфирования  $\xi$  в различных диапазонах. Так, при  $\xi \geq 1$  ХП имеет два действительных отрицательных полюса (при  $\xi = 1$  - двукратный действительный полюс) и звено называют аperiodическим второго порядка; при  $0 < \xi < 1$  корни ХП комплексные с отрицательными действительными частями и звено называют колебательным; при  $\xi = 0$  корни чисто мнимые - консервативное звено; при  $\xi < 0$  звено становится неустойчивым.

Провести исследование характеристик звена (с использованием программы CLASSIC).

- Проанализировать движение корней ХП на комплексной плоскости при изменении параметров  $k$  и  $\xi$ .
- Построить график зависимости резонансного пика ЛАЧХ от коэффициента демпфирования в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$  (при любых положительных значениях коэффициента передачи  $k$  и постоянной времени  $T$ ).
- Построить график зависимости резонансной частоты  $\omega_p$  от постоянной времени  $T$ , приняв значение  $\xi = 0.1$ .
- Исследовать характеристики неустойчивого звена, приняв  $\xi = -0.2$ .
- Определить оптимальное значение коэффициента демпфирования  $\xi = \xi_{opt}$  из условия минимума времени  $t_p$  затухания процесса (принять за  $t_p$  время, начиная с которого переходная характеристика остается в пределах  $\pm 5\%$  от установившегося значения). Значения  $k, T$  принять любыми.

Ответить на следующие вопросы:

- Как располагаются на комплексной плоскости корни ХП, если  $\xi = \xi_{opt}$ ? Чему равна высота пика ЛАЧХ?

## Второе практическое занятие

### Содержание

Исследование установившейся реакции динамических звеньев на гармонические входные сигналы. Определение частотных характеристик звеньев способом, близким к экспериментальному. Аналитический расчет частотных характеристик.

### Основные сведения из теории

Установившаяся реакция  $y_p(t)$  устойчивого линейного звена, элемента или системы на гармоническое воздействие

$$f(t) = A_f \sin \omega t$$

представляет собой гармонический сигнал той же частоты  $\omega$ , но, в общем случае, имеет другую амплитуду и сдвиг фазы относительно входных колебаний, т.е.

$$y_y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y).$$

Зависимость амплитуды выходного сигнала  $y_y$  от частоты  $\omega$  (при единичной амплитуде  $A_f = 1$  сигнала на входе) является АЧХ  $A(\omega) = A_y(\omega)$ , а зависимость фазы от частоты (при нулевой фазе входного сигнала) - ФЧХ  $\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega)$ .

Аналитический расчет АЧХ и ФЧХ по ПФ  $W(s)$  сводится к замене аргумента  $s=j\omega$  и выделению модуля и аргумента комплексной функции частоты:

$$W(s)|_{s=j\omega} = W(j\omega) = A(\omega) \exp\{j\varphi(\omega)\};$$

$$A(\omega) = \text{mod } W(j\omega); \varphi(\omega) = \text{arg } W(j\omega).$$

Экспериментальное определение ЧХ устойчивого элемента, объекта управления или системы включает:

- формирование на входе гармонического сигнала выбранной частоты;
- приближенное определение момента времени, начиная с которого можно считать наблюдаемый процесс на выходе установившимся;
- определение амплитуды и фазы (сдвига фаз) установившихся колебаний.

Повторение этого эксперимента необходимое число раз для значений  $\omega = \omega_n$ , принадлежащих диапазону существенных частот, позволяет построить графики АЧХ и ФЧХ.

Описанная процедура эксперимента может быть реализована на компьютере с использованием программы CLASSIC, обеспечивающей в режиме "АНАЛИЗ" возможность получения реакции на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Для формирования гармонического сигнала  $f(t)$  на входе исследуемого звена следует включить дополнительный фильтр с передаточной функцией

$$W_f(s) = sF(s) = \frac{T_f s}{T_f^2 s^2 + 1},$$

где:  $T_f = 1/\omega$ ;  $\omega$  - частота колебаний единичной амплитуды на выходе фильтра.

Сопоставление амплитуд и фаз сигналов на входе и выходе удобно проводить по совмещенным на экране графикам  $f(t)$ ,  $y_y(t)$ . Для этой цели исследуемое звено объявляется варьируемым с исходным оператором  $W(s)=1$ , т.е. выходным сигналом, повторяющим гармонический сигнал на входе. После редактирования ПФ звена (точнее, задания реальных полиномов ее числителя и знаменателя) непосредственно в режиме "АНАЛИЗ" на экране дисплея в окне временных характеристик получим совмещенные графики  $f(t)$ ,  $y(t)$ . Вывод этих графиков на полный экран и выбор необходимых пределов изменения переменных (в особенности  $t$ ) позволит получить значения АЧХ и ФЧХ на частотах  $\omega = 1/T_f$ .



**Задача 2.1.** Для устойчивого апериодического звена первого порядка, имеющего ПФ вида

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

с произвольными параметрами  $k, T$  получить с использованием программы *CLASSiC* и описанного выше способа значения АЧХ и ФЧХ на частотах  $\omega = 0.1/T; 0.5/T; 1/T; 2/T; 10/T$ .

Ответить на следующие вопросы:

- Как связано время, начиная с которого можно считать процесс на выходе звена установившимся (при гармоническом сигнале на входе) со значением постоянной времени  $T$ ? С частотой колебаний  $\omega$  на входе?
- Какова относительная ошибка определения значений АЧХ и ФЧХ этим способом?

**Задача 2.2.** Для устойчивого звена второго порядка с ПФ вида

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

с произвольными параметрами  $k, T, 0 < \xi < 1$  получить с использованием программы *CLASSiC* и описанного выше способа значения АЧХ и ФЧХ для нескольких значений частоты из диапазона  $[0.1/T; 10/T]$ . Найти резонансную частоту и высоту резонансного пика АЧХ при значениях коэффициента демпфирования  $\xi = 0.7; 0.1; 0.05$ .

Ответить на следующие вопросы:

- Чему равно время, необходимое для практического затухания переходного процесса для каждого из значений частоты колебаний на входе? Какому числу периодов колебаний приближенно равно это время?
- Каков характер переходных процессов по огибающей?

## Третье практическое занятие

### Содержание

Исследование характеристик систем, образованных последовательным и параллельным соединениями звеньев в корневой, временной и частотной областях.

### Основные сведения из теории

Соединение нескольких звеньев можно заменить одним эквивалентным звеном, ПФ которого  $W_s(s)$  равна ПФ соединения.

Эквивалентная ПФ системы, образованной последовательным соединением двух звеньев (рис. П2.1), равна произведению их ПФ, т.е.

$$W_y(s) = W_1(s)W_2(s).$$



Рис.П2.1

Если записать передаточные функции отдельных звеньев в виде отношений полиномов:

$$W_1(s) = \frac{B_1(s)}{D_1(s)}; \quad W_2(s) = \frac{B_2(s)}{D_2(s)},$$

то эквивалентная ПФ будет равна:

$$W_3(s) = \frac{B_3(s)}{D_3(s)} = \frac{B_1(s) B_2(s)}{D_1(s) D_2(s)}.$$

Таким образом, ХП соединения равен произведению ХП звеньев

$$D_3(s) = D_1(s) D_2(s),$$

а множество его корней равно объединению подмножеств корней ХП звеньев.

Эквивалентная ПФ системы, образованной параллельным соединением звеньев (рис.П2.2), равна сумме ПФ звеньев, т.е.

$$W_3(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{B_3(s)}{D_3(s)} = \frac{B_1(s) D_2(s) + B_2(s) D_1(s)}{D_1(s) D_2(s)}.$$

Таким образом, как и при последовательном соединении эквивалентный ХП равен произведению ХП звеньев.

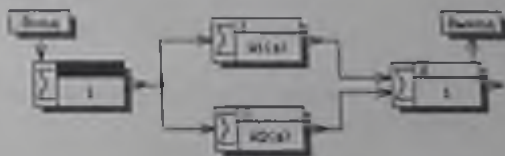


Рис.П2.2

**Задача 3.1.** Определить характеристики в корневой, временной и частотной областях последовательного соединения двух устойчивых апериодических звеньев первого порядка со следующими параметрами:  $k_1=1$ ;  $T_1=1с$ ;  $k_2=2$ ;  $T_2=2с$ .

Рассчитать параметры  $k$ ,  $T$ ,  $\xi$  ПФ эквивалентного звена второго порядка, записанной в виде:

$$W_3(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

Ответить на следующие вопросы:

- Какой вид имеет асимптотическая ЛАЧХ соединения?
- Как изменяются временная и частотная характеристики апериодического звена первого порядка при последовательном включении второго звена того же типа?
- Какое из двух звеньев оказывает основное влияние на длительность затухания переходного процесса?

**Задача 3.2.** Определить характеристики в корневой, временной и частотной областях последовательного соединения звеньев с ПФ

$$W_1(s) = \frac{2}{2s^2 + 3s + 1}, \quad W_2(s) = s + 1$$

Ответить на следующие вопросы:

- Какому звену соответствуют переходная и частотные характеристики соединения?
- Является ли система второго порядка с ПФ  $W_2(s)$  полностью управляемой и наблюдаемой?

**Задача 3.3.** Определить характеристики в корневой, временной и частотной областях звена с ПФ вида

$$W_1(s) = \frac{2}{2s^2 + s - 1}$$

Рассчитать ПФ  $W_2(s)$  звена, последовательное включение которого со звеном  $W_1(s)$  компенсирует его правый полюс.

Ответить на следующие вопросы:

- Как проявляются свойства неустойчивой части в последовательном соединении звеньев на характеристики соединения в целом с ПФ  $W_2(s)$ ?
- Как отражается на характеристиках соединения с ПФ  $W_2(s)$  в корневой, временной и частотной областях неполная компенсация неустойчивого полюса ПФ  $W_1(s)$ ?

**Задача 3.4.** Найти ПФ  $W(s)$  типовых звеньев, параллельные соединения которых описываются эквивалентными ДУ вида:

$$y(t) = k \left[ f(t) + T_D \frac{df(t)}{dt} \right]$$

$$y(t) = kf(t) + \frac{1}{T_M} \int_0^t f(\tau) d\tau;$$

$$y(t) = kf(t) + \frac{1}{T_M} \int_0^t f(\tau) d\tau + T_D \frac{df(t)}{dt}.$$

Определить характеристики эквивалентных звеньев в корневой, временной и частотной областях. Построить их асимптотические ЛАЧХ.

**Указание.** При применении программы CLASSIC для расчета характеристик параллельного соединения звеньев необходимо использовать исходную структурную схему (рис.П2.2), включающую два дополнительных звена с единичными операторами для разветвления воздействия и "чистого" суммирования сигналов на выходе.

### Четвертое практическое занятие

#### Содержание

Исследование характеристик систем с обратной связью в частотной области. Приближенное построение частотных характеристик замкнутых систем по ЧХ звеньев.

#### Основные сведения из теории

ПФ системы с отрицательной обратной связью (рис.П2.3а) выражается через ПФ звеньев следующим образом:

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \quad (1)$$

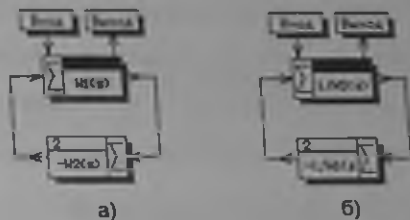


Рис.П2.3

Передаточная функция разомкнутого контура равна произведению ПФ звеньев, образующих этот контур, т.е.

$$W_0(s) = W_1(s)W_2(s). \quad (2)$$

ЧХ замкнутой или разомкнутой систем получают заменой в (1) или (2) аргумента  $s = j\omega$ ;  $\omega \geq 0$ .

Если для некоторого множества (диапазона) частот  $\Omega$ , контур имеет большое усиление, т.е.

$$\forall \omega \in \Omega_1 : |W_0(j\omega)| \gg 1,$$

то, как это следует из (1), ЧХ замкнутой системы приближенно равна

$$\Phi(j\omega) \approx 1/W_2(j\omega), \quad (3)$$

т.е. по отношению к входным сигналам, спектры которых принадлежат диапазону  $\Omega_1$ , свойства замкнутой системы в основном определяются характеристиками звена обратной связи.

В случае единичной отрицательной обратной связи, т.е. при

$$W_2(s) = 1$$

будем иметь

$$\forall \omega \in \Omega_1: \Phi(j\omega) \approx 1,$$

т.е. такая система воспроизводит входные сигналы со спектром из  $\Omega_1$  с малой ошибкой.

В том случае, когда усиление контура велико за счет большого усиления звена обратной связи, коэффициент передачи замкнутой системы мал. Действительно, как это ясно из (3), при больших значениях  $|W_2(j\omega)|$ , значения  $|\Phi(j\omega)|$  будут малыми, т.е. выход системы инвариантен к внешним сигналам соответствующего спектра.

Если для множества частот  $\Omega_2$  контур имеет малое усиление

$$\forall \omega \in \Omega_2: |W_0(j\omega)| \ll 1,$$

то, как это следует из (1), ЧХ замкнутой системы приближенно равна ЧХ звена прямого пути

$$\Phi(j\omega) \approx W_1(j\omega),$$

т.е. в диапазоне частот, где усиление контура мало, обратная связь практически не оказывает влияния на характеристики системы.

Можно считать усиление контура достаточно большим (в указанном выше смысле), если

$$|W_0(j\omega)| \geq 10; L_0(\omega) = 20 \lg |W_0(j\omega)| \geq 20 \text{ дБ},$$

и малым, если

$$|W_0(j\omega)| \leq 0,1; L_0(\omega) \leq -20 \text{ дБ}.$$

**Задача 4.1.** Для системы, структурная схема которой имеет вид рис. П2.3а, с ПФ звеньев:

$$W_1(s) = k/s; \quad W_2(s) = 1$$

определить диапазоны частот  $\Omega_1, \Omega_2$  (коэффициент передачи  $k$  принимается любым) и построить в этих диапазонах приближенные ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой системы.

Ответить на следующие вопросы:

- Внешние сигналы какого спектра воспроизводятся системой практически без искажений?
- Каков спектр внешних сигналов, которые практически не пропускаются системой?
- Какому типовому звену эквивалентна замкнутая система? Каковы параметры эквивалентной ПФ  $\Phi(s)$ ?
- Какой вид имеют точные ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой и разомкнутой систем?

**Указание.** Для ответа на последний вопрос удобно воспользоваться режимом анализа вариаций программы CLASSiC, дающим возможность совместного отображения на экране ЧХ разомкнутой и замкнутой систем. Звено обратной связи объявляется варьируемым с двумя вариантами ПФ:  $W_2(s) = 0$  (разомкнутая система);  $W_2(s) = -1$  (замкнутая система).

**Задача 4.2.** Для системы, структурная схема которой имеет вид рис.П2.3а с ПФ звеньев:

$$W_1(s) = k, \quad W_2(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

где  $T$  - постоянная времени, имеющая любое значение, определить величину коэффициента передачи  $k$ , при котором замкнутая система в диапазоне  $\Omega_1$ :  $0.1/T < \omega \leq 10/T$  шириной в две декады имеет ЧХ, близкие к ЧХ пропорционально-дифференцирующего звена, т.е.

$$\forall \omega \in \Omega_1: \Phi(j\omega) \approx 1 + j\omega T.$$

Ответить на вопросы:

- Каково значение имеет коэффициент передачи замкнутой системы?
- Начиная с какого значения частоты  $\omega$  ЧХ замкнутого контура (ЛАЧХ и ЛФЧХ) существенно отличаются от ЧХ пропорционально-дифференцирующего звена? Как связано это значение частоты с параметрами  $k$ ,  $T$ ?

**Задача 4.3.** Доказать аналитически эквивалентность двух систем, структурные схемы которых приведены на рис.П2.3 при любых ПФ  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Обосновать результаты решения задачи 4.2, используя эквивалентное представление заданной системы в виде рис.П2.3б и приведенные выше сведения из теории.

**Указание.** Для проверки правильности найденных решений задач и их обоснования целесообразно использование программы CLASSiC в режиме "Анализ".

## Пятое практическое занятие

### Содержание

Исследование характеристик систем с обратной связью в корневой, временной и частотной областях. Устойчивость замкнутых систем с отрицательной обратной связью.

### Основные сведения из теории

Обратные связи широко используются для целенаправленного изменения характеристик (свойств) физических элементов и систем управления. Целью этого занятия является изучения влияния обратной связи на характер собственных движений системы.

Рассмотрим замкнутую систему (рис.П2.4а) с отрицательной обратной связью.

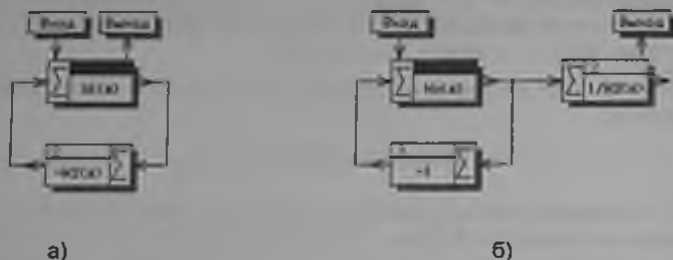


Рис.П2.4

Путем эквивалентного преобразования исходную структурную схему можно привести к виду, показанному на рис.П2.4б, где:

$$W_0(s) = W_1(s)W_2(s). \quad (4)$$

Модель системы представляет собой последовательное соединение контура с единичной отрицательной обратной связью и звена с ПФ  $1/W_2(s)$ . Предполагая, что материал третьего практического занятия уже освоен, здесь можно ограничиться рассмотрением характеристик только замкнутого контура (системы с единичной отрицательной обратной связью).

Как известно, характер собственных движений и устойчивость линейной динамической системы определяются только корнями ХП.

Для системы без контуров, т.е. только с последовательным или параллельным соединением звеньев, множество корней ее ХП является объединением подмножеств корней ХП этих звеньев. Если же соединения звеньев образуют контуры, то корни ХП в общем случае отличаются от корней ХП звеньев.

Запишем ПФ разомкнутой системы в виде:

$$W_0(s) = kW_0^*(s) = \frac{kB_0^*(s)}{D_0(s)}, \quad (5)$$

где  $k>0$  - коэффициент передачи. Пусть степень полинома числителя не превышает степени полинома знаменателя.

ПФ замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью равна:

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{kW_0^*(s)}{1+kW_0^*(s)} = \frac{kB_0^*(s)}{D_0(s) + kB_0^*(s)}, \quad (6)$$

а ее ХП определяется выражением:

$$D(s) = D_0(s) + kB_0^*(s). \quad (7)$$

Корни ХП  $D(s)$  замкнутой системы в общем случае могут значительно отличаться от корней ХП  $D_0(s)$  разомкнутой системы, причем, как это видно из (7), чем выше усиление контура (чем больше коэффициент передачи  $k$ ), тем больше будет это отличие.



Отдельные корни ХП  $D_0(s)$ , число которых равно числу корней полинома  $D(s)$ , после замыкания системы перемещаются на комплексной плоскости по-разному. Подвижность каждого корня зависит от усиления контура на частоте, равной модулю этого корня и от наличия близкого нуля ПФ  $W_0(s)$ . Здесь можно выделить следующие две группы корней ХП  $D(s)$ :

- корни, приближенно равные тем нулям ПФ  $W_0(s)$  разомкнутой системы (если такие нули, т.е. корни полинома  $B_0(s)$  имеются), модули которых принадлежат области частот, где усиление контура велико, т.е.

$$|W_0(j\omega)| > 10, L_0(\omega) > 20 \text{ дБ}$$

- корни, приближенно равные тем полюсам ПФ  $W_0(s)$  разомкнутой системы (корням ХП  $D_0(s)$ ), модули которых принадлежат области частот, где усиление контура мало, т.е.

$$|W_0(j\omega)| < 0.1, L_0(\omega) < -20 \text{ дБ.}$$

Если полиномы  $B_0^*(s), D_0(s)$  ПФ разомкнутой системы имеют нетривиальный общий делитель, т.е. имеются нули ПФ  $W_0(s)$ , совпадающие с ее полюсами (диполи), то среди полюсов ПФ  $\Phi(s)$  будут полюсы, в точности равные этим нулям. Т.е. при замыкании системы такие полюсы ПФ  $W_0(s)$  остаются неподвижными.

Как известно, общим условием устойчивости линейной системы (затухания собственных движений) является отрицательность действительных частей всех корней ее ХП. Необходимым условием является положительность всех коэффициентов ХП (для систем первого и второго порядков это условие является и достаточным).

Для исследования устойчивости замкнутых систем, порядок ХП  $D(s)$  которых  $n > 2$ , используются алгебраические или частотные критерии.

Так, например, алгебраический критерий Гурвица для систем третьего порядка с ХП

$$D(s) = d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0,$$

определяет дополнительное условие устойчивости в виде неравенства:

$$d_1 d_2 > d_0 d_3$$

Если в этом выражении поставить знак равенства, то получим условие, при котором система находится на границе устойчивости (например, значение  $k = k_{кр}$  при котором ХП (7) имеет пару чисто мнимых корней).

Для исследования устойчивости замкнутых систем можно также использовать частотный критерий Найквиста.

**Задача 5.1.** Для системы с единичной отрицательной обратной связью и ПФ прямого пути, равной

$$W_0(s) = k/s,$$

показать положение корня ХП  $D(s)$  на комплексной плоскости при различных значениях коэффициента передачи  $k \geq 0$ .

Ответить на вопросы:

- Какой вид имеет траектория корня системы при изменении  $k$ ?
- Как изменяются переходная и частотные характеристики системы при увеличении  $k$ ?

**Задача 5.2.** Для системы из задачи 5.1 с ПФ вида

$$W_0(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)}$$

построить корневой годограф при изменении  $k$  от нуля до бесконечности. Привести ПФ замкнутой системы к типовому виду, используемому в задаче 1.6, определить параметры  $T$ ,  $\xi$  этой ПФ для  $k = 10$ ,  $T_1 = 1$  с.

Ответить на вопросы:

- Как будут располагаться на комплексной плоскости корни ХП  $D(s)$  при  $k < 0$ ?
- Как изменяется переходная характеристика замкнутой системы при изменении коэффициента  $k$  в диапазонах  $0 < k < \infty$ ?

**Задача 5.3.** Для той же системы при ПФ в разомкнутом состоянии, равной

$$W_0(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}; \quad T_1 = 1\text{с}; \quad T_2 = 2\text{с}$$

построить траекторию корней при изменении  $k$ . Определить критическое значение  $k_{кр}$ , при котором замкнутая система находится на границе устойчивости. Исследовать временные и частотные характеристики замкнутой системы при  $k = k_{кр}$ ;  $k = 0.8k_{кр}$ ;  $k = 0.5k_{кр}$ .

Ответить на вопросы:

- Какой вид имеют ЧХ системы в разомкнутом состоянии при  $k = k_{кр}$ ?
- Чему равны запасы устойчивости замкнутой системы по амплитуде  $\Delta L$  и по фазе  $\Delta \varphi$  при  $k = 0.5k_{кр}$ ;  $k = 0.8k_{кр}$ ?

**Задача 5.4.** В системе из задачи 5.3 ввести в прямую цепь последовательно дополнительное звено с ПФ  $W(s) = \tau s + 1$ . Для характеристического полинома замкнутой системы, имеющего вид:

$$D(s) = 2s^3 + 3s^2 + (k\tau + 1)s + k,$$

построить корневой годограф при изменении  $k$  в диапазоне  $0 \leq k < \infty$ , приняв  $\tau = T_1 = 1$  с.

Ответить на вопросы:

- Чем объясняется неподвижность одного из корней ХП?
- Как проявляется на временных и частотных характеристиках замкнутой системы наличие неподвижного корня ХП?
- Как объяснить характер траекторий подвижных корней ХП  $D(s)$  при изменении  $k$ ?

**Задача 5.5.** Принять ПФ  $W(s)$  в виде:

$$W_0(s) = \frac{30(1+s)}{s(1+2s)(1+0.1s)(1+0.005s)}$$

Используя изложенную выше методику оценки подвижности корней, использующую ЛАЧХ разомкнутой системы  $L_0(\omega)$ , определить области частот  $\Omega_1$  (усиление контура велико),  $\Omega_2$  (усиление контура мало) и приближенные значения отдельных корней ХП замкнутой системы, которые принадлежат этим областям. Найти точные значения корней ХП и оценить эффективность методики для рассматриваемого примера.

## Шестое практическое занятие

### Содержание

Исследование типовых установившихся режимов систем автоматического регулирования. Определение установившихся ошибок систем с обратной связью при степенных и гармонических воздействиях.

### Основные сведения из теории

Одним из показателей качества систем автоматического регулирования является величина установившейся ошибки в различных типовых режимах, характеризующая точность воспроизведения задающего воздействия  $g(f)$  после затухания переходных процессов.

Структурная схема одноконтурной системы, образованной последовательным соединением регулятора (звено 1) и объекта (звено 2), охваченных отрицательной обратной связью (звено 3), изображена на рис. П2.5. Введенные дополнительно звенья с единичными операторами выполняют роль сумматоров. На схеме:  $g(f)$  - задающее (управляющее) воздействие,  $f(f)$  - возмущающее воздействие, приведенное к выходу системы.

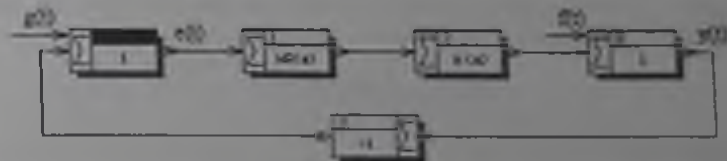


Рис. П2.5

Переменная выхода системы  $y(f)$  должна воспроизводить задающее (управляющее) воздействие  $g(f)$  (ковариантность с задающим воздействием) и не зависеть от возмущения  $f(f)$  (инвариантность к возмущающему воздействию). Для переменной ошибки

$$e(f) = g(f) - y(f)$$

это равносильно требованию инвариантности к тому и другому воздействиям.

Изображение переменной  $e(t)$  по Лапласу равно

$$E(s) = G(s)\Phi_{\text{ог}}(s) + F(s)\Phi_{\text{эф}}(s), \quad (8)$$

где ПФ системы по ошибке от задающего  $\Phi_{\text{ог}}(s)$  и возмущающего  $\Phi_{\text{эф}}(s)$  воздействий определяются выражением

$$\Phi_{\text{ог}}(s) = -\Phi_{\text{эф}}(s) = \frac{1}{1+W_0(s)}, \quad (9)$$

в котором  $W_0(s) = W_R(s)W(s)$  - ПФ разомкнутого контура.

Поскольку ПФ  $\Phi_{\text{ог}}(s)$  и  $\Phi_{\text{эф}}(s)$  отличаются только знаком, достаточно рассмотрения только одного из каналов, т.е. одной составляющей ошибки в выражении (8), например первой, положив

$$E(s) = G(s)\Phi_{\text{ог}}(s). \quad (10)$$

При анализе точности установившихся режимов систем автоматического регулирования обычно рассматриваются следующие типовые воздействия:

- степенные

$$g(t) = \frac{g_0}{\lambda!} t^\lambda, \quad G(s) = \frac{g_0}{s^{\lambda+1}}, \quad \lambda = 0, 1, \dots; \quad (11)$$

- гармоническое

$$g(t) = A_g \sin t, \quad G(s) = \frac{A_g \omega}{\omega^2 + s^2}. \quad (12)$$

Изображение переменной ошибки при степенном воздействии на систему с учетом (9), (10), (11) равно:

$$E(s) = \frac{g_0}{s^{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{1+W_0(s)}. \quad (13)$$

Допустим, что ПФ разомкнутого контура имеет нулевые полюсы, т.е. объект и/или регулятор содержат  $\nu$  интеграторов, т.е.

$$W_0(s) = \frac{1}{s^\nu} W_0^*(s). \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим:

$$E(s) = g_0 \frac{s^{\nu-\lambda-1}}{s^\nu + W_0^*(s)}$$

Установившаяся ошибка может быть определена с использованием теоремы о конечном значении оригинала, т.е.

$$e_y = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu-\lambda}}{s^\nu + W_0^*(s)}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что величина установившейся ошибки системы при степенных воздействиях зависит от соотношения числа интеграторов  $\nu$  и степени воздействия  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} e_y &= 0 && \text{при } \nu > \lambda; \\ e_y &= g_0/k && \text{при } \nu = \lambda \neq 0; \\ e_y &= g_0/(1+k) && \text{при } \nu = \lambda = 0; \\ e_y &\rightarrow \infty && \text{при } \nu < \lambda; \end{aligned} \quad (16)$$

где  $k = W_0(0)$  - коэффициент передачи контура.

При использовании выражений (16) следует иметь в виду структуру рассматриваемой системы и точки приложения воздействий. Изменение точки приложения возмущения  $f(t)$  требует уточнения этих соотношений.

Точность установившегося режима системы при гармоническом воздействии (12) с частотой  $\omega_0$  определяется амплитудой ошибки  $A_e$ , равной

$$A_e = A_g |\Phi_{eg}(j\omega_0)|$$

где  $|\Phi_{eg}(j\omega_0)|$  - значение АЧХ замкнутой системы по ошибке на частоте воздействия. Общее выражение для АЧХ рассматриваемой системы из (9) имеет вид:

$$|\Phi_{eg}(j\omega)| = \frac{1}{|1 + W_0(j\omega)|}$$

Если усиление контура на частотах, принадлежащих диапазону  $\Omega_1$ , велико ( $L_0(\omega) > 20$  дБ) и  $\omega_0 \in \Omega_1$ , то:

$$|\Phi_{eg}(j\omega)| \approx 1/|W_0(j\omega)|;$$

$$A_e \approx \frac{A_g}{|W_0(j\omega_0)|}, \quad (17)$$

т.е.  $A_e \ll A_g$ .

Для диапазона  $\Omega_2$ , где усиления малы ( $L_0(\omega) < -20$  дБ)

$$|\Phi_{eg}(j\omega)| \approx 1 \quad (18)$$

т.е.  $A_e \approx A_g$ , и переменная ошибки в установившемся режиме практически повторяет внешнее воздействие.

Из выражения (17) для установившейся ошибки следует, что повышение усиления контура  $|W_0(j\omega_0)|$  на частоте воздействия уменьшает амплитуду ошибки и, в частности, при условии

$$|W_0(j\omega_0)| \rightarrow \infty$$

Для системы с  $\nu \geq 1$  интегрирующими звеньями ПФ разомкнутого контура имеет вид выражения (14), т.е. усиление контура на нулевой частоте стремится в бесконечность:

эта ошибка равна нулю (свойство селективной абсолютной инвариантности системы). Нетрудно заметить, что вариации параметров системы и изменение амплитуды воздействия не нарушают это свойство, т.е. такая система является грубой.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |W_0(j\omega)| = \infty^{\nu},$$

что также обеспечивает селективную абсолютную инвариантность (нулевую установившуюся ошибку) при степенных воздействиях (11) порядка  $\lambda < \nu$ .

На основании изложенного нетрудно заметить, что для селективной абсолютной инвариантности необходимо, чтобы в составе полюсов ПФ  $W_0(s)$  были полюсы изображения воздействия той же кратности.

**Задача 6.1.** Для системы, структурная схема которой приведена на рис.П2.5 с ПФ

$$W(s) = \frac{1}{(1+Ts)^3}; \quad W_R(s) = K_R; \quad T = 0.1c; K_R = 2,$$

определить установившуюся ошибку: при ступенчатом воздействии  $f(t) = f_0 1(t)$ ; при линейном воздействии  $g(t) = g_0 \cdot t$  (принять значения  $f_0 = g_0 = 1$ ).

Ответить на вопросы:

- Какой порядок астатизма имеет система?
- Какой параметр ПФ  $W_0(s)$  определяет величину установившейся ошибки по возмущению?
- В чем заключается противоречивость требований к малости установившейся и переходной составляющих ошибки системы?
- Какое минимальное значение установившейся ошибки по возмущению заданного вида можно обеспечить в этой системе?

**Задача 6.2.** Для системы со структурной схемой из задачи 6.1 принять:

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}; \quad W_R(s) = \frac{k_R(1+T_I s)}{s}$$

что соответствует ПИ-закону регулирования. Определить параметры настройки регулятора (коэффициент передачи  $k_R$  [с<sup>-1</sup>] и время издрорма  $T_I$  [с]), обеспечивающие устойчивость замкнутой системы. Построить зависимость установившейся ошибки при параболическом воздействии  $g(t) = 0.5 \cdot t^2$  от коэффициента  $k_R$ .

Ответить на вопросы:

- Какое минимальное значение установившейся ошибки по заданному воздействию заданного вида можно обеспечить в этой системе?
- Как изменяется характер переходного процесса в системе на воздействии  $g(t) = 0.5 t^2$  при возрастании коэффициента  $k_R$ ?
- Каким будет установившийся режим в системе при выборе  $T_I = 1c$ ?

**Задача 6.3.** Для той же системы с ПИ-регулятором (см. ПФ  $W_R(s)$  в задаче 6.2) и ПФ объекта:

$$W(s) = \frac{1}{(10s+1)(0.01s+1)}$$

принять параметры настройки  $K_R = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_n = 1 \text{ с}$ . Используя выражения (17), (18), определить диапазоны частот задающего гармонического воздействия  $g(t)$ , для которых относительная амплитуда установившейся ошибки  $A_e/A_0 \leq 0.01$ ;  $A_e/A_0 \approx 1$ . Определить абсолютные значения амплитуды ошибки  $A_e$  для двух значений частоты  $\omega_0$  воздействия в каждом из диапазонов, приняв  $A_0 = 1$ .

Ответить на вопросы:

- Какой порядок астатизма имеет система?
- Какой вид имеет АЧХ (ЛАЧХ) замкнутой системы по ошибке?
- Как изменятся рассчитанные диапазоны частот при увеличении (уменьшении)  $k_R$  в 10 раз?

**Задача 6.4.** Для системы из задачи 6.3 определить установившуюся ошибку при экспоненциальном воздействии

$$g(t) = \exp\{-0.1 \cdot t\}, \quad G(s) = \frac{1}{s + 0.1}$$

Объяснить результат.

Ответить на вопросы:

- Какой характер имеет реакция системы на такое воздействие?
- Какой будет величина установившейся ошибки, если регулятор реализует -закон, т.е.  $W_R(s) = k_R$ ?

**Задача 6.5.** Чему равна установившаяся ошибка в системе из задачи 6.3 при возмущающем воздействии вида

$$f(t) = 1 - \exp\{-0.1 \cdot t\}, \quad F(s) = \frac{1}{s(s + 0.1)}$$

при использовании П- и ПИ-регулятора? Численное значение коэффициента  $k_R$  принять равным 100. Объяснить результат.

**Задача 6.6.** Определить установившуюся ошибку системы в условиях задачи 6.5, если возмущающее воздействие того же типа действует на входе объекта. Объяснить результат.

## Седьмое практическое занятие

### Содержание

Анализ качества переходных процессов в системах автоматического регулирования. Определение прямых и косвенных показателей качества.

### Основные сведения из теории

Для оценки качества систем автоматического регулирования в переходном режиме используются различные показатели, оценивающие форму процессов, их колебательность, время протекания.

Прямые показатели качества определяются непосредственно по кривой переходного процесса при типовом внешнем воздействии или (при его отсутствии) для ненулевых начальных условий. Косвенные показатели оценивают качество по расположению корней ХП системы или нулей и полюсов ее ПФ на комплексной плоскости (корневые показатели качества), по ЧХ системы при разомкнутой или замкнутой обратной связи (частотные показатели качества), по величине интегралов от временных характеристик того или иного вида.

Прямые показатели качества - время переходного процесса (время регулирования)  $t_p$  и перерегулирование  $\sigma\%$  определяются по реакции системы  $y(t)$  на ступенчатое воздействие  $g(t) = g_0 1(t)$ , вид которой показан на рис. П2.6.

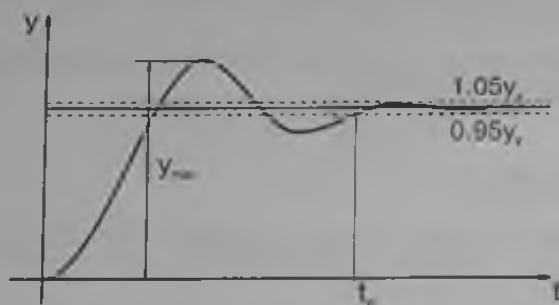
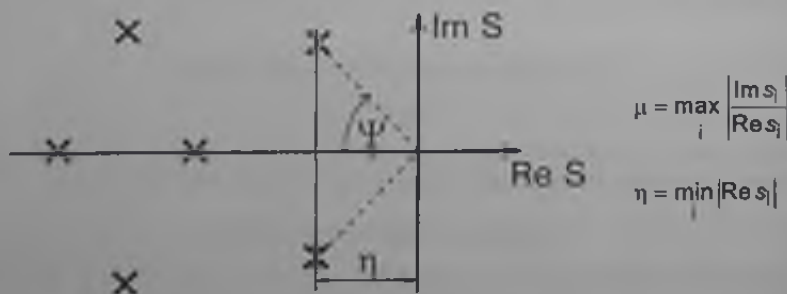


Рис. П2.6

Время регулирования  $t_p$  определяется по моменту вхождения кривой в пятипроцентную зону от установившегося значения. Перерегулирование находится из выражения  $\sigma = (y_{\max} - y_{уст}) / y_{уст} \cdot 100\%$ .

Косвенные показатели качества, определяемые по расположению корней ХП системы на комплексной плоскости. В число основных оценок входят степень устойчивости (быстродействие)  $\eta$  и колебательность  $\mu$  - рис. П2.7.



$$\mu = \max_i \left| \frac{\text{Im } s_i}{\text{Re } s_i} \right|$$

$$\eta = \min_i |\text{Re } s_i|$$

Рис. П2.7



Косвенные показатели качества устойчивой замкнутой системы, определяемые по ее ЛЧХ в разомкнутом состоянии: запас устойчивости  $\Delta L$  по амплитуде, запас устойчивости  $\Delta \varphi$  по фазе и частота среза  $\omega_{ср}$  (рис.П2.8).

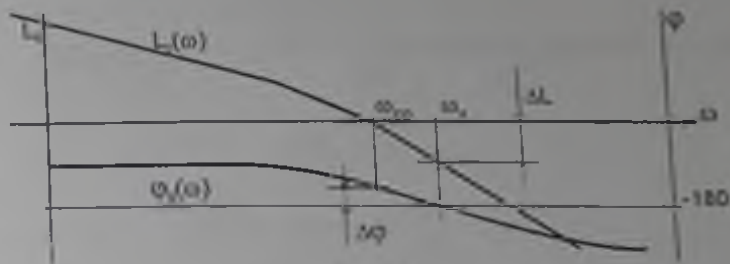


Рис.П2.8

Косвенные показатели качества, определяемые по АЧХ замкнутой системы. Оценками качества являются - резонансная частота  $\omega_p$ , показатель колебательности  $M$  (рис.П2.9).

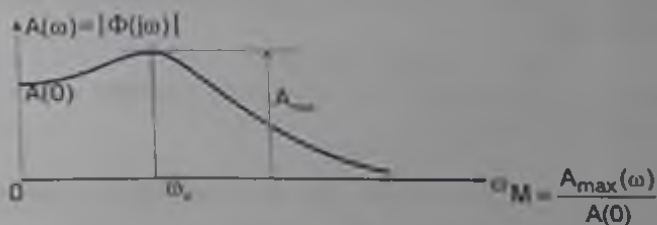


Рис.П2.9

Интегральные показатели качества представляют собой значения определенных интегралов от тех или иных функций переходной составляющей ошибки  $e_n(t)$ . Наиболее простыми и широко распространенными интегральными оценками являются:

- интегральная квадратичная оценка (ИКО)

$$I_0 = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt; \tag{19}$$

- улучшенная ИКО

$$I_1 = \int_0^{\infty} [e_n^2(t) + a_1 e_n^2(t)] dt; \tag{20}$$

где  $a_1$  - весовой коэффициент, учитывающий производную ошибки.

ИКО переходного процесса можно вычислить [18] по изображению ошибки

$$E_n(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{c_n s^n + \dots + c_1 s + c_0} \quad (21)$$

с помощью следующих выражений (для  $m = n-1$ ):

$$n = 1, \quad I_0 = \frac{b_0^2}{2c_0c_1} \quad (22)$$

$$n = 2, \quad I_0 = \frac{b_1^2 c_0 - b_0^2 c_2}{2c_0c_1c_2} \quad (23)$$

$$n = 3, \quad I_0 = \frac{b_2^2 c_0 c_1 + (b_2^2 - 2b_0 b_2) c_0 c_3 + b_0^2 c_2 c_3}{2c_0c_3(c_1c_2 - c_0c_3)} \quad (24)$$

Для вычисления улучшенной ИКО выражение (20) записывается в виде:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt + a_1 \int_0^{\infty} \dot{e}_n^2(t) dt = I_{10} + a_1 I_{11} \quad (25)$$

Первый интеграл  $I_{10}$  (ИКО ошибки) вычисляется по формулам (22), (23) или (24). Для вычисления второго интеграла ( $I_{11}$ ) необходимо получить изображение производной ошибки

$$E_n(s) = \mathcal{L}\{e_n(t)\} = sE_n(s) - e(0), \quad (26)$$

где  $E_n(s)$  определяется выражением (21), а начальное значение ошибки  $e(0)$  - по теореме о предельном переходе:

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE_n(s). \quad (27)$$

Подставив (27) в (26), получим выражение для изображения производной ошибки

$$E_n(s) = sE(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (28)$$

по коэффициентам которого с использованием формул (22), (23) или (24) можно вычислить интеграл  $I_{11}$  в выражении (25).

**Задача 7.1.** Для системы автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис.П2.5, принять:

$$W(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}; \quad W_R(s) = k_R; \quad T = 0,1 \text{ с}$$

Построить корневой годограф при изменении  $k_R$  от нуля до бесконечности. Найти аналитические зависимости косвенных показателей качества  $\mu$ ,  $\eta$  от значения коэффициента передачи  $k_R$ .

**Задача 7.2.** Для системы из задачи 7.1 определить, используя программу CLASSIC в режиме анализа вариаций параметров, прямые показатели качества  $\sigma\%$ ,  $I_p$  при нескольких значениях  $k_R$  из областей:  $0 < k_R \leq 1/4T$ ;  $1/4T < k_R \leq 12.5$ ;  $12.5 < k_R < 250$ . Используя результаты решения задачи 7.1, построить таблицу вида:

Варьируемый параметр	Показатели качества			
	$\pi$	$\mu$	$\sigma\%$	$I_p$
$k_R$				

**Задача 7.3.** Для системы из задачи 7.1 определить частотные показатели качества  $\Delta L$ ,  $\Delta\phi$ ,  $\omega_{cp}$  по ЛЧХ разомкнутой системы  $L_0(\omega)$ ,  $\phi_0(\omega)$  при значениях  $k_R$  из таблицы. Дополнить таблицу тремя столбцами с рассчитанными показателями. Проанализировать взаимосвязи показателей качества. Построить зависимости между отдельными показателями.

**Задача 7.4.** Для той же системы, используя программу CLASSIC в режиме анализа вариаций параметров, определить частотные показатели качества  $M$ ,  $\omega_p$  по АЧХ замкнутой системы при значениях  $k_R$  из таблицы. Дополнить таблицу двумя столбцами с рассчитанными показателями. Проанализировать взаимосвязи показателей качества. Построить зависимости между показателями.

**Задача 7.5.** Для той же системы найти аналитическую зависимость интегральной оценки  $I_0$  от коэффициента  $k_R$ , построить график зависимости.

Дополнить таблицу столбцом значений  $I_0$ . Проанализировать взаимосвязи между показателями качества.

Ответить на вопросы:

- Какова качественная связь ИКО  $I_0$  с характером переходного процесса в системе при  $g(t) = g_0 1(t)$ ?
- Какая форма кривой переходного процесса в системе соответствует минимуму этой оценки?

**Задача 7.6.** Для той же системы, используя программу CLASSIC в режиме "Оптимизация", получить зависимости улучшенной ИКО  $I_1$  от коэффициента  $k_R$  при нескольких значениях весового коэффициента  $a_1$ .

Ответить на следующие вопросы:

- Какова качественная связь ИКО  $I_1$  с характером переходного процесса при воздействии  $g(t) = g_0 1(t)$ ?
- Какая форма кривой переходного процесса в исследуемой системе обеспечивает минимум этой оценки?
- Приближение к какой "эталонной" кривой переходного процесса характеризует значение ИКО  $I_1$ ?

## Восьмое практическое занятие

### Содержание

Исследование влияния вариаций характеристик отдельных элементов системы на ее свойства в целом с использованием функций чувствительности. Определение функций чувствительности для различных структур систем управления.

#### Основные сведения из теории

Влияние малых вариаций характеристик отдельных элементов на свойства системы управления удобно оценивать с помощью функций чувствительности. Относительная функция чувствительности (ФЧ)  $S_{W_i}^{W_c}(s)$  ПФ системы к вариациям ПФ звена связывает малые относительные приращения этих ПФ, т.е.

$$\frac{\delta W_c(s)}{W_c(s)} \approx S_{W_i}^{W_c}(s) \frac{\delta W_i(s)}{W_i(s)} \quad (29)$$

Из этого определения ФЧ можно получить выражение для ее расчета

$$S_{W_i}^{W_c}(s) = \frac{\partial W_c(s)}{\partial W_i(s)} \frac{W_i(s)}{W_c(s)} \quad (30)$$

Относительную ФЧ можно получить непосредственно по структурной схеме системы управления после ее незначительного преобразования. Последнее сводится к введению последовательно с варьируемым звеном дополнительного звена с единичной передачей и переназначению входной и выходной переменных. Относительная ФЧ определяется как ПФ преобразованной системы между назначенными входом и выходом.

Влияние вариаций характеристик отдельных элементов системы на ее свойства в целом удобно оценивать по относительному изменению АЧХ с использованием выражения (29), приведенного к виду:

$$\frac{\delta A_c(\omega)}{A_c(\omega)} \approx \left| S_{W_i}^{W_c}(j\omega) \right| \cdot \frac{\delta A_i(\omega)}{A_i(\omega)} \quad (31)$$

где:  $A_i(\omega)$ ,  $A_c(\omega)$  - АЧХ соответственно варьируемого звена и системы;  $\delta A_i(\omega)$ ,  $\delta A_c(\omega)$  - малые конечные приращения этих АЧХ;

$$\left| S_{W_i}^{W_c}(s)(j\omega) \right| = \text{mod } S_{W_i}^{W_c}(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (32)$$

При решении задачи анализа чувствительности с использованием ЛЧХ звеньев и систем ФЧ удобно оценивать в дБ:

$$L S_{W_i}^{W_c}(\omega) = 20 \lg \left| S_{W_i}^{W_c}(j\omega) \right| \quad (33)$$

**Задача 8.1.** Определить относительные функции чувствительности ПФ  $W_c(s)$  разомкнутой системы, образованной последовательным соединением двух звеньев (рис.П2.10а).

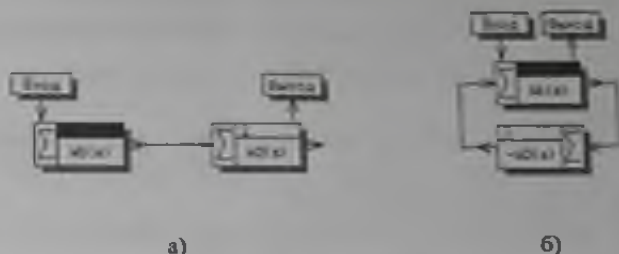


Рис.П2.10

**Решение.** Используя выражение (30) для  $W_c(s) = W_1(s)W_2(s)$ , получаем:

$$S_{W_1}^{W_c}(s) = S_{W_2}^{W_c}(s) = 1$$

т.е. относительное изменение АЧХ любого из звеньев на  $m\%$  вызывает точно такое же относительное изменение АЧХ системы.

**Задача 8.2.** Определить относительные функции чувствительности ПФ  $\Phi(s)$  замкнутой системы (рис.П2.10б) к вариациям ПФ  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ .

**Решение.** Используя выражение (30) при  $W_c(s) = \Phi(s)$ , определяем относительные ФЧ:

$$S_{W_1}^{\Phi}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)}; \quad S_{W_2}^{\Phi}(s) = -\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

Тот же результат можно получить, если воспользоваться преобразованными структурными схемами, показанными на рис.П2.11.

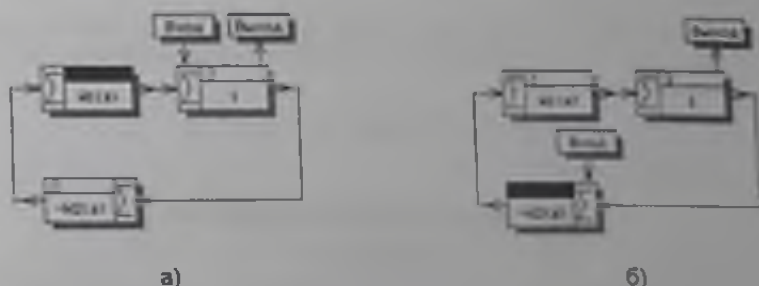


Рис.П2.11

Как было сказано выше, относительные ФЧ  $S_{W_1}^{\Phi}(s)$ ,  $S_{W_2}^{\Phi}(s)$  в этом случае равны ПФ между обозначенными на схемах входами и выходами

**Задача 8.3.** Для системы с обратной связью (рис. П2.106) с ПФ звеньев:

$$W_1(s) = k_1 / s; \quad W_2(s) = 1$$

построить ФЧ  $LS_{W_1}^\Phi(\omega)$ ,  $LS_{W_2}^\Phi(\omega)$ . Определить диапазоны частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , где относительная чувствительность АЧХ системы к вариациям АЧХ звеньев  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  мала, т.е.  $|S_{W_i}^\Phi(j\omega)| < 0.1$ , иначе,  $LS_{W_i}^\Phi(\omega) < -20$  дБ;  $i=1,2$ .

Ответить на вопросы:

- Как соотносятся найденные диапазоны частот с диапазонами, где усиления разомкнутого контура  $|W_0(j\omega)| = |W_1(j\omega)W_2(j\omega)|$  велики ( $|W_0(j\omega)| > 10$ ) и малы ( $|W_0(j\omega)| < 0.1$ )?
- Какими приближенными выражениями можно заменить ПФ  $\Phi(s)$  для частот, принадлежащих диапазонам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ?

**Задача 8.4.** Для замкнутой системы рис. П2.106 с ПФ звеньев

$$W_1(s) = \frac{k_1(1+T_2s)}{s(1+T_1s)(1+T_3s)}, \quad W_2(s) = 1$$

где:  $k_1=100 \text{ с}^{-1}$ ;  $T_1=10 \text{ с}$ ;  $T_2=1 \text{ с}$ ;  $T_3=0.01 \text{ с}$ , построить ФЧ  $LS_{W_1}^\Phi(\omega)$  в диапазоне частот  $0.01 \leq \omega \leq 1000$ . Определить диапазоны частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , где относительная чувствительность АЧХ замкнутой системы к вариациям ПФ  $W_1(s)$  мала, т.е.  $LS_{W_1}^\Phi(\omega) < -20$  дБ, и велика, т.е.  $LS_{W_1}^\Phi(\omega) \approx 0$  ( $|S_{W_1}^\Phi(j\omega)| \approx 1$ ). Объяснить результат, используя ЛАЧХ системы в разомкнутом состоянии  $L_0(\omega)$ .

Ответить на вопросы:

- Вариации каких из постоянных времени в ПФ  $W_1(s)$  вызывают наибольшее и наименьшее относительные изменения ЛАЧХ замкнутой системы?
- Как скажутся вариации постоянных времени  $T_1$ ,  $T_2$  на корнях ХП замкнутой системы?
- Каким будет приближенное значение четвертого корня ХП замкнутой системы, если в прямую цепь дополнительно включить последовательное звено с ПФ

$$W_3(s) = 1/(1+T_4s), \quad T_4 = 0.001 \text{ с}?$$

Объяснить ответ.

## Девятое практическое занятие

### Содержание

Исследование характеристик автоматических систем, использующих принцип управления по разомкнутому циклу. Синтез алгоритма управления из условий ковариантности управляемой переменной объекта с задающим воздействием и инвариантности этой переменной к возмущающему воздействию.

### Основные сведения из теории

Идеализированной целью создания системы управления является обеспечение абсолютной ковариантности переменной выхода объекта  $y(t)$  с задающим (управляющим) воздействием  $g(t)$ , т.е. их тождественности

$$y(t) = g(t).$$

Достижению этой цели обычно препятствуют: инерционность объекта; ограничения на ресурсы управления и на отдельные переменные системы; неполнота информации о динамических свойствах объекта и возмущениях; вариации характеристик элементов системы и т.п.

Если объект управления устойчив и хорошо изучен, о возмущениях имеется достаточная информация, ограничения на ресурсы управления слабые, а требования к процессам не очень высоки, то можно строить систему, реализующую принцип управления по разомкнутому циклу (рис.П2.12).



Рис.П2.12

Для абсолютной ковариантности выхода объекта с заданием при  $f(t)=0$  необходимо, чтобы ПФ этой системы была тождественна единице, т.е.

$$W_R(s)W(s) = 1,$$

где:  $W_R(s)$  - ПФ управляющего устройства;  $W(s)$  - ПФ объекта. Отсюда можно получить алгоритм управления в форме ПФ

$$W_R(s) = 1/W(s), \quad (34)$$

которая компенсирует все полюсы и нули ПФ объекта, а следовательно, приводит к неуправляемости и ненаблюдаемости его состояния по каналу "вход-выход".

Поскольку собственная динамика объекта в такой системе сохраняется (полюсы и нули его ПФ образуют корни ее ХП), такое построение системы возможно лишь для минимально-фазовых объектов с достаточной степенью устойчивости.

Точная реализация ПФ  $W_R(s)$  по выражению (34) для инерционных объектов вызывает проблемы, связанные с условиями физической реализуемости линейного оператора, поэтому практически здесь можно обеспечить лишь селективную абсолютную ковариантность.

Для статического режима (установившийся режим при постоянном сигнале задания  $g(t)=g_0$ ) можно получить нулевую установившуюся ошибку, т.е.  $y_0 = g_0$  если обеспечить

$$W_R(0)W(0) = 1,$$

т.е., например, принять П-закон управления с ПФ  $W_R(s)=k_R=1/k$ .

Возмущения, действующие на объект в рассматриваемой структуре (рис.П2.12), не компенсируются. В частности, даже при точной реализации выражения (34) эквивалентное возмущение  $f(t)$ , приведенное к выходу системы, суммируется с выходной переменной собственно объекта, т.е.

$$y(t) = g(t) + f(t).$$

Если можно получить полную информацию о каком-либо возмущении  $f(t)$  (измеряемое возмущение), то возможна структурная организация разомкнутой системы с полной компенсацией этого возмущения (рис.П2.13). В данном примере объект представлен тремя звеньями, а возмущающее воздействие подается на одну из внутренних координат объекта.

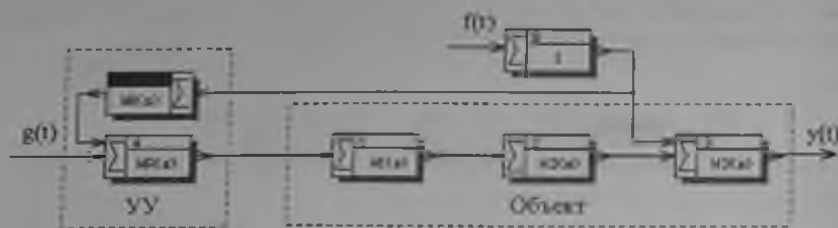


Рис.П2.13

ПФ  $W_K(s)$  компенсатора, обеспечивающего абсолютную инвариантность выходной  $y(t)$  переменной к этому возмущению, определяется из условия:

$$Y_f(s) = F(s)W_3(s) [1 + W_K(s)W_R(s)W_1(s)W_2(s)] = 0,$$

откуда

$$W_K(s) = -1/W_R(s)W_1(s)W_2(s). \quad (35)$$

В этом выражении  $W_R(s)$  - ПФ части управляющего устройства, обеспечивающей ковариантность переменной выхода с заданием.

Если ПФ объекта определена неточно, или варьирует в процессе эксплуатации системы, неточно реализованы ПФ  $W_R(s)$  или  $W_K(s)$ , имеются сильные неизмеряемые возмущения, то качество разомкнутой системы управления будет невысоким. Необходима обратная связь, т.е. переход к структурам, использующим принцип управления по замкнутому циклу.

**Задача 9.1.** В системе управления по разомкнутому циклу (рис.П2.12) с объектом, структурная схема которого приведена на рис.П2.13 с ПФ:

$$W_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}, \quad W_3(s) = \frac{k}{T_3 s + 1},$$

а параметры выбираются самостоятельно, определить коэффициент передачи  $k_R$  П-регулятора из условия равенства выходной переменной и постоянного задающего воздействия при  $t \rightarrow \infty$ . Определить переходный процесс в системе при  $g(t) = g_0 1(t)$ ;  $f(t) = 0$ .



Ответить на вопросы:

- Каким будет переходный процесс в синтезированной системе при возмущении  $f(t) = -f_0 1(t)$ , приложенном ко входу звена  $W_3(s)$ ?
- Как изменяются свойства системы при параметрическом возмущении - вариации коэффициента передачи объекта?

**Задача 9.2.** В системе управления из задачи 9.1 принять:  $T_3 > T_2 > T_1$ ;  $W_R(s) = k_R W_R^*(s)$ . Определить алгоритм управления (ПФ  $W_R(s)$ ), при котором компенсируется самая "медленная" составляющая собственного движения объекта, а в установившемся режиме для  $g(t) = g_0 1(t)$  имеем  $y_y = g_0$ . Получить кривую переходного процесса в системе для  $g(t) = g_0 1(t)$  и показать расположения нулей и полюсов ПФ системы на комплексной плоскости.

Ответить на вопросы:

- Как изменяются свойства синтезированной системы при параметрических возмущениях - вариациях параметров  $k$ ,  $T_3$  объекта?
- Как изменится по сравнению с задачей 9.1 реакция системы на сигнальное возмущение  $f(t) = -f_0 1(t)$ , приложенное ко входу звена  $W_3(s)$ ?
- Какими свойствами по отношению к параметрическим и сигнальным возмущениям будет обладать та же система с ПФ управляющего устройства, синтезируемой из условия (34) абсолютной ковариантности выходной переменной с заданием?

**Задача 9.3.** В систему управления из задачи 9.1 с ПФ  $W_R(s) = k_R$  и теми же значениями  $k$ ,  $k_R$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  ввести компенсирующую связь по возмущению  $f(t)$  (рис. П.2.13). Определить ПФ  $W_k(s)$  из условия (35) абсолютной инвариантности выходной переменной к возмущению  $f(t)$ .

Ответить на вопросы:

- Каким будет переходный процесс в синтезированной системе при  $f(t) = f_0 1(t)$ ?
- Какими свойствами обладает система по отношению к возмущению, приложенному ко входу звена  $W_2(s)$ ?
- Чем будет отличаться переходный процесс в этой системе при  $g(t) = g_0 1(t)$  по сравнению с процессом, полученным в задаче 9.1?
- Как влияют параметрические возмущения ПФ  $W_3(s)$  (вариации параметров  $k$ ,  $T_3$ ) на свойства системы по отношению к сигнальному возмущению  $f(t)$ ?
- Как влияют параметрические возмущения ПФ  $W_1(s)$  (вариации коэффициента передачи и постоянной времени  $T_1$ ) на свойства системы в переходном и установившемся режимах по отношению к заданию  $g(t)$  и возмущению  $f(t)$ ?

**Задача 9.4.** Повторить решение задачи 9.3 при условии

$$W_1(s) = \frac{1}{T_1 s - 1}, \quad (36)$$

т.е. для неустойчивого объекта. Ответить на все поставленные в задаче 9.3 вопросы.

**Задача 9.5.** Повторить решение задачи 9.3 при условии (36) и ПФ  $W_R(s)$ , синтезируемой из условия (34) абсолютной ковариантности выходной переменной с заданием. Ответить на все поставленные в задаче 9.3 вопросы. Сделать выводы относительно возможности использования принципа управления по разомкнутому циклу для неустойчивых объектов.

## Десятое практическое занятие

### Содержание

Структурно-параметрический синтез корректирующих устройств систем автоматического регулирования в комплексно-частотной области из условия обеспечения требований к качеству переходных процессов.

### Основные сведения из теории

Коррекцией систем автоматического регулирования называется стабилизация системы и/или удовлетворение требований к переходным процессам при сохранении ранее достигнутого качества установившихся движений. Решение задачи синтеза корректирующих устройств (звеньев) с использованием частотного метода включает два основных этапа. На первом этапе по заданным показателям качества определяется желаемая форма и параметры ЛАЧХ  $L_0(\omega)$  системы в разомкнутом состоянии. Второй этап - нахождение ЧХ, либо ПФ корректирующего звена, включение которого тем или иным способом в структурную схему системы реализует требования задания.

Допустим, что в проектируемой системе с обратной связью, представленной на рис. П2.14, обеспечены требования к точности установившихся процессов при управляющих воздействиях определенных типов, т.е. выбраны порядок астатизма и коэффициент передачи контура.

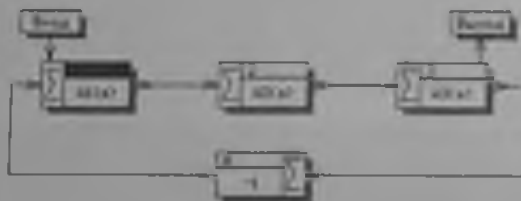


Рис. П2.14

Если анализ замкнутой системы выявит ее неустойчивость или несоответствие заданным показателям качества, то необходима коррекция системы, т.е. определение места (способа) включения и передаточной функции корректирующего звена.

Классический частотный метод синтеза, как правило, реализуется в виде графоаналитической процедуры, включающей построение желаемой ЛАЧХ  $L_0(\omega)$  разомкнутого контура и ЛАЧХ  $L_c(\omega)$  звена коррекции. Использование программы CLASSiC, на которое в значительной степени ориентировано данное практическое занятие, делает эту процедуру существенно менее трудоемкой и расширяет ее возможности. Помимо определения указанных характеристик в программе CLASSiC заложена возможность аппроксимации ПФ звена коррекции  $W_c(s)$  с целью понижения (редукции) порядков полиномов ее числителя и знаменателя, а также оптимизации параметров корректирующего звена с использованием интегральных критериев качества (этой задаче посвящено следующее практическое занятие).

**Задача 10.1.** Для системы, структурная схема которой приведена на рис.П2.14 с ПФ:

$$W_1(s) = 10, \quad W_2(s) = \frac{1}{s(1+0.2s)}, \quad W_3(s) = \frac{1}{1+s}$$

*Handwritten notes:*  
 $\tau_{12} = 2s$   
 $\tau_{13} = 0.2s$   
 $\tau_{23} = 1s$

синтезировать корректирующее звено с ПФ  $W_c(s)$ , последовательное введение которого в прямую цепь обеспечит перерегулирование  $\sigma \leq 20\%$ , время регулирования  $t_p \leq 10$  с. Добротность по скорости  $k_1 = 10 \text{ с}^{-1}$  должна быть сохранена, что обеспечивает заданную точность воспроизведения линейно изменяющихся воздействий.

**Решение.** В режиме "Ввод/Редактирование" программы CLASSiC введем в ЭВМ структурную схему системы с последовательным корректирующим устройством (рис.П2.15). Звено коррекции объявляется варьируемым с начальным оператором  $W_c(s) = 1/1$ .

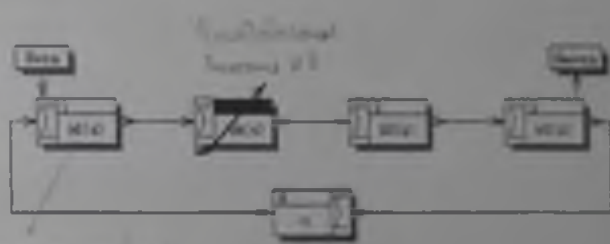


Рис.П2.15

Перейдя в режим "Частотный синтез", на экране получаем изображение, показанное на рис.П2.16 (с. 155).

Изменим масштаб частотных характеристик путем добавления декады слева от частоты  $\omega = 0.01 \text{ с}^{-1}$ . Переведем маркер на левую границу диапазона ( $\omega = 0.001 \text{ с}^{-1}$ ) и будем постепенно сдвигать его слева направо до частоты, на кото-

рой требуется увеличить наклон асимптотической ЛАЧХ до  $-40$  дБ/дек (для рассматриваемого примера остановимся на значении модуля ЛАЧХ  $60$  дБ при  $\omega=0.01$  с<sup>-1</sup>). В дальнейшем, говоря о наклонах ЛАЧХ, будем иметь в виду наклоны соответствующих участков асимптотических ЛАЧХ.

При формировании характеристики "слева-направо" следует домножать ПФ системы на операторы типовых элементарных звеньев с ПФ  $(s+a)/s$  или  $a/(s+a)$ , т.к. при этом не изменяется наклон ЛАЧХ слева от частоты  $\omega=a$ . В данном случае используем команду домножения на аperiодическое звено первого порядка, после чего характеристики будут пересчитаны, а экран примет вид, представленный на рис.П2.17 (с. 155).

После первой манипуляции на графиках видны различающиеся ЛАЧХ исходной и текущей систем, а также ЛАЧХ введенного корректирующего звена, обеспечивающего это различие. На оси частот появился новый полюс.

Продолжим перемещение маркера в сторону увеличения частоты. При значении модуля ЧХ текущей системы, приблизительно равного  $16$  дБ (на частоте  $\omega = 0.125$  с<sup>-1</sup>), изменим наклон текущей ЛАЧХ с  $-40$  дБ/дек до  $-20$  дБ/дек, для чего введем команду умножения на ПФ  $(s+a)/a$ . После этого действия получим картину, представленную на рис.П2.18 (с. 156). На оси частот образовался нуль, а справа от маркера текущая ЛАЧХ имеет наклон  $-20$  дБ/дек.

Наклон ЛАЧХ, равный  $-20$  дБ/дек, следует сохранить до значения модуля, равного приблизительно  $-16$  дБ, что требует компенсации полюса  $p = -1$  ПФ исходной системы. Для этой цели подводим маркер на частоту  $\omega=1$  с<sup>-1</sup> и вводим команду умножения на ПФ  $(s+a)/a$  (рис.П2.19, с. 156).

Последняя манипуляция заключается в согласовании наклонов ЛАЧХ текущей и исходной систем на высоких частотах, для чего на частоте, при которой модуль ЛАЧХ равен  $-16$  дБ или несколько правее (но так, чтобы ЛАЧХ текущей не прошла выше исходной ЛАЧХ), добавим полюс, т.е. введем звено с ПФ  $a/(s+a)$ .

В результате получим показанные на рис.П2.20 (с. 157) ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы, а также соответствующую ЛАЧХ звена последовательной коррекции.

ПФ корректирующего звена будет иметь вид:

$$W_K(s) = \frac{1 + 8.94s + 7.94s^2}{1 + 100s + 25.1s^2}$$

На рис.П2.21 (с. 157) показан переходный процесс в скорректированной системе (кривая 1), полученный в режиме "Анализ". Показатели качества: время регулирования  $t_p=10$  с, перерегулирование  $\sigma=13\%$ .

**Задача 10.2.** Для системы из задачи 10.1 (рис.П2.14) синтезировать ПФ  $W_K(s)$  корректирующего звена, охватывающего звено с ПФ  $W_1(s)=k_1=10$ , из условия обеспечения показателей качества, заданных в задаче 10.1.

**Решение.** В режиме "Ввод/Редактирование" программы CLASSiC введем модель исходной системы в виде, показанном на рис.П2.22. Звено коррекции объявляется варьируемым с начальным оператором  $W_K(s)=0/1$ .

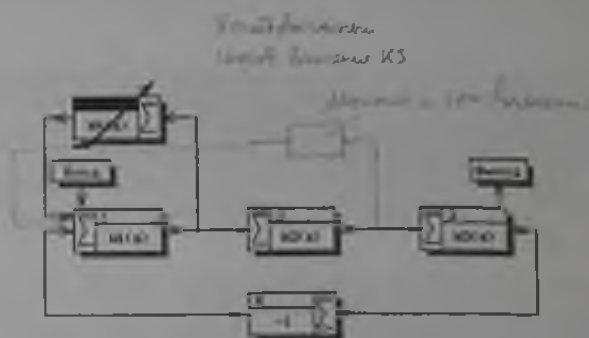


Рис.П2.22.

Будем формировать желаемую ЛАЧХ "справа-налево", что обеспечит совпадение высокочастотных участков ЛАЧХ исходной и желаемой систем.

Перейдя в режим "Частотный синтез", на экране получаем изображение, показанное на рис.П2.16 (с. 155).

Установим маркер на частоту  $\omega=6.3 \text{ с}^{-1}$ , на которой значение ЛАЧХ исходной системы равно -16.2 дБ. В окрестности этой частоты наклон асимптотической ЛАЧХ исходной системы равен -60 дБ/дек. Слева от маркера образуем участок ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек. Для этой цели дважды подадим команду умножения на ПФ  $s/(s+a)$ , в результате чего получим ЛЧХ, представленные на рис.П2.23 (с. 158).

Слева от установленной частоты появился участок асимптотической ЛАЧХ с требуемым наклоном -20дБ/дек, однако, при  $\omega < 0.05 \text{ с}^{-1}$  этот наклон изменяется из-за наличия полюса исходной системы  $p = -5$ . Воспользуемся процедурой удаления из ПФ исходной системы нулей и полюсов, модули которых меньше пяти (в данном случае - двух полюсов исходной системы). После выполнения требуемой команды будем иметь картину, представленную на рис.П2.24 (с. 158).

Среднечастотный участок с наклоном -20дБ/дек продлим влево до значения модуля ЛАЧХ приблизительно +16 дБ ( $\omega=0.19 \text{ с}^{-1}$ ). Слева от точки, соответствующей частоте  $\omega=0.19 \text{ с}^{-1}$  сформируем асимптоту с наклоном -40 дБ/дек для чего вводим команду умножения ПФ текущей системы на ПФ  $(s+a)/s$  (рис.П2.25, с. 159).

Для того чтобы обеспечить совпадение низкочастотных асимптот исходной и желаемой ЛАЧХ, подводим маркер до точки пересечения этих характеристик ( $\omega=0.022 \text{ с}^{-1}$ ) и вводим команду умножения ПФ текущей системы на ПФ  $s/(s+a)$ .

Результат частотного синтеза показан на рис.П2.26 (с. 159), где приведены ЛАЧХ исходной и желаемой систем, ФЧХ желаемой системы. ЛАЧХ корректирующего звена в виде местной обратной связи. ПФ звена коррекции имеет вид:

$$W_K(s) = \frac{-0.005 - 3.75s - 0.677s^2}{1 + 6.45s + 6.5s^2 + s^3}$$

Нетрудно заметить, что для точного совпадения низкочастотных участков ЛАЧХ исходной и желаемой систем полином числителя ПФ  $W_K(s)$  типа обратной

связи должен иметь нуль  $z=0$ . Наличие не равного нулю младшего коэффициента этого полинома говорит о незначительном несовпадении низкочастотных участков, что вызвано дискретностью перемещения маркера частоты. Коэффициент может быть обнулен в режиме "Ввод/Редактирование".

Проведя анализ синтезированной системы, получим переходный процесс, показанный на рис.П2.21, кривая 2 (с. 157). Время регулирования  $t_p=6.8$  с, перерегулирование  $\sigma=13\%$ .

**Задача 10.3.** Для системы, рассмотренной в задаче 10.1, провести аппроксимацию синтезированной ПФ  $W_k(s)$  с целью понижения порядков полиномов числителя и знаменателя до значений  $n=m=1$ . Проанализировать качество системы с упрощенной ПФ  $W_k(s)$  в переходном режиме.

**Решение.** При использовании программы *CLASSiC* задача формирования приемлемой ЛАЧХ звена коррекции может быть решена с помощью процедуры, аналогичной формированию желаемой ЛАЧХ в задачах 10.1, 10.2.

Введем модель системы в виде, показанном на рис.П2.15 с ПФ последовательного звена коррекции

$$W_k(s) = \frac{1 + 8.94s + 7.94s^2}{1 + 100s + 25.1s^2},$$

и перейдем в режим "Частотный синтез". На экране получим изображение в виде рис.П2.27 (с. 160). Переведем маркер на ЛАЧХ варьируемого звена  $W_k(s)$ . Теперь на оси частот отображаются два нуля и два полюса ПФ  $W_k(s)$ .

Понизим порядок полиномов числителя и знаменателя ПФ  $W_k(s)$  путем удаления нуля и полюса, расположенных правее маркера частоты. После этого получим редуцированную ЛАЧХ звена коррекции (рис.П2.28, с. 160). Соответствующая ПФ имеет вид:

$$W_k(s) = \frac{1 + 7.94s}{1 + 100s}$$

В режиме "Анализ" определяем переходную характеристику системы, показанную на рис.П2.29 (с. 161). Прямые показатели качества равны:  $t_p=7.4$  с;  $\sigma=37\%$ .

Превышение допустимого значения перерегулирования  $\sigma$  требует следующих итераций синтеза, связанных с подбором параметров ПФ  $W_k(s)$ . Методика решения такой задачи и соответствующий пример будут рассмотрены в следующем практическом занятии.

**Задача 10.4.** Для системы, структурная схема которой приведена на рис.П2.14 с ПФ:

$$W_1(s) = 400; \quad W_2(s) = \frac{1}{s(1 + 0.002s)}; \quad W_3(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}.$$

синтезировать последовательное корректирующее звено, обеспечивающее добротность по скорости  $k_1 \geq 400 \text{ с}^{-1}$ , перерегулирование  $\sigma \leq 25\%$  и минимальное время регулирования.

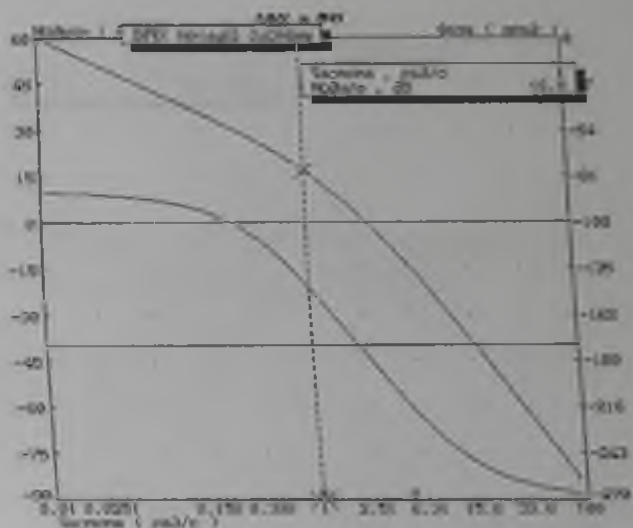


Рис.П2.16.

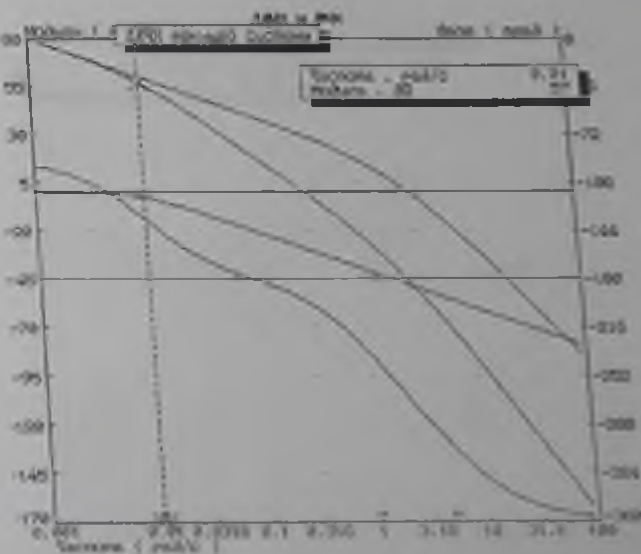


Рис.П2.17.



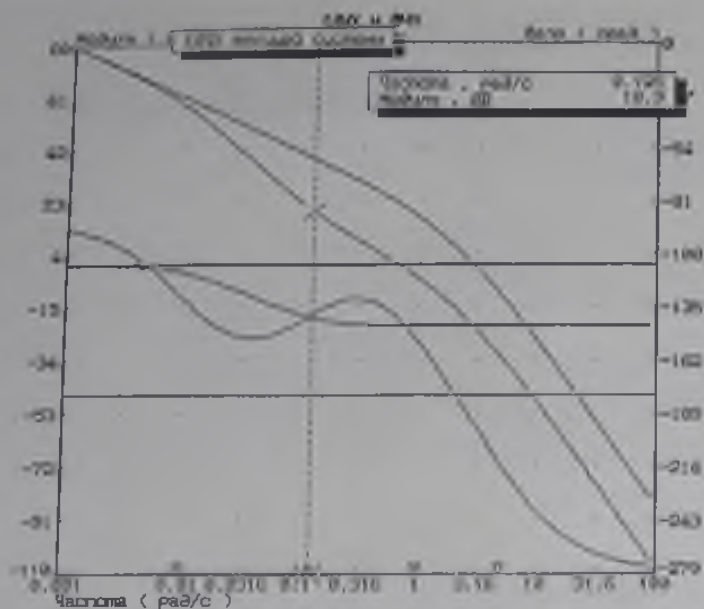


Рис.П2.18

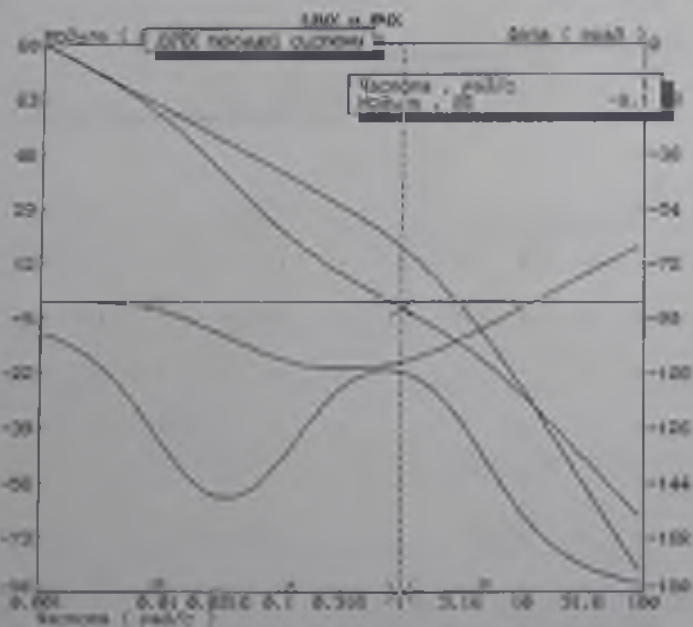


Рис.П2.19



## Приложение 2. Практические занятия

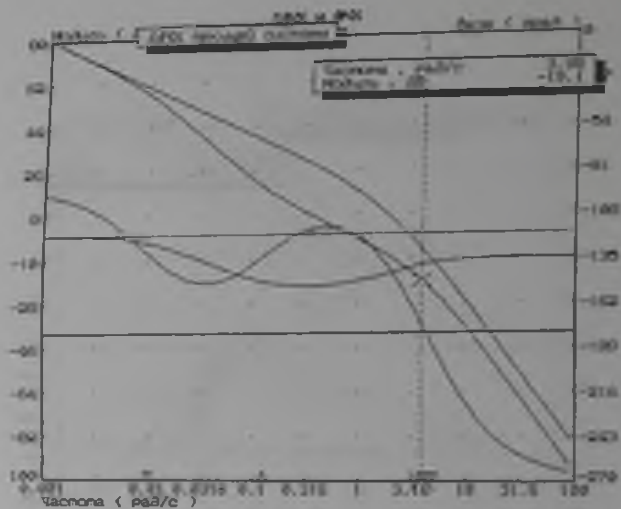


Рис. П2.20

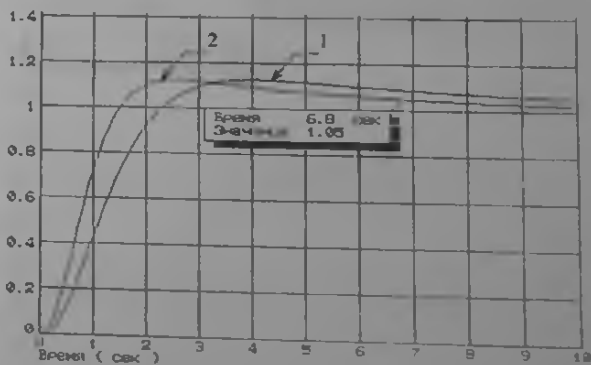


Рис. П2.21



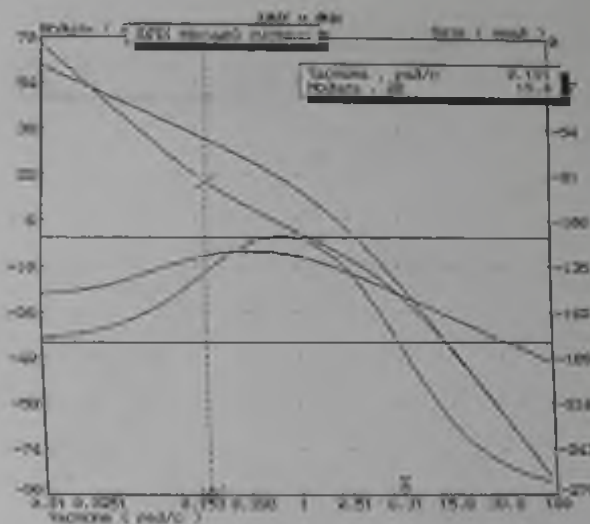


Рис.П2.25

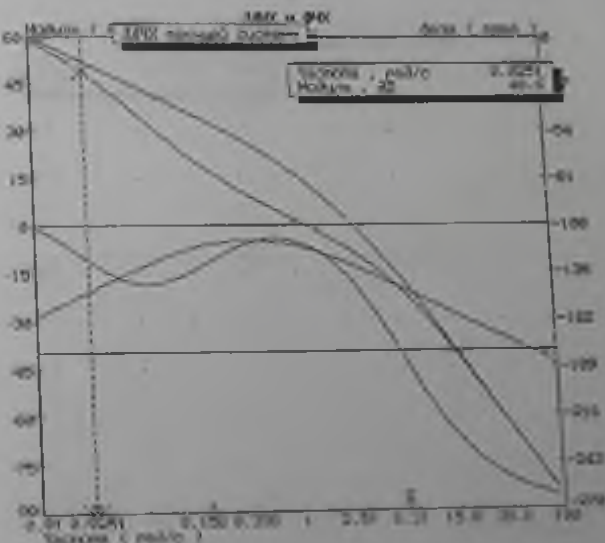


Рис.П2.26

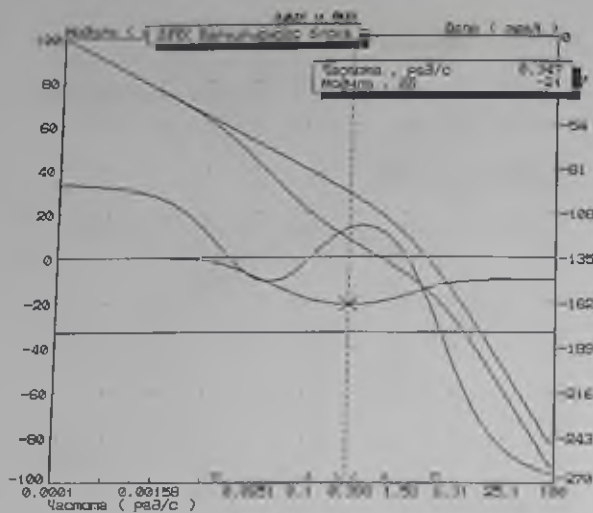


Рис.П2.27

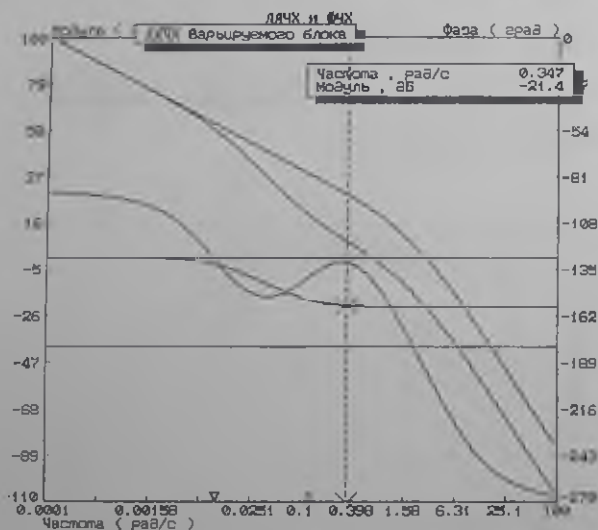


Рис.П2.28

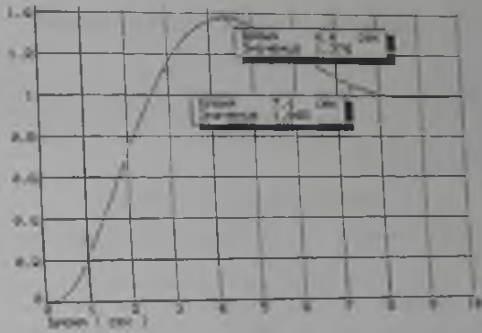


Рис.П2.29

## Одиннадцатое практическое занятие

### Содержание

Параметрический синтез систем управления из условия минимизации интегральных функционалов качества, включающих установившуюся ошибку и интегральные квадратичные оценки переходной составляющей процесса по ошибке и ее производным.

### Основные сведения из теории

Задачей параметрического синтеза является определение параметров настройки регулятора, структура оператора которого известна. Такая постановка задачи имеет место при проектировании автоматических систем с типовыми регуляторами (типовыми законами управления) или при оптимизации параметров корректирующего звена (например с целью максимизации быстродействия системы). В том и другом случаях имеется начальная ПФ звена  $W_R(s)$  или  $W_K(s)$ , параметры которого должны быть подобраны исходя из условия минимума принятого функционала качества.

Данное практическое занятие ориентировано на использование режима "Оптимизация" программы CLASSIC.

Обобщенный функционал качества аддитивно формируется из частных показателей качества в виде установившейся ошибки и интегральных квадратичных оценок переходной составляющей процесса и ее производных

$$J = be_y + a_0/l_0 + a_1/l_1 + \dots + a_4/l_4, \quad (37)$$

где:  $b, a_i$  - назначенные пользователем весовые коэффициенты;  $l_0$  - ИКО переходной составляющей (19);  $l_i$  - ИКО  $i$ -й производной переходной составляющей;  $i=1, \dots, 4$ .

Режим "Оптимизация" предоставляет пользователю следующие возможности:

- автоматический поиск параметров варьируемого звена, обеспечивающих минимум функционала качества (от одного до пяти варьируемых коэффициентов полиномов числителя и знаменателя ПФ);
- варьирование параметров ПФ звена с клавиатуры;
- построение кривой зависимости функционала от значения варьируемого параметра или поверхности в случае двух варьируемых параметров;
- разворот на экране поверхности отклика с целью придания ей выгодного ракурса при визуальном анализе;
- вызов режима "Анализ" для получения других показателей качества синтезируемой системы при конкретных значениях варьируемых параметров.

Назначение весовых коэффициентов функционала (37) для оптимизации системы в большинстве случаев представляет итеративную процедуру, в которой на каждой итерации заданием весов назначается функционал и находится его экстремум. После перехода в режим "Анализ" определяются прямые показатели качества системы и принимается решение о завершении параметрического синтеза или о переходе к следующей итерации.

Для астатических систем при постоянном по уровню внешнем воздействии имеем  $e_y=0$  при любых отличных от нуля значениях усиления в контуре, т.е. на всех итерациях следует принять значение весового коэффициента  $b=0$ .

На первой итерации параметрическую оптимизацию целесообразно проводить по ИКО, принимая:  $a_0=1$ ;  $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ , т.е.

$$J = I_0 = \int_0^{\infty} e_n^2(t) dt.$$

После нахождения экстремума функционала (оптимальных значений варьируемых параметров) проводится оценка прямых показателей качества системы на их соответствие заданию. Если оптимальная в смысле этого функционала система оказывается сильно колебательной (в частности, перерегулирование выше допустимого значения), следует перейти ко второй итерации, назначив в качестве нового функционала улучшенную ИКО

$$J = a_0 I_0 + a_1 I_1. \quad (38)$$

Поскольку положение экстремума этого функционала определяют не абсолютные значения весов  $a_0$ ,  $a_1$ , а их соотношение, можно положить  $a_0=1$  и подбирать только весовой коэффициент  $a_1$ . В качестве первого значения коэффициента  $a_1$  можно принять  $a_1=\tau^{-2}$ , где  $\tau$  - желаемая постоянная времени экспоненты  $e^{-t/\tau}$ .

являющейся безусловной экстремалью функционала (38) при  $a_0=1$ . После введения второй итерации вновь определяются прямые показатели качества системы и принимается решение об увеличении веса  $a_1$  (для уменьшения колебательности) или его уменьшения (для повышения быстродействия при допустимой колебательности).

Для статических систем с коэффициентом передачи контура, зависящим от варьируемых параметров, в функционале (37) следует положить  $b \neq 0$ . В противном случае оптимизация может привести к уменьшению этого коэффициента передачи, т.е. к увеличению  $e_y$ .

**Задача 11.1.** Для замкнутой системы, показанной на рис. П2.30, где:  $W_1(s)=1/(1+s)$ ;  $W_2(s)=0.2/(1+s)$ ;  $W_3(s)=1/(1+0.1s)$  - ПФ звеньев неизменяемой части системы;  $W_R(s)=k_R/s=1/T_{us}$  - ПФ И-регулятора, определить значение параметра настройки  $k_R$  из условия минимизации времени переходного процесса  $t_p \rightarrow \min$  при ограничении на перерегулирование  $\sigma \leq 15\%$ .

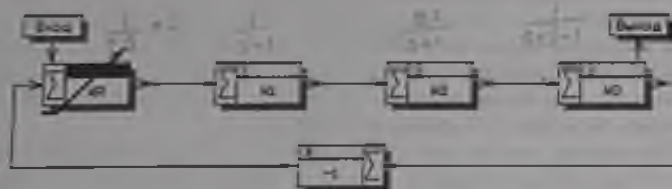


Рис.П2.30

**Решение.** В режиме "Ввод/Редактирование" программы CLASSiC введем модель системы и назначим начальное значение коэффициента настройки в ПФ варьируемого звена  $k_R=1/T_{и}=1$ .

Перейдем в режим "Оптимизация". На первой итерации примем функционал  $J = I_0$  (устанавливается по умолчанию) и объявим коэффициент  $d_1=T_{и}$  варьируемым. На экране получаем изображение, показанное на рис.П2.31.

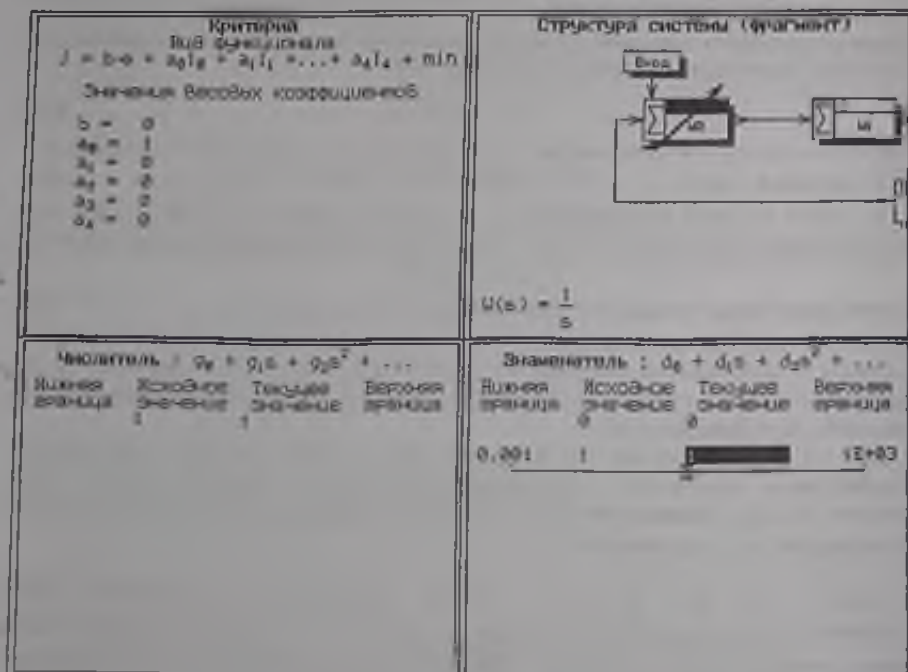


Рис.П2.31



Перейдя в процедуру "Сечения", получим график зависимости функционала от значения варьируемого параметра  $I_0(T_n)$ , показанный на рис.П2.32. При  $T_n < 0.15$  система неустойчива, и бесконечные значения функционала на графике не отображаются.

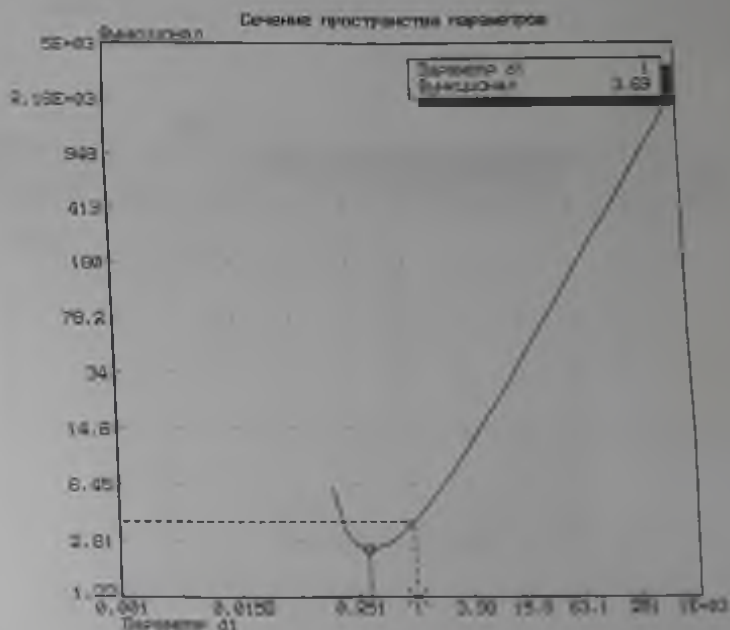


Рис.П2.32

Сканированием кривой  $I_0(T_n)$  и обращением к режиму "Анализ" можно получить характеристики системы при различных значениях параметра  $T_n$ .

Минимум ИКО на рис.П2.32 достигается при  $T_n \approx 0.33$ с. Для точного поладания в экстремум следует вернуться в основное окно режима "Оптимизация" (рис.П2.31) и запустить процедуру автоматического поиска экстремума. Получим изображение на экране, показанное на рис.П2.33, и точное значение параметра настройки  $T_n = 0.338$ с.

<p style="text-align: center;"><b>Критерий</b>                  Вид функционала  <math>J = b \cdot e + a_0 \cdot l_0 + a_1 \cdot l_1 + \dots + a_4 \cdot l_4 \rightarrow \min</math></p> <p>Значения весовых коэффициентов</p> <p><math>b = 0</math>  <math>a_0 = 1</math>  <math>a_1 = 0</math>  <math>a_2 = 0</math>  <math>a_3 = 0</math>  <math>a_4 = 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Процесс оптимизации</b>                  Значение функционала</p> <p>исходное <math>10^{-1}</math> <math>10^0</math> <math>10^1</math></p> <p>текущее <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0.338</span></p> <p>Число вычислений критерия <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2.143</span></p> <p style="text-align: center;">Для остановки оптимизации нажмите <b>Esc</b></p>																
<p>Числитель : <math>g_0 +</math> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Процесс оптимизации изменен</span> : <math>d_0 + d_1 \cdot a + d_2 \cdot a^2 + \dots</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Нижняя граница</td> <td style="width: 15%;">Исходное значение</td> <td style="width: 15%;">Текущее значение</td> <td style="width: 15%;">Верхняя граница</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Нижняя граница	Исходное значение	Текущее значение	Верхняя граница	1	1			<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Нижняя граница</td> <td style="width: 15%;">Исходное значение</td> <td style="width: 15%;">Текущее значение</td> <td style="width: 15%;">Верхняя граница</td> </tr> <tr> <td>0.001</td> <td>1</td> <td>0.338</td> <td>1E+03</td> </tr> </table>	Нижняя граница	Исходное значение	Текущее значение	Верхняя граница	0.001	1	0.338	1E+03
Нижняя граница	Исходное значение	Текущее значение	Верхняя граница														
1	1																
Нижняя граница	Исходное значение	Текущее значение	Верхняя граница														
0.001	1	0.338	1E+03														

Рис.П2.33

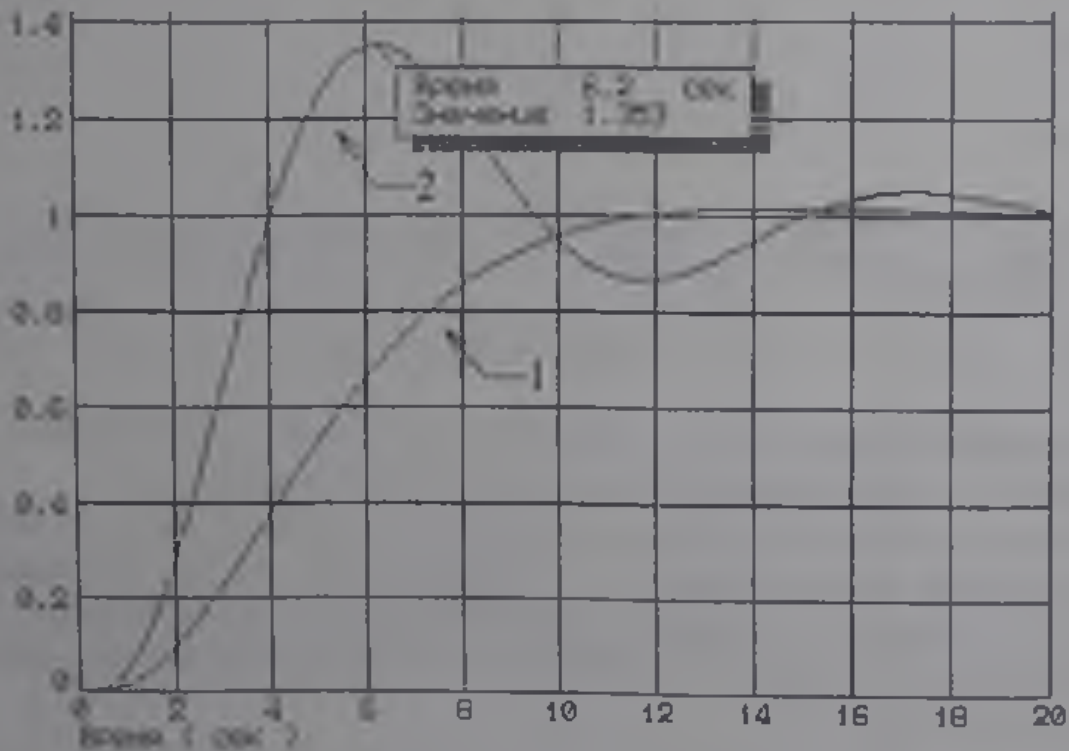


Рис.П2.34

Кривая 1 соответствует исходной системе при  $T_n=1$ , а кривая 2 - оптимальной системе в смысле минимума ИКО. Прямые показатели качества равны:  $t_p = 17.5c$ ;  $\sigma = 35\%$ .

Для уменьшения перерегулирования  $\sigma$  примем функционал  $J = I_0 + a_1 I_1$  и назначим стартовое значение параметра  $T_n=0.338c$ . Подбором веса  $a_1$  за несколько итераций находим значение  $a_1=5$ , при котором оптимальная система (при  $T_n = 0.617c$ ) имеет следующие показатели качества:  $t_p = 12c$ ;  $\sigma = 13\%$  - кривая 1 переходной характеристики (рис.П2.35).

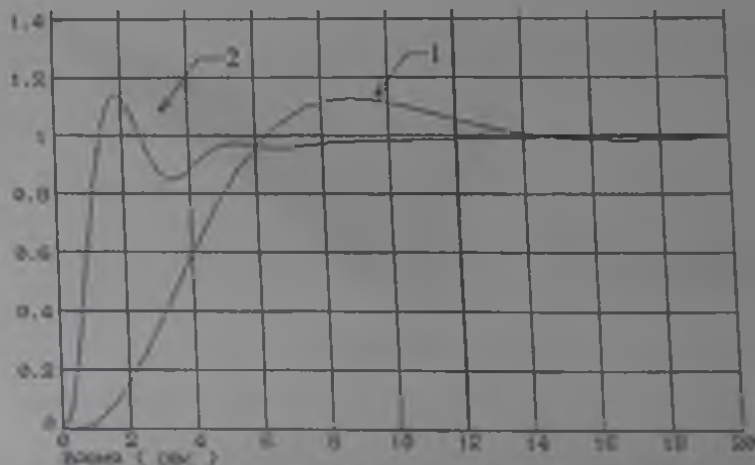


Рис.П2.35

Задача 11.2. Для системы из задачи 11.1 положим

$$W_R(s) = \frac{1+s}{T_n s}$$

(ПИ-регулятор) и определим значения параметров настройки  $\tau$ ,  $T_n$  из условия минимизации времени переходного процесса при ограничении на перерегулирование  $\sigma \leq 15\%$ . При оптимизации параметров настройки примем улучшенную ИКО.

**Решение.** В режиме "Ввод/Редактирование" программы CLASSIC введем модель системы и назначим звено  $W_R(s)$  варьируемым. Перейдем в режим "Оптимизация" и объявим варьируемыми два параметра настройки:  $\tau$ ,  $T_n$ . Стартовые значения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя ПФ  $W_R(s)$  примем:  $g_1=1$ ,  $d_1=0.617$  (оптимальное значение  $T_n$  из задачи 11.1). Начальное значение весового коэффициента в функционале качества положим  $a_1=5$ .

Перейдя в процедуру "Сечения", получим поверхность отклика в трехмерном пространстве, показанную на рис.П2.36.

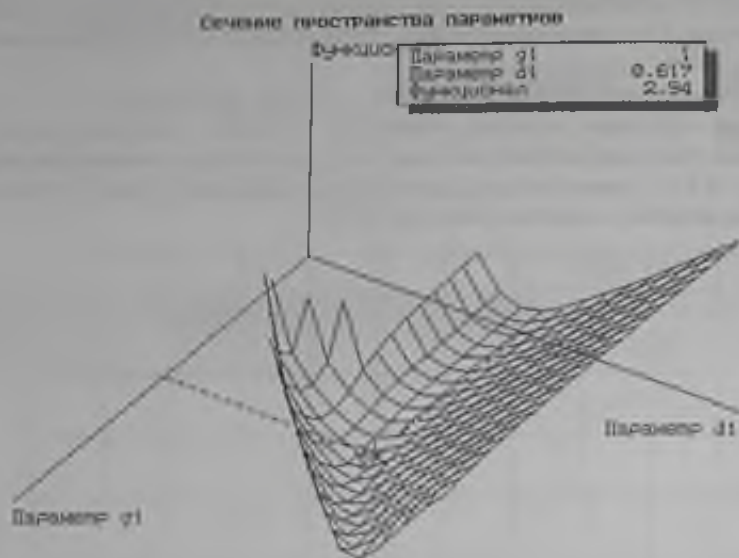


Рис.П2.36

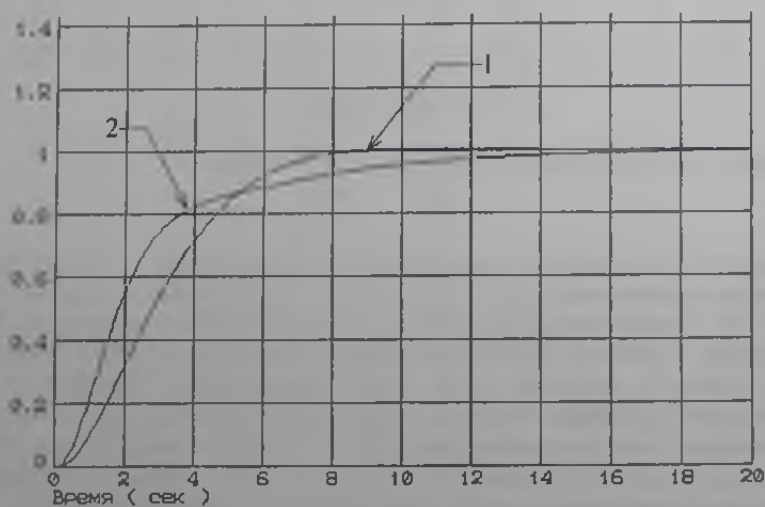


Рис.П2.37

Переходная характеристика системы, полученная в режиме "Анализ" для оптимальных значений параметров  $\tau=2.46\text{с}$ ;  $T_m=0.571\text{с}$ , показана на рис.П2.37 (кривая 2). Кривая 1 на этом же рисунке представляет переходную характеристику при стартовых значениях параметров настройки.

Уменьшением весового коэффициента  $a_1$  в функционале качества можно повысить быстродействие системы. Подбором веса за несколько итераций находим значение  $a_1=0.2$ , при котором оптимальная система (при  $\tau=3.91\text{с}$ ;  $T_m=0.228\text{с}$ ) имеет показатели качества:  $t_p=5\text{с}$ ;  $\sigma=14\%$  (кривая 2 переходной характеристики на рис.П2.35).

По сравнению с системой, синтезированной в задаче 11.1 с И-законом регулирования (кривая 1 на рис.П2.35), здесь получено существенное повышение быстродействия.

**Задача 11.3.** Для системы из задачи 11.1 принять

$$W_K(s) = \frac{1 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2}{T_m s}$$

что соответствует ПИД-регулятору, и определить параметры его настройки  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $T_m$  из условия минимизации времени переходного процесса при ограничении на перерегулирование  $\sigma \leq 15\%$ . Для оптимизации параметров использовать улучшенную ИКО.

**Задача 11.4.** Для системы из задачи 10.3 с ПФ звена последовательной коррекции

$$W_K(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + T s}$$

определить значения параметров  $\tau$ ,  $T$  из условия минимизации времени переходного процесса при ограничении на перерегулирование  $\sigma \leq 15\%$ . Для оптимизации параметров использовать улучшенную ИКО.

## Содержание

Предисловие .....	7
Список основных обозначений и сокращений .....	9
<b>1. МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>11</b>
1.1. О моделях систем управления.....	11
1.1.1. Экспериментальный подход к моделированию .....	11
1.1.2. Аналитический подход к моделированию .....	12
1.1.3. Особенности структурных моделей систем управления .....	13
1.1.4. Многоуровневые структуры систем управления .....	14
1.2. Модели систем управления в терминах “вход-выход” .....	15
1.2.1. Дифференциальные уравнения .....	15
1.2.2. Передаточные функции .....	16
1.2.3. Частотные характеристики .....	17
1.2.4. Временные характеристики .....	17
1.3. Системы дифференциальных уравнений .....	17
1.3.1. Системы дифференциальных уравнений различных порядков .....	17
1.3.2. Дифференциальные уравнения в форме пространства состояний .....	18
1.4. Структурные схемы и графы систем управления .....	18
1.4.1. Структурные схемы (С-графы) .....	19
1.4.2. Сигнальные графы .....	21
1.5. Модели среды и расширенной системы .....	22
1.6. Неопределенность моделей систем управления .....	23
1.7. Взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и графами .....	25
1.7.1. Запись дифференциальных уравнений по графу .....	25
1.7.2. Построение графов по дифференциальным уравнениям .....	26
1.8. Построение моделей “вход-выход” по моделям с развернутой структурой .....	27
1.8.1. Построение моделей “вход-выход” по системам уравнений .....	27
1.8.2. Построение моделей “вход-выход” по уравнениям состояния .....	28
1.8.3. Построение моделей “вход-выход” по графам .....	29
1.9. Модели систем управления высших уровней .....	30
<b>2. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>32</b>
2.1. Задачи анализа .....	32
2.2. Анализ устойчивости .....	33
2.2.1. Свободные движения .....	33
2.2.2. Условие устойчивости .....	33
2.2.3. Требования к свободным движениям .....	34
2.3. Анализ инвариантности .....	34
2.3.1. Формы инвариантности .....	34

2.3.2. Вынужденные движения систем управления .....	35
2.3.3. Условия инвариантности .....	35
2.3.4. Показатели качества инвариантных систем .....	36
<b>2.4. Управляемость и наблюдаемость (полнота характеристик) систем управления .....</b>	<b>39</b>
<b>2.5. Анализ влияния вариаций характеристик элементов на свойства систем управления .....</b>	<b>40</b>
2.5.1. Анализ систем при параметрических вариациях .....	41
2.5.2. Анализ систем при неструктурированных вариациях операторов элементов .....	41
2.5.3. Анализ устойчивости систем при топологических вариациях. Критерий Найквиста .....	43
2.5.4. Анализ грубости систем управления .....	45
<b>2.6. Анализ многоуровневых систем управления .....</b>	<b>46</b>
2.6.1. Понижение уровня модели .....	46
2.6.2. Построение системных графов .....	47
2.6.3. Топологическая редукция .....	48
2.6.4. Анализ устойчивости многоуровневых систем .....	49
<b>2.7. Примеры анализа объектов и систем управления .....</b>	<b>51</b>
2.7.1. Анализ магнитного подвеса физического тела .....	51
2.7.2. Анализ двигателя внутреннего сгорания .....	52
2.7.3. Анализ следящей системы .....	53
2.7.4. Анализ системы с положительным внутренним контуром .....	55
2.7.5. Анализ системы управления самолета <i>Grumman F-14</i> .....	56
2.7.6. Анализ двухуровневой системы управления судовой пропульсивной установки .....	59
<b>3. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>62</b>
<b>3.1. О синтезе систем управления .....</b>	<b>62</b>
<b>3.2. Задачи синтеза систем управления .....</b>	<b>62</b>
3.2.1. Синтез управляющих воздействий .....	63
3.2.2. Синтез компенсаторов возмущений .....	63
3.2.3. Синтез регуляторов .....	64
3.2.4. Синтез систем управления из условия подавления непосредственно неизмеряемых возмущений .....	64
3.2.5. Синтез следящих систем управления .....	65
3.2.6. Коррекция замкнутых систем управления .....	66
3.2.7. Синтез систем управления в условиях неполной определенности моделей .....	66
3.2.8. Расчет настроек типовых регуляторов .....	66
<b>3.3. Формальная постановка задач синтеза систем управления .....</b>	<b>67</b>
3.3.1. Задание множества систем .....	68
3.3.2. Задание требования при синтезе .....	69

3.3.3. Преобразование постановок задач синтеза .....	70
3.4. Методы синтеза систем управления .....	71
3.4.1. Аналитические методы синтеза .....	72
3.4.2. Графические методы синтеза .....	73
3.4.3. Численные методы синтеза .....	74
3.4.4. Общие требования к программно-методическому обеспечению задач расчета систем управления .....	75
3.5. Синтез по требованиям к установившимся процессам .....	76
3.5.1. Топологический синтез .....	76
3.5.2. Структурный синтез .....	77
3.5.3. Параметрический синтез .....	79
3.5.4. Особенности синтеза следящих систем .....	81
3.6. Коррекция систем управления .....	82
3.6.1. Топологический синтез .....	83
3.6.2. Структурно-параметрический синтез. Формирование желаемой ПФ .....	83
3.6.3. Структурно-параметрический синтез. Вычисление ПФ звена коррекции .....	85
3.6.4. Неполнота характеристик контура и неподвижные полюсы .....	85
3.7. Комплексно-частотный метод синтеза стабилизирующих обратных связей .....	85
3.7.1. Топологический синтез .....	86
3.7.2. Структурно-параметрический синтез .....	87
3.8. Расчет настроек типовых регуляторов как задача параметрического синтеза .....	90
3.8.1. Типовые регуляторы .....	90
3.8.2. Параметрический синтез .....	91
3.8.3. Задача векторной оптимизации .....	93
3.9. Примеры синтеза систем управления .....	95
3.9.1. Пример коррекции следящей системы .....	95
3.9.2. Пример синтеза стабилизирующей обратной связи для неустойчивого объекта .....	99
3.9.3. Пример параметрического синтеза системы управления двигателем внутреннего сгорания .....	101
3.9.4. Пример синтеза системы стабилизации механического объекта .....	109
Литература .....	114

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

### ПРОГРАММА CLASSIC ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....

Общие сведения о программе .....	116
Основные правила работы с программой .....	117
Режим *Ввод/Редактирование .....	118



Режим "Анализ".....	119
Режим "Оптимизация".....	119
Режим "Частотный синтез".....	120

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 2.**

<b>ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ</b> .....	<b>122</b>
Первое практическое занятие .....	122
Второе практическое занятие .....	124
Третье практическое занятие .....	126
Четвертое практическое занятие.....	129
Пятое практическое занятие .....	131
Шестое практическое занятие .....	135
Седьмое практическое занятие .....	139
Восьмое практическое занятие .....	144
Девятое практическое занятие .....	146
Десятое практическое занятие .....	150
Одиннадцатое практическое занятие .....	162

Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
Сургутского государственного университета

Д.Х.Имаев, З.Ковальски, Н.Н.Кузьмин,  
Л.Б.Пошехонов, Г.П.Цапко, В.Б.Яковлев

# АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## ТЕОРИЯ. МЕТОДЫ

Примеры решения типовых задач  
с использованием персонального компьютера

Сдано в печать 12.01.1998 г. Формат 60х90/16 Печать трафаретная  
Тираж 5000 экз (Первая партия—ИИЦ СурГУ— 1000 экз) Заказ № 98-024

Информационно-издательский центр  
Сургутского государственного университета

626 400, Россия, Ханты-Мансийский автономный округ  
г.Сургут, ул. Лермонтова, 5  
тел (3482) 32-33-06

Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 071409 от 06.03.1997 года.